BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORETTI

Sur la représentation analytique d'un continu irréductible

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 246-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__246_1>

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UN CONTINU IRRÉDUCTIBLE;

PAR M. L. ZORETTI.

1. J'ai démontré dans un Mémoire paru aux *Annales de l'École Normale* (1909) qu'un continu irréductible [1] entre deux points est l'ensemble limite d'une ligne de M. Jordan.

Cet énoncé peut d'abord être précisé de la façon suivante : Soit C le continu donné, irréductible entre a et b, et soit J_n une des lignes de Jordan en infinité dénombrable qui tendent vers C. Toutes les lignes J_n passent par a et b. Extrayons de l'ensemble des J_n une suite dénombrable de lignes. L'ensemble limite reste continu et contient a et b. Tous les points limites sont des points de C. Donc, puisque C est irréductible, l'ensemble limite est C tout entier.

Soit encore m un point quelconque de C. Je dis que m est limite *pour tous* les J_n. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une infinité de valeurs de n (indéfiniment croissantes) tels que les J_n correspondants ne pénètrent pas dans un cercle déterminé de centre m. Cela est contraire à ce que nous venons de voir, car il existerait alors un ensemble de lignes extrait de J_n pour lequel l'ensemble limite ne contiendrait pas m.

Donc le continu C a tous ses points limites pour *tous* les J_n [2]. Le raisonnement subsiste si les J_n, sans passer par a et b, admettent ces points comme points limites pour tous.

---

[1] Pour le sens de ce mot et les propriétés de ces ensembles, je renvoie au Mémoire précédent et à un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Acta*.

[2] *Voir* L. ZORETTI, *Bull. Soc. math.*, 1909, p. 116, ou *Encyclopédie* J. MOLK, article II, 1, n° 15, p. 145.

J'ajoute que pour les J_n on peut même choisir des lignes de Jordan sans point double ou *simples*.

2. Essayons de tirer de là quelques conséquences sur la possibilité de représenter les coordonnées d'un point d'un continu irréductible par des fonctions d'une variable.

On peut trouver deux fonctions continues (cas du plan)

$$x = f_n(t), \qquad y = g_n(t),$$

telles que, t variant de 0 à 1, le point x, y décrive la ligne J_n (a correspondant par exemple à $t = 0$, et b à $t = 1$). Il est assez naturel de considérer les fonctions de t

$$x = \lim_{n\,\infty} f_n(t),$$
$$y = \lim_{n\,\infty} g_n(t),$$

ou, ce qui revient au même, les séries

$$x = f_1(t) + \sum_n [f_n(t) - f_{n-1}(t)],$$

$$y = g_1(t) + \sum_n [g_n(t) - g_{n-1}(t)].$$

Mais il ne faudrait pas croire que, pour une valeur donnée de t, ces séries convergent, ni que, lorsqu'elles convergent, elles représentent un point quelconque de C : cela reviendrait à dire que toute fonction limite de fonction continue est continue.

Le raisonnement doit donc être modifié et complété.

3. Commençons par déterminer un ensemble dénombrable de points de C dont le dérivé coïncide avec C. On sait que cela est possible; soit E cet ensemble.

Donnons-nous un nombre ε, et prenons dans E les n premiers points. Rangeons-les dans un certain ordre, soit l'ordre $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entre a et a_1, entre a_1 et a_2, ..., entre a_n et b, établissons des chaînes de points de C à chaînons inférieurs à ε [1]. Nous obte-

[1] On peut, si l'on veut, supposer que les sommets sont tous des points de E, car la seule propriété de l'ensemble qu'on utilise est d'être bien enchaîné; or E qui est dense sur C est bien enchaîné.

nons ainsi une file de points que je numéroterai $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ (a et b étant respectivement α_0 et α_p). En joignant chaque point au suivant, on obtient une ligne de Jordan. Exprimons les coordonnées d'un point de cette ligne par des fonctions continues d'une variable t, ces fonctions étant assujetties à prendre pour les valeurs suivantes de t : $0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, 1$, les valeurs des abscisses ou ordonnées des points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Considérons les n' points suivants de E; rangeons-les parmi les α dans un ordre quelconque, et traitons chaque intervalle α_i, α_{i+1} comme nous l'avons fait tout à l'heure pour l'intervalle a, b, en changeant ε en $\frac{\varepsilon}{2}$, et en prenant parmi les sommets de la chaîne entre α_i et α_{i+1} ceux des n' points de E que nous avons convenu de placer entre α_i et α_{i+1}. Représentons la ligne de Jordan obtenue entre α_i et α_{i+1} par des fonctions continues, définies de $t = \frac{i}{p}$ à $t = \frac{i+1}{p}$, prenant pour ces valeurs les valeurs des coordonnées de α_i et α_{i+1}, et pour les valeurs $\frac{i}{p} + \frac{1}{pp'}, \ldots, \frac{i}{p} + \frac{p'-1}{pp'}, \frac{i}{p} + \frac{p'}{pp'}$ les valeurs des coordonnées des p' sommets consécutifs de la chaîne.

La réunion de ces $2p$ fonctions continues forme deux fonctions continues définies de 0 à 1.

Continuons ainsi en prenant n'', n''', ..., nouveaux points sur E (on peut faire $n = n' = n'' = 1$) et les valeurs $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \ldots$, pour les longueurs maxima des chaînons.

Désignons par $f_\mu(t), g_\mu(t)$ les fonctions de t obtenues chaque fois, l'indice μ se rapportant au numéro d'ordre de l'opération, et considérons les séries

$$x = f_1(t) + \sum_\mu [f_\mu(t) - f_{\mu-1}(t)],$$

$$y = g_1(t) + \sum_\mu [g_\mu(t) - g_{\mu-1}(t)].$$

1° Ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs de t telles que $\frac{i}{p}, \frac{i}{p} + \frac{k}{pp'}, \cdots$; car pour une telle valeur, les fonctions

f_μ et g_μ gardent la même valeur à partir d'une valeur suffisamment grande de μ. Je dis que ces valeurs de t forment un ensemble dense dans l'intervalle o, 1. En effet, supposer le contraire reviendrait à supposer qu'à partir d'un certain moment l'intervalle $\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p}$ ne serait plus réduit, ce qui est absurde, car la distance α_p, α_{p-1} finit certainement par être supérieure à la longueur $\frac{\varepsilon}{n}$ du chaînon qui est aussi petite qu'on veut.

2° Pour les valeurs de t que nous venons de définir, les fonctions x et y sont égales aux coordonnées de certains points. Ces points sont tous sur C (ou sur E si l'on veut) et parmi eux figurent tous les points de E; c'est dire qu'ils forment un ensemble de points qui est dense sur C.

3° Pour une valeur de t différente de celles-là, on ne sait plus si les séries convergent; mais on peut dire que les valeurs $f_\mu(t)$, $g_\mu(t)$ (t ayant une de ces valeurs bien déterminée *et fixe*) définissent des points dont les points limites sont tous sur C.

Nous avons donc l'énoncé suivant:

On peut, au moyen de fonctions limites de fonctions continues définies pour un ensemble partout dense de valeurs de la variable, représenter les coordonnées d'un ensemble de points denses sur un continu donné quelconque.

4. Je n'ai pas eu besoin de l'hypothèse que le continu est irréductible. Peut-être, pour cette catégorie spéciale d'ensembles, peut-on, en tenant compte de l'ordre des points sur le continu, faire en sorte que les fonctions précédentes soient définies pour toute valeur de t. Il y a là un rapprochement intéressant à faire avec la classification des fonctions de M. Baire. Le continu irréductible ordinaire est au continu irréductible que j'appelle simple ([1]), que j'appelais d'abord complètement fermé (et qui est la ligne de Jordan), ce que l'ensemble des fonctions de la première classe est à l'ensemble des fonctions continues ou de classe zéro.

([1]) *Voir* mon Mémoire des *Acta*.

5. Je termine par un exemple : je choisirai la fonction classique $y = \sin\frac{\pi}{x}$. Considérons les fonctions continues suivantes :

1°	$y_1 = \sin\frac{\pi}{x}$	pour	$\frac{1}{2} < \vert x \vert < 1,$
	$y_1 = 0$	pour	$\vert x \vert < \frac{1}{2};$
2°	$y_2 = \sin\frac{\pi}{x}$	pour	$\frac{1}{3} < \vert x \vert < 1,$
	$y_2 = 0$	pour	$\vert x \vert < \frac{1}{3};$
	......	....	....
	$y_n = \sin\frac{\pi}{x}$	pour	$\frac{1}{n+1} < \vert x \vert < 1,$
	$y_n = 0$	pour	$\vert x \vert < \frac{1}{n+1}.$

La fonction

$$y = y_1 + \sum (y_n - y_{n-1}),$$

limite de fonction continue, existe pour toute valeur de x entre -1 et $+1$. Elle représente (au sens défini dans cette Note) l'ensemble irréductible *non simple* formé par l'adjonction à $y = \sin\frac{\pi}{x}$ de la portion $-1, +1$ de *l'axe* des y. Elle est nulle pour $x = 0$.