BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur la coïncidence principale d'un certain connexe

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 57-78
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__57_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA COÏNCIDENCE PRINCIPALE D'UN CERTAIN CONNEXE;

Par M. G. Fontené.

Dans une Note précédente (¹) j'ai considéré le système différentiel attaché à la coïncidence principale d'un connexe; ce système différentiel, très symétrique, comprend naturellement celui qui est attaché à une équation aux dérivées partielles du premier ordre; les deux questions diffèrent, en effet, par la forme, non par le fond. J'étudie ici la coïncidence principale d'un connexe que je crois intéressant.

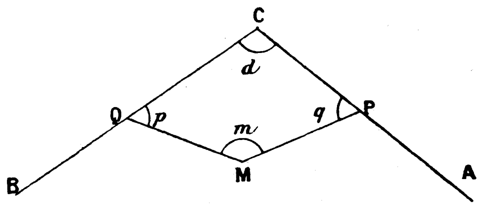
En intégrant l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'on trouvera plus loin, j'ai obtenu une intégrale complète. Je suivrai d'abord la marche inverse, c'est-à-dire que je chercherai l'équation aux dérivées partielles des surfaces auxquelles j'ai été conduit (quadriques dépendant de deux paramètres); j'effectuerai ensuite, dans un cas particulier, l'intégration de cette équation. Pour la première recherche je considérerai d'ailleurs, au lieu d'une équation aux dérivées partielles, la coïncidence principale d'un connexe, comme il est dit plus haut.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVIII, 1910, p. 164.

I.

1. Théorème. — *On donne une quadrique* Σ *et un point* C *de cette quadrique; soit* d *le plan tangent en* C, *soient* CA *et* CB *les génératrices issues de* C (*fig.* 1).

Fig. 1.



Pour chaque point M *de la quadrique* Σ, MP *et* MQ *étant les génératrices issues de* M, *on considère l'une*, S, *des quadriques en nombre simplement infini qui contiennent les quatre droites* CA, CB, MP, MQ; *l'une des quadriques* S *étant fixe à volonté, soit* S_0, *les autres sont déterminées par la condition suivante : une quadrique* S *a en commun avec la quadrique* S_0 *les deux droites* CA, CB *et une autre conique* qui doit passer au point C.

Cela étant, si l'on rapporte la figure à un tétraèdre de référence IJKL *absolument quelconque, les équations ponctuelle et tangentielle de la quadrique* Σ *étant*

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad F(u, v, w, r) = 0,$$

l'équation du plan tangent d *et l'équation du point* C *étant*

$$u_0 x + v_0 y + \ldots = 0, \qquad x_0 u + y_0 v + \ldots = 0,$$

les coordonnées x, y, z, t *d'un point quelconque de l'une quelconque des quadriques* S (*qui sont en nombre doublement infini*) *et les coordonnées* u, v, w, r *du plan tangent en ce point vérifient une relation de la forme*

$$\frac{f(x, y, z, t)}{(u_0 x + \ldots)^2} : \frac{F(u, v, w, r)}{(x_0 u + \ldots)^2} = \text{const.}$$

2. Considérons une quadrique Σ sur laquelle nous prendrons

deux génératrices fixes, de systèmes différents : en prévision du cas où l'on rapporterait la figure à un tétraèdre de référence dont ces deux génératrices seraient deux arêtes, nous désignerons par C le point où elles se coupent, par d leur plan, et elles seront désignées elles-mêmes par CA et CB.

Soit M un point de la quadrique Σ, soient MP et MQ les génératrices qui passent en M, la première rencontrant CA au point P, la seconde rencontrant CB au point Q : soit S une des quadriques, en nombre simplement infini, qui contiennent le contour quadrangulaire MPCQ. (Il revient au même de dire que S est une quadrique contenant les deux génératrices CA et CB de la quadrique Σ, et tangente en M à cette quadrique : l'intersection se compose en effet des deux droites CA, CB et d'une conique qui doit avoir un point double au point M; ou encore, les deux quadriques étant tangentes en C et en M, cette intersection se compose de deux coniques passant par les points C et M, et dont chacune comprend une première droite, CA ou CB. En réalité, les deux quadriques sont quadritangentes.)

Pour chaque point M de la quadrique Σ nous aurons *une* quadrique S par la condition suivante : l'une des quadriques S étant choisie, soit S_0, une autre quadrique S aura en commun avec celle-là les deux droites CA, CB, *et une autre conique qui devra passer au point* C. Il suit de là que les coniques d'intersection des deux quadriques S_0 et S par un plan quelconque passant en C sont osculatrices en C, d'où il résulte en sens inverse que deux quadriques S prises à volonté auront en commun, outre les droites CA et CB, une conique qui passera au point C. (Le plan de la seconde conique d'intersection passe d'ailleurs par la droite d'intersection des plans tangents aux deux points M qui correspondent aux deux quadriques.)

Rapportons la figure à un tétraèdre de référence absolument quelconque, dont CA et CB ne sont nullement deux arêtes, et soit $f = 0$ l'équation ponctuelle de la quadrique Σ; affectons de l'indice 0 les coordonnées du point C et celles du plan tangent d. Les coordonnées du point M et celles du plan tangent en ce point étant affectées de l'indice 1, l'équation de la quadrique S correspondante est de la forme

$$f + k_1(u_0 x + \ldots)(u_1 x + \ldots) = 0;$$

pour un autre point M, affecté de l'indice 2, l'équation de la quadrique S correspondante est de la forme

$$f + k_2(u_0 x + \ldots)(u_2 x + \ldots) = 0;$$

le plan de la seconde conique d'intersection de ces deux quadriques devant passer en C, on doit avoir

$$k_1(u_1 x_0 + \ldots) = k_2(u_2 x_0 + \ldots);$$

on devra donc avoir

$$k_1 = \frac{C}{u_1 x_0 + \ldots},$$

C étant une constante. L'équation de la quadrique S est ainsi

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) + C(u_0 x + \ldots)\frac{(u_1 x + \ldots)}{(u_1 x_0 + \ldots)} = 0;$$

ces quadriques dépendent de deux paramètres, puisqu'elles dépendent du point M.

La condition qui achève de déterminer une quadrique S étant une condition d'osculation, on peut prévoir que le fait corrélatif a également lieu, c'est-à-dire que le sommet du second cône circonscrit à deux quadriques S est dans le plan d (sur la droite joignant les deux points M qui correspondent aux deux quadriques); on le vérifie aisément en rapportant la figure à un tétraèdre de référence CADB, tel que le contour quadrangulaire CADB (comprenant les droites CA, CB) appartienne à la quadrique Σ. L'équation $f = 0$ étant alors

$$xy + zt = 0,$$

l'équation de la quadrique S est

$$xy + zt + Ct\frac{u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 t}{w_1} = 0;$$

l'équation tangentielle est alors

$$uv + wr + C'w\frac{x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 r}{t_1} = 0,$$

avec

$$C + C' + CC' = 0;$$

la forme de cette équation démontre le fait annoncé.

Dès lors, l'équation tangentielle de la quadrique S est, dans le cas général,

$$(2)\qquad F(u, v, w, r) + C'(x_0 u + \ldots)\frac{(x_1 u + \ldots)}{(x_1 u_0 + \ldots)} = 0,$$

$F = 0$ étant l'équation tangentielle de la quadrique Σ.

La constante C' dépend de la forme exacte qu'on donne à la fonction F.

Des équations (1) et (2) on déduit

$$(3)\qquad \frac{f(x, y, z, t)}{F(u, v, w, z)} = \frac{C}{C'}\,\frac{u_0 x + \ldots}{x_0 u + \ldots}\,\frac{u_1 x + \ldots}{x_1 u + \ldots}\,\frac{x_1 u_0 + \ldots}{u_1 x_0 + \ldots},$$

et nous supposerons que, dans cette relation, les coordonnées u, v, w, r sont celles du plan tangent au point dont les coordonnées x, y, z, t figurent dans la relation.

Soit $\varphi = 0$ l'équation ponctuelle (1) de la quadrique S.

Le point C, le point M, le point courant (x, y, z, t) étant des points de cette quadrique, on a

$$\begin{array}{lll} u_0 = A\varphi'_{x_0}, & v_0 = A\varphi'_{y_0}, & \ldots, \\ u_1 = B\varphi'_{x_1}, & v_1 = B\varphi'_{y_1}, & \ldots, \\ u = M\varphi'_{x}, & v = M\varphi'_{y}, & \ldots; \end{array}$$

on a dès lors

$$\frac{u_1 x + \ldots}{x_1 u + \ldots} = \frac{u_0 x + \ldots}{x_0 u + \ldots} \times \frac{B}{A},$$

et

$$\frac{x_1 u_0 + \ldots}{u_1 x_0 + \ldots} = \frac{A}{B};$$

la relation (3) peut donc s'écrire

$$\frac{f(x, y, z, t)}{F(u, v, w, r)} = \frac{C}{C'}\,\frac{(u_0 x + \ldots)^2}{(x_0 u + \ldots)^2},$$

ou encore

$$(4)\qquad \frac{f(x, y, z, t)}{(u_0 x + \ldots)^2} : \frac{F(u, v, w, r)}{(x_0 u + \ldots)^2} = \frac{C}{C'} = \text{const.}$$

Le théorème est démontré.

3. Supposons la relation (4) donnée *a priori*. L'équation $f = 0$ représente une quadrique Σ, dont l'équation tangentielle est $F = 0$; d'ailleurs, $x_0, y_0, \ldots$ sont les coordonnées d'un point C de la surface, point dont l'équation est $x_0 u + \ldots = 0$, et $u_0, v_0, \ldots,$ sont les coordonnées du plan d tangent en ce point, plan dont l'équation est $u_0 x + \ldots = 0$. On doit chercher les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point courant et les coordonnées du plan tangent en ce point vérifient la relation en question ([1]).

Si l'on fait, comme on le peut,

$$t = -1, \qquad w = -1,$$

sans être obligé pour cela de prendre des coordonnées cartésiennes, u et v sont les dérivées partielles de z par rapport à x et y, et l'on peut alors remplacer u et v par p et q; la relation

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

qui a lieu entre les coordonnées d'un point et celles du plan tangent en ce point, devient

$$px + qy = z + r;$$

on pose, en somme,

$$r = px + qy - z, \tag{5}$$

comme dans la transformation de Legendre. L'équation (4) est alors, en conservant les symboles f et F,

$$\frac{f(x, y, z)}{(p_0 x + q_0 y - z - r_0)^2} : \frac{F(p, q, r)}{(x_0 p + y_0 q - z_0 - r)^2} = \text{const.}; \tag{6}$$

c'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On peut employer pour l'équation (4), prise dans toute sa généralité, le langage des équations aux dérivées partielles.

a. La quadrique Σ étant connue, ainsi que le point C, avec le plan tangent d, les quadriques S définies dans le théorème ci-dessus, en partant d'une quadrique convenable S_0 qui dépend

---

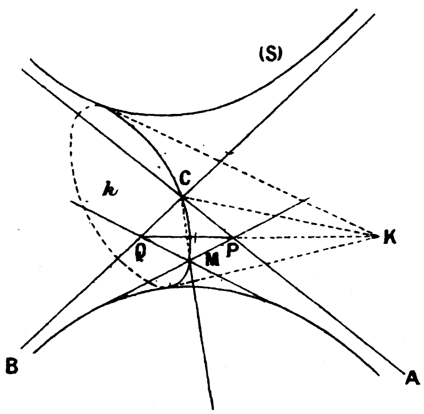
([1]) La relation (4) considérée en elle-même représente un *connexe;* si on lui adjoint, comme ici, la relation $ux + vy + wz + rt = 0$ qui représente le *connexe identique*, l'ensemble des deux relations représente la *coïncidence principale* du connexe; on considère les surfaces pour lesquelles un point M et le plan m tangent en ce point font partie de la coïncidence en question.

de la valeur de la constante $\frac{C}{C'}$, forment une *intégrale complète* de l'équation (4), puisqu'elles dépendent de deux paramètres.

b. Si l'on déplace le point M le long d'une courbe tracée sur la quadrique Σ, la quadrique S varie et l'enveloppe de cette quadrique est une *intégrale générale.*

c. Du fait que deux quadriques S ont en commun, outre les droites CA et CB, une conique qui passe en C, et du fait corrélatif, résultent les conséquences suivantes, obtenues en considérant deux quadriques S infiniment voisines. Tout plan k passant par une droite CM issue de C (*fig.* 2) coupe la quadrique S qui

Fig. 2.



correspond au point M suivant une conique qui est une *caractéristique* du système intégral de l'équation (4); les caractéristiques dépendent ainsi de trois paramètres. Tout point K de la droite PQ ou (d, m) est le sommet d'un cône circonscrit à la quadrique S, et ce cône est une *développable caractéristique.* La trace sur le plan d du plan de la conique (tangente à la conique) et la droite qui joint le point C au sommet du cône correspondant (génératrice du cône) sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites CA et CB; ce fait est un cas particulier d'un fait général qu'on obtiendrait en considérant deux quadriques S quelconques, tandis que l'on considère ici deux quadriques S infiniment voisines; nous aurons d'ailleurs l'occasion de le vérifier, par le calcul, au cours du paragraphe II.

Les coniques caractéristiques sont doublement tangentes à la quadrique Σ, d'une part en un point fixe C, d'autre part en un point variable M; elles sont osculatrices en C à une même quadrique, qui est l'une quelconque des quadriques S. Dans un même plan passant par le point C, M variant, on a des coniques qui sont osculatrices entre elles au point C.

Les cônes caractéristiques sont doublement tangents à la quadrique Σ, d'une part en un point fixe C, d'autre part en un point variable M; etc.

d. La quadrique Σ constitue l'*intégrale singulière* de l'équation (4). *A priori*, toute quadrique S (surface intégrale) est tangente à la surface Σ (intégrale singulière) en un point M; du fait que ces deux surfaces ont en commun les droites CA et CB, il résulte alors, comme on l'a déjà observé, qu'elles se coupent suivant quatre droites; en réalité, la surface intégrale S et la surface Σ qui constitue l'intégrale singulière sont quadruplement tangentes (aux points C, P, Q, M).

4. Les surfaces intégrales de l'équation (4) sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second ordre, les cônes étant circonscrits le long des coniques. Les surfaces qui possèdent cette propriété ont été étudiées dans toute leur généralité par M. E. Blutel dans sa Thèse de Doctorat (1890). On obtient de telles surfaces en considérant l'enveloppe d'une quadrique dépendant d'un paramètre et qui reste circonscrite à une quadrique fixe; plus particulièrement la quadrique variable peut passer par une conique fixe, être une sphère par exemple; pour les surfaces S considérées ici, cette conique est formée de deux droites. Si la quadrique dépend de deux paramètres, elle forme l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles dont les caractéristiques sont des coniques, dont les développables caractéristiques sont des cônes du second ordre, ... Le système des quadriques S considérées ici me semble digne d'attention par la nature de l'équation aux dérivées partielles à laquelle il correspond.

II.

5. Inversement, l'intégration de l'équation (6) doit donner comme intégrale complète la quadrique S du théorème énoncé au

début de ce Mémoire. Cette intégration est facilitée lorsque le point (x_0, y_0, z_0) est le sommet C du tétraèdre de référence, le plan tangent (p_0, q_0, r_0) étant en outre le plan CAB ou d; l'équation (6) est alors

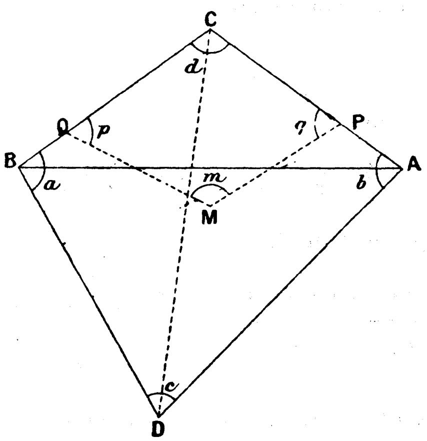
$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fx + 2gy + 2hz + k}{\begin{vmatrix} a & b & f+hp \\ b & c & g+hq \\ f+hp & g+hq & k-2hr \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fx + 2gy + 2hz + k}{aq^2 - 2bqp + cp^2 + \ldots} = \text{const.}$$

Je ferai le calcul en supposant en outre que la quadrique $f = 0$ passe par les arêtes CA et CB du tétraèdre de référence (*fig.* 3).

Fig. 3.



On observera que le point C et le plan d (non opposés) jouent des rôles analogues, de même le plan c et le point D; nous rapprocherons également le point A et le plan b, le point B et le plan a: on a rencontré ci-dessus

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad aq^2 - 2bqp + cp^2;$$

signalons encore les groupements (M, m), (P, q), (Q, p). Les deux contours quadrangulaires ABCD et PCQM sont dénotés à la fois par leurs sommets et par les plans de leurs angles.

L'équation (6) devient

$$(7)\qquad \frac{(axy+bz)+(fx+gy+h)}{(bqp+ar)+(fq+gp+k)}=\frac{1}{m}$$

avec

$$px+qy=z+r,$$

sous la condition

$$(8)\qquad ah+bk=fg.$$

La transformation de Legendre donne une équation du même type, les analogues de z, x, y étant r, p, q; les analogues des coefficients

$$a,\quad b,\quad h,\quad m$$

étant

$$b,\quad a,\quad k,\quad m'=\frac{1}{m},$$

sans permutation des coefficients f et g.

Si l'on pose

$$\frac{k}{h}=l,\qquad \frac{h}{k}=l',$$

la relation (8) donne

$$(9)\qquad h=\frac{fg}{lb+a},\qquad k=\frac{fg}{l'a+b};$$

l'équation (7) prend alors la forme

$$(10)\qquad \frac{axy+bz+fx+gy+\dfrac{fg}{lb+a}}{bqp+ar+fq+gp+\dfrac{fg}{l'a+b}}=\frac{1}{m}.$$

[En généralisant l'équation bien connue $pq=mz$, j'ai considéré précédemment l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{axy+bz+fx+gy}{bqp+ar+fq+gp}=\frac{1}{m},$$

qui est l'équation (7) pour $k=mh$, *mais réduite*, et j'ai proposé l'intégration de cette équation dans les *Nouvelles Annales* (question 2121); ayant cherché ensuite les équations ponctuelle et tangentielle de l'intégrale singulière, j'ai été amené à mettre cette équation sous la forme (10), avec $l=m$; c'est ainsi que je suis arrivé à l'idée générale que je développe dans ce Mémoire.]

6. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$F(z, x, y, p, q) = 0,$$

le système différentiel qui détermine les *suites d'éléments* de l'intégrale, les ensembles formés d'une courbe caractéristique et d'une développable caractéristique, avec correspondance des points de la courbe et des plans tangents à la développable, est, comme on sait,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)},$$

en posant

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \qquad \ldots.$$

Nous écrirons ici, en nous préoccupant d'obtenir une intégrale complète, et en faisant attention au sens de r,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{bq + ax + g} &= \frac{dy}{bp + ay + f} \\ &= \frac{dq}{m(bq + ax + g)} = \frac{dy}{m(bp + ay + f)} = \frac{dt}{Mt}, \\ dz &= p\,dx + q\,dy,\end{aligned}$$

M étant une constante que nous choisirons plus tard [1]. On a d'abord

(11) $$q = m(x - \alpha),$$
(12) $$p = m(y - \beta).$$

Le système différentiel devient

$$\frac{dx}{mb(x - \alpha) + ax + g} = \frac{dy}{mb(y - \beta) + ay + f} = \frac{dt}{Mt},$$
$$\frac{dz}{m} = (y - \beta)\,dx + (x - \alpha)\,dy,$$

---

[1] L'équation aux dérivées partielles étant donnée sous la forme

$$f(x, y, z, p, q, r) = 0,$$

on a, d'une manière générale,

$$\frac{dx}{P + xR} = \frac{dy}{Q + yR} = \ldots = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)};$$

on se rend bien compte ainsi du résultat obtenu.

ce qui conduit à supposer $mb + a \neq 0$; en prenant alors $M = mb + a$, on obtient comme équations des caractéristiques

$$(13) \qquad \frac{x - \alpha + \dfrac{a\alpha + g}{mb + a}}{\gamma} = \frac{y - \beta + \dfrac{a\beta + f}{mb + a}}{\delta} = t,$$

$$(14) \qquad \frac{z}{m} = (x - \alpha)(y - \beta) - \frac{a\alpha\beta + f\alpha + g\beta + h - \dfrac{k}{m}}{mb + a};$$

les numérateurs des rapports (13) se présentent d'abord sous la forme

$$x - \frac{mb\alpha - g}{mb + a}, \quad y - \frac{mb\beta - f}{mb + a},$$

qui sera également utile.

La relation (14) est naturellement une intégrale complète de l'équation proposée; la constante a été déterminée par l'équation elle-même. Les numérateurs des rapports (13) sont les dérivées changées de signes du second membre de l'équation (14) par rapport aux paramètres α et β; la relation (14) étant

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

la relation (13) est donc

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} : \frac{\partial V}{\partial \beta} = \text{const.};$$

or, d'une manière générale, si l'équation $V = 0$ est une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, la seconde équation des caractéristiques est

$$\frac{dV}{d\alpha} : \frac{dV}{d\beta} = \text{const.};$$

on aurait donc pu se contenter de former l'intégrale complète (14), et l'on en aurait déduit la seconde équation des caractéristiques sous la forme même qui a été obtenue, je veux dire sous la forme (13).

La surface (14) contient les droites CA et CB.

7. Les formules (11) et (12) donnent q et p en fonction de x et de y, par suite en fonction de t; on aurait r par la relation (5);

on peut transformer ce résultat. Si l'on pose

$$(\mathrm{R}) \qquad \beta' = -m\alpha, \qquad \alpha' = -m\beta,$$

les formules (11) et (12) prennent la forme

$$x = m'(q - \beta'),$$
$$y = m'(p - \alpha'),$$

et l'on a encore

$$z = px + qy - r = m'p(q - \beta') + m'q(p - \alpha') - r.$$

Les relations (13) et (14) donnent alors

$$(15) \qquad \frac{q - \beta' + \dfrac{b\beta' + g}{m'a + b}}{\gamma} = \frac{p - \alpha' + \dfrac{b\alpha' + f}{m'a + b}}{\delta} = mt,$$

$$(16) \qquad \frac{r}{m'} = (q - \beta')(p - \alpha') - \frac{b\beta'\alpha' + f\beta' + g\alpha' + k - \dfrac{h}{m'}}{m'a + b};$$

on a ainsi les équations des développables caractéristiques.

Les formules (13), (14), (15) et (16), en tenant compte des relations (R), donnent les *suites d'éléments* de l'intégrale lorsqu'on fait varier t.

8. L'intégrale singulière s'obtient en éliminant α et β entre les équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0;$$

la première est l'équation (14), les deux autres sont

$$x - \alpha + \frac{a\alpha + g}{mb + a} = 0, \qquad y - \beta + \frac{a\beta + f}{mb + a} = 0,$$

de sorte que l'intégrale singulière est, au point de vue géométrique, le lieu des points M qui correspondent à la valeur $t = 0$ du paramètre.

L'équation (14) pouvant s'écrire

$$\frac{z}{m} = (x - \alpha)(y - \beta) - \frac{f\alpha + \beta(a\alpha + g) + h - \dfrac{k}{m}}{mb + a},$$

le plan

$$x - \alpha = -\frac{a\alpha + g}{mb + a},$$

qui est le plan p de la figure, coupe la surface (14) suivant la droite CB et suivant une autre droite QM située dans le plan

$$\frac{z}{m} = -\frac{(a\alpha + g)y + f\alpha + h - \frac{k}{m}}{mb + a};$$

cette droite est indépendante de β. Le plan

$$y - \beta = -\frac{a\beta + f}{mb + a},$$

qui est le plan q de la figure, coupe de même la surface (14) suivant la droite CA et suivant une autre droite PM qui ne dépend pas de α. La surface Σ qui représente l'intégrale singulière est dès lors le lieu des droites QM, le lieu des droites PM. Si l'on cherche son équation en la considérant comme le lieu des droites QM définies par l'avant-dernière équation et par la précédente, on a d'abord (en éliminant $a\alpha + g$)

$$(mb + a)z - m(mb + a)(x - \alpha)y + mf\alpha + mh - k = 0$$

ou

$$(mb + a)(z - mxy) + m\alpha[(mb + a)y + f] + mh - k = 0,$$

et comme on peut écrire

$$x = \frac{mb\alpha - g}{mb + a} \qquad \text{ou} \qquad (mb + a)x + g = mb\alpha,$$

l'élimination de α donne

$$\begin{aligned} &b(mb + a)(z - mxy) \\ &\quad + [(mb + a)x + g][(mb + a)y + f] + mbh - bk = 0, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (8) et en divisant par $mb + a$,

$$axy + bz + fx + gy + h = 0,$$

m disparaissant. On obtient donc l'intégrale singulière en égalant à zéro le numérateur de l'équation (7).

Cette équation est celle d'une quadrique Σ passant, comme on l'a supposé au début, par les arêtes CA et CB du tétraèdre de référence. Cette même surface, considérée au point de vue tangentiel, représente l'intégrale singulière de l'équation aux dérivées partielles fournie par la transformation de Legendre; elle est l'enveloppe des plans tangents aux surfaces (14) qui correspondent à la valeur $t = 0$ du paramètre dans les formules (15) et (16), plans m de la figure ; son équation tangentielle est

$$bqp + ar + fq + gp + k = 0.$$

9. La quadrique S dont les équations ponctuelle et tangentielle sont les équations (14) et (16), et qui représente une intégrale complète particulièrement simple, peut être définie géométriquement en partant de la quadrique Σ qui représente l'intégrale singulière. Si l'on prend sur la quadrique Σ un point M, et si MP et MQ sont les deux génératrices issues de M, parmi les quadriques en nombre simplement infini qui contiennent le contour quadrangulaire CPMQ, il s'en trouve une qui est une intégrale complète S ; elle est caractérisée par le fait suivant : deux quadriques S, correspondant aux valeurs α_1 et β_1, α_2 et β_2 des paramètres α et β, ont en commun les deux droites CA, CB, et se coupent encore suivant une conique *qui passe au point* C ; en effet, si l'on retranche membre à membre les équations (14) de ces deux quadriques, on obtient une équation de la forme

$$Ax + By + C = 0,$$

sans terme en z. On retrouve donc bien les quadriques S du théorème énoncé en commençant.

Relativement aux faits signalés au n° 3 (a, b, c, d), nous pouvons montrer ici que la trace sur le plan d du plan k d'une conique caractéristique et la droite qui joint le point C au sommet K du cône correspondant sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites CA et CB ; la première est en effet dans le plan

$$\frac{x}{\gamma} = \frac{y}{\delta},$$

et la seconde est dans le plan

$$\delta x + \gamma y = 0.$$

Observons encore que l'on peut choisir comme quadrique S_0, à laquelle les caractéristiques sont osculatrices, celle qui correspond aux valeurs $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Elles sont d'ailleurs osculatrices à la quadrique qui a pour équation

$$xy = \frac{z}{m}.$$

10. Pour établir les formules (13) et (14), on a dû supposer $mb + a \neq 0$; examinons l'hypothèse

$$mb + a = 0, \qquad m = \frac{-a}{b}.$$

L'équation (7) devient

$$a(axy + bz + fx + gy + h) + b(bqp + ar + fq + gp + k) = 0,$$

ou, en remplaçant $z + r$ par $px + qy$, et $ah + bk$ par fg,

$$(bq + ax + g)(bp + ay + f) = 0;$$

elle se décompose.

Mais voici un autre point de vue. L'équation (7) étant écrite dans le cas général sous la forme

$$m(axy + bz + fx + gy) - (bqp + ar + fq + gp) + C = 0,$$

où C est une constante, si l'on cherche à déterminer h et k de manière à obtenir la forme (7), on doit avoir

$$mh - k = C,$$
$$ah + bk = fg,$$

et l'on obtient pour h et k des valeurs finies si $mb + a$ n'est pas nul. Lorsqu'on suppose $mb + a = 0$, on doit garder la relation sous la forme ci-dessus, avec C quelconque; elle devient naturellement

(17) $$(bq + ax + g)(bp + ay + f) = C'.$$

On a encore les formules (11) et (12),

$$q = m(x - \alpha),$$
$$p = m(y - \beta),$$

d'où le système différentiel

$$\frac{dx}{a\alpha + g} = \frac{dy}{a\beta + f}\left(= \frac{dt}{a}\right),$$
$$\frac{dz}{m} = (y - \beta)\,dx + (x - \alpha)\,dy;$$

cela donne (sans introduire ici la variable auxiliaire t)

$$\frac{x}{a\alpha+g}-\frac{y}{a\beta+f}=\lambda, \tag{18}$$

$$z=m(x-\alpha)(y-\beta)+\mu, \tag{19}$$

avec $m=\frac{-a}{b}$; l'équation elle-même fournit entre α et β la relation

$$(a\alpha+g)(a\beta+f)=C'; \tag{20}$$

on a encore une intégrale complète, avec deux paramètres α et μ, des caractéristiques avec trois paramètres α, μ, λ. Les quadriques qui représentent l'intégrale complète contiennent les droites CA et CB, et la seconde conique d'intersection de deux quelconques d'entre elles passe au point C; elles ont encore une autre propriété, exprimée par la relation qui lie α et β. L'une de ces quadriques étant choisie, de sorte que α et β sont déterminés, les plans k des caractéristiques (qui passent tous au point C) sont les plans qui passent par la droite

$$t=0, \qquad \frac{x}{a\alpha+g}=\frac{y}{a\beta+f},$$

située dans le plan CAB; le point M du cas général est ici au point C. En même temps, les sommets K des cônes caractéristiques (qui sont tous dans le plan d) sont situés sur la droite qui est la conjuguée harmonique de la précédente par rapport à CA et CB; le plan m est ici le plan d.

III.

11. L'équation (7) est un exemple d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre donnant lieu, dans des cas particuliers, aux diverses singularités qui se présentent dans les relations mutuelles des caractéristiques et des développables caractéristiques.

Lorsque a et b sont différentes de zéro, les caractéristiques et les développables caractéristiques dépendent les unes et les autres de trois paramètres, et se correspondent une à une.

Si l'on suppose $b=0$, l'équation (7) est linéaire et il n'en est plus ainsi. Ce fait, qui se présenterait de lui-même en appliquant le traitement ordinaire des équations linéaires, se retrouve aisément sur les relations (13) et (14), que l'on peut remplacer par les suivantes en modifiant (14) d'après (13) :

$$(21) \qquad \frac{x+\dfrac{g}{a}}{\gamma} = \frac{y+\dfrac{f}{a}}{\delta} = \frac{xy-\dfrac{z}{m}-\dfrac{mh-k}{ma}}{\delta\alpha+\gamma\beta} = t;$$

les deux constantes α et β ne figurant ici que par la combinaison $\delta\alpha+\gamma\beta$, les coniques caractéristiques dépendent seulement de deux paramètres.

Examinons les choses de plus près. L'équation (7) devient, en observant que la relation (8) donne $ah=fg$,

$$\frac{1}{a}\,\frac{(ax+g)(ay+f)}{fq+gp+k+ar} = \frac{1}{m};$$

en égalant le dénominateur à o, on a l'équation d'un point M dont les coordonnées x, y, z, t sont

$$\frac{-g}{a}, \quad \frac{-f}{a}, \quad \frac{k}{a}, \quad -1;$$

en égalant le numérateur à o, on a les équations des deux plans p et q qui se coupent suivant CM. Si l'on prend le point de vue du paragraphe I, au lieu d'une quadrique Σ, il faut donc se donner deux droites fixes CA, CB *et un point fixe* M. Pour obtenir les quadriques S, on mène des couples de droites MP, MQ dans les plans MCA, MCB, et l'on opère comme dans le cas général. Chaque caractéristique est obtenue par une infinité de quadriques S; les plans k de ces caractéristiques passent par la droite fixe CM; elles rencontrent cette droite fixe en deux points fixes, à savoir le point C où elles sont tangentes au plan d, et le point M; elles sont osculatrices en C à une même quadrique qui est l'une quelconque des quadriques S. Les formules (21) les définissent analytiquement; le numérateur du troisième rapport peut s'écrire, en remplaçant h par $\dfrac{fg}{a}$,

$$\left(xy-\frac{fg}{a^2}\right)-\frac{z-\dfrac{k}{a}}{m};$$

pour $t=$ o, on obtient le point M. On peut prendre comme quadrique S_0 la quadrique

$$\left(xy - \frac{fg}{a^2}\right) - \frac{z - \frac{k}{a}}{m} = 0\,;$$

cela revient à faire $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dans l'équation (14); plus simplement, les coniques caractéristiques sont osculatrices à la quadrique qui a pour équation

$$xy = \frac{z}{m}.$$

En même temps, chacune de ces caractéristiques est associée à une infinité de développables caractéristiques qui correspondent aux quadriques S passant par la caractéristique. Si l'on écrit, avec β' et α',

$$\frac{x + \frac{g}{a}}{\gamma} = \frac{y + \frac{f}{a}}{\delta} = \frac{m\left(xy - \frac{fg}{a^2}\right) - \left(z - \frac{k}{a}\right)}{-(\delta\beta' + \gamma\alpha')} = t,$$

on voit que, la caractéristique étant

$$\frac{x + \frac{g}{a}}{\gamma} = \frac{y + \frac{f}{a}}{\delta} = \frac{m\left(xy - \frac{fg}{a^2}\right) - \ldots}{\theta} = t,$$

les développables caractéristiques correspondantes sont fournies par la relation

$$\delta\beta' + \gamma\alpha' + \theta = 0, \tag{R'}$$

qui lie β' et α'.

12. Si l'on suppose $a = 0$, l'équation aux dérivées partielles donnée par la transformation de Legendre est linéaire, et l'on a des résultats corrélatifs des précédents. Les formules (15) et (16) donnent, en modifiant (16) d'après (15),

$$\frac{q + \frac{g}{b}}{\gamma} = \frac{p + \frac{f}{b}}{\delta} = \frac{qp - \frac{r}{m'} - \frac{m'k - h}{m'b}}{\delta\beta' + \gamma\alpha'} = mt, \tag{22}$$

de sorte que les développables caractéristiques dépendent seulement de deux paramètres.

L'équation (7) devient

$$\frac{1}{b}\,\frac{(bq + g)(bp + f)}{fx + gy + h + bz} = \frac{1}{m'};$$

en égalant le dénominateur à o, on a l'équation d'un plan m; en égalant le numérateur à o, on a les équations des deux points Q et P. Si l'on prend le point de vue du paragraphe I, au lieu d'une quadrique Σ, il faut se donner deux droites fixes CA, CB (mieux : d, b et d, a) *et un plan fixe* m. Pour obtenir les quadriques S, on mène dans le plan m des couples de droites passant par les points fixes P et Q, et l'on opère comme dans le cas général. Chaque cône caractéristique est obtenu par une infinité de quadriques S; les sommets K de ces cônes sont sur la droite fixe PQ (mieux : d, m); ces cônes sont tangents à deux plans fixes passant par PQ, à savoir le plan d qu'ils touchent au point C, et le plan m; ....

En même temps, chacun de ces cônes est associé à une infinité de coniques caractéristiques, qui correspondent aux quadriques S inscrites au cône. Si l'on écrit, avec α et β, et en remplaçant k par $\frac{fg}{b}$ pour avoir une forme plus élégante,

$$\frac{q+\frac{g}{b}}{\gamma}=\frac{p+\frac{f}{b}}{\delta}=\frac{m'\left(pq-\frac{fg}{b^2}\right)-\left(r-\frac{h}{b}\right)}{-(\delta\alpha+\gamma\beta)}=mt.$$

on voit que, la développable étant

$$\frac{q+\frac{g}{b}}{\gamma}=\frac{p+\frac{f}{b}}{\delta}=\frac{m'\left(pq-\frac{fg}{b^2}\right)-\dots}{\theta'}=mt,$$

les coniques caractéristiques correspondantes sont fournies par la relation

$$\delta\alpha+\gamma\beta+\theta'=0$$

qui lie α et β.

13. Reste le cas très particulier où a et b sont nuls tous deux. Ici, comme au n° 10, on doit considérer l'équation

$$f(q-mx)+g(p-my)=\mathrm{C},$$

m étant d'ailleurs quelconque; nous prendrons, pour simplifier les calculs,

$$f(q-mx)+g(p-my)=0. \tag{23}$$

L'équation étant linéaire, et restant linéaire quand on prend comme variables p et q avec $x=\frac{\partial r}{\partial p}$, $y=\frac{\partial r}{\partial q}$, on pourrait employer le système différentiel

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{dp}{-X}=\frac{dq}{-Y}=\frac{dr}{-Z}.$$

Nous conserverons le système différentiel déjà employé, qui est ici

$$\frac{dx}{g}=\frac{dy}{f}=\frac{dq}{mg}=\frac{dp}{mf},$$
$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

et nous l'étudierons directement. On a d'abord

$$q=m(x-\alpha),\qquad p=m(y-\beta),$$

avec la condition

$$f\alpha+g\beta=0,$$

la constante C étant nulle. On a ensuite

$$(24)\qquad fx-gy=\lambda,\qquad z=mxy+\mu,$$

$\beta x+\alpha y$ étant proportionnel à $fx-gy$, donc constant. On en déduit

$$(25)\qquad fq-gp=\lambda',\qquad r=\frac{1}{m}qp+\mu',$$

avec

$$m\lambda-\lambda'=m(f\alpha-g\beta),$$
$$\mu+\mu'=-m\alpha\beta,$$

et la condition $f\alpha+g\beta=0$ donne la relation

$$(26)\qquad (m\lambda-\lambda')^2-4mfg(\mu-\mu')=0.$$

Les coniques caractéristiques dépendent de deux paramètres λ et μ, les cônes caractéristiques dépendent de deux paramètres λ' et μ'; pour une conique et un cône qui se correspondent, on a la relation (26).

En remplaçant $\beta x+\alpha y$ par une constante dans l'équation de la quadrique S, on a obtenu (24) une quadrique unique pour chaque caractéristique; on a de même (25) une quadrique unique pour chaque cône; l'une de ces quadriques ne détermine pas l'autre.

Les plans k des coniques caractéristiques passent par une droite fixe issue du point C dans le plan d; les sommets K des cônes caractéristiques sont sur une droite fixe qui est la conjuguée harmonique de la précédente par rapport à CA et CB.

Une conique et un cône étant choisis, on peut calculer α et β par les équations

$$f\alpha + g\beta = 0,$$
$$f\alpha - g\beta = \lambda - m'\lambda',$$

et avoir p et q d'après x et y. Si l'on a pris $\mu' = -\mu$ (auquel cas les deux quadriques ci-dessus sont identiques), on a

$$\lambda' = m\lambda, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad q = mx, \qquad p = my.$$

IV.

14. Si l'on excepte le cas où a et b sont nuls tous deux, l'équation (7) se ramène aisément à la forme canonique

$$\frac{axy + bz}{bqp + ar} = \frac{1}{m}. \tag{27}$$

Lorsque a et b sont différents de zéro, le sommet D du tétraèdre est alors un point de la surface Σ, le plan DAB ou c est le plan tangent en D; si a est nul, avec $b \neq 0$, ce qui donne l'équation

$$qp = mz, \tag{28}$$

le plan c est le plan m dont on a parlé au n° **12**, le point D est un point de ce plan; si b est nul, avec $a \neq 0$, ce qui donne l'équation

$$xy = m'r, \tag{29}$$

le point D est le point M dont on a parlé au n° **11**, le plan c est un plan passant par ce point.

Par exemple, tant que b n'est pas nul, on peut poser

$$bz + fx + gy + h = bZ,$$

ce qui revient à garder les plans de référence a, b, à prendre comme nouveau point D le second point où la droite (a, b) rencontre la surface Σ, ...; de même, tant que a n'est pas nul, on peut garder les sommets de référence A, B, prendre comme nouveau plan c le second plan tangent à la surface Σ mené par la droite AB, ...

Mais, lorsque a et b sont nuls, il n'en est plus de même, et c'est l'une des raisons pour lesquelles on ne s'est pas contenté de considérer la forme canonique (27).