BARRÉ

Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 61-93

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__61_0>

ÉTUDE SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE HÉLICE DE FORME VARIABLE;

PAR M. E. BARRÉ.

I. — FORMULES GÉNÉRALES DÉFINISSANT LE MOUVEMENT D'UNE HÉLICE VARIABLE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE ET LES ÉLÉMENTS QU'ELLE ENGENDRE.

1. *Équations définissant la courbe mobile.* — Désignons par *plan de base d'une hélice* un plan quelconque parallèle à ses normales principales et par *direction d'axe* la direction perpendiculaire à ce plan. Cela posé, soient s l'arc indéfini de la projection de l'hélice sur son plan de base et t la variable dont dépend le mouvement de la courbe.

Les équations de l'hélice rapportée à trois axes rectangulaires, dont deux (Ox et Oy) dans le plan de base, sont, avec un choix convenable de l'origine des arcs s,

$$x = f(s, t), \qquad y = \varphi(s, t), \qquad z = s\psi(t), \tag{1}$$

avec la condition

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Ces équations s'écrivent plus avantageusement sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos\chi(s, t)\, ds + \mathrm{F}(t), \\ y &= \int_0^s \sin\chi(s, t)\, ds + \Phi(t), \\ z &= s\psi(t). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'introduction de la fonction χ a permis de se débarrasser de l'équation de condition (2). Les fonctions F et Φ sont d'ailleurs des fonctions arbitraires qui n'interviennent que dans la position de la courbe par rapport aux axes et nullement dans sa forme.

Dans le cas d'une hélice circulaire, χ n'est autre que l'argument angulaire compté à partir d'une certaine origine. C'est donc une fonction linéaire de s. On vérifie sans peine que l'inverse est vrai, si bien que la formule

$$(\alpha) \qquad \chi(s, t) \equiv s\xi(t) + \zeta(t),$$

où $\xi(t)$ et $\zeta(t)$ désignent des fonctions quelconques de t, caractérise les hélices circulaires.

2. Par un choix convenable de l'origine dans le plan de base, on peut toujours faire que F et Φ soient nuls. Les formules (3) prennent alors la forme plus simple suivante, que nous utiliserons dans toute cette étude :

$$(4) \qquad x = \int_0^s \cos\chi(s, t)\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\chi(s, t)\, ds, \qquad z = s\psi(t).$$

3. *Pas angulaire de l'hélice.* — Nous désignerons sous ce nom la fonction ψ, dont la signification géométrique est évidente. On pourrait prendre ψ comme variable indépendante jouant le rôle de t. Toutefois, cette simplification doit être évitée dans les recherches générales, car elle a l'inconvénient d'exclure la considération des hélices mobiles à pas constant.

Cylindre principal. — Nous donnerons ce nom au cylindre ayant pour base l'hélice considérée et dont les génératrices sont parallèles à sa direction d'axe. Avec le choix d'axes de coordonnées mobiles adopté dans cette étude, ce cylindre n'est autre que le cylindre projetant l'hélice sur le plan xOy.

4. *Hélices indéformables.* — Une hélice mobile indéformable sera caractérisée par ce fait qu'il sera possible de la représenter par des équations dans lesquelles χ dépendra de la seule variable s et ψ sera une constante. Il suffit, pour cela, de choisir un système d'axes liés invariablement à la courbe.

5. *Formules générales du déplacement d'un point lié aux axes mobiles auxquels est rapportée l'hélice variable.* — Les projections des déplacements absolus d'un point de coordonnées

x, y, z par rapport aux axes mobiles sont, sur ces mêmes axes,

$$(5) \qquad \begin{cases} \delta x = dx + (u + qz - ry)\,dt, \\ \delta y = dy + (v + rx - pz)\,dt, \\ \delta z = dz + (w + py - qx)\,dt. \end{cases}$$

Les formules qui donnent les projections sur ces mêmes axes du déplacement absolu du point directeur d'une direction dont les cosinus directeurs, par rapport aux axes mobiles, sont α, β et γ, sont les suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} \delta\alpha = d\alpha + (q\gamma - r\beta)\,dt, \\ \delta\beta = d\beta + (r\alpha - p\gamma)\,dt, \\ \delta\gamma = d\gamma + (p\beta - q\alpha)\,dt. \end{cases}$$

Laissons de côté le cas où le cône directeur des directions d'axes est isotrope. Alors, la caractéristique du plan xOy ne sera pas isotrope, sauf peut-être en des positions isolées. Cela étant, nous pourrons choisir pour axe Oy une parallèle à cette droite. On aura alors, comme on sait,

$$q(t) = 0,$$

ce qui peut donner des simplifications utiles.

Si, dans une question, on est amené à écrire les équations fonctionnelles

$$p(t) = 0, \qquad q(t) = 0,$$

la direction du plan de base est fixe et celle de sa caractéristique indéterminée. On pourra toujours supposer

$$r(t) = 0,$$

ce qui revient à supposer les axes parallèles à trois directions rectangulaires fixes.

Si l'on est conduit à écrire, pour une position isolée de la génératrice correspondant à une valeur t_0 du paramètre t, les conditions

$$p(t_0) = 0, \qquad q(t_0) = 0,$$

l'interprétation de ces dernières est immédiate. Le plan de base est stationnaire. On aurait, d'ailleurs, aussi

$$p(t_0) = 0, \qquad q(t_0) = 0,$$

pour cette position, avec des axes rectangulaires Ox et Oy différents de ceux choisis et d'ailleurs quelconques dans le plan de base.

Enfin, on peut alors supposer

$$r(t_0) = 0,$$

condition qui permet parfois de grandes simplifications. Ces dernières propriétés sont loin d'être évidentes, mais nous les considérons comme acquises, n'ayant pas l'intention de reprendre ici la théorie de la cinématique générale des figures.

Des développements qui précèdent, on peut tirer sans aucune difficulté le Tableau suivant :

TABLEAU I.

I. *Equations de l'hélice génératrice.*

$$x = \int_0^s \cos\chi(s, t)\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\chi(s, t)\, ds, \qquad z = s\,\psi(t).$$

L'hélice sera circulaire dans le cas où l'on aura

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\chi = s\,\xi(t) + \eta(t)$$

et inversement.

II. *Éléments du déplacement sur la surface engendrée par l'hélice.* — On a, dans ce cas,

$$dx = \cos\chi\, ds + \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s \cos\chi(s, t)\, ds\right] dt, \qquad dy = \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta x &= \cos\chi(s, t)\, ds + \mathrm{L}\, dt, \\ \delta y &= \sin\chi(s, t)\, ds + \mathrm{M}\, dt, \\ \delta z &= \psi\, ds \qquad\qquad\quad + \mathrm{N}\, dt, \end{aligned}$$

avec les relations

$$\mathrm{L} = u + qz - ry - \int^s \frac{\partial\chi}{\partial t} \sin\chi\, ds$$

ou

$$L = u + qs\,\psi(t) \quad - \int_0^s \sin\chi\left(r + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) ds;$$

$$M = v + rx - pz + \int_0^s \frac{\partial\chi}{\partial t}\cos\chi\, ds$$

ou

$$M = v - ps\psi \quad + \int_0^s \cos\chi\left(r + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) ds;$$

$$N = w + py \quad qx + \psi' s$$

ou

$$N = w + s\psi' \quad + \int_0^s (p\sin\chi - q\cos\chi)\, ds,$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule qui donne l'élément linéaire.

III. *Élément linéaire.*

$$d\sigma^2 = E\, dt^2 + 2F\, dt\, ds + G\, ds^2,$$

$$E = L^2 + M^2 + N^2, \qquad F = L\cos\chi + M\sin\chi + N\psi, \qquad G = 1 + \psi^2.$$

5. *Normale et plan tangent.* — On obtient aisément les coefficients directeurs A, B, C de la normale à la surface engendrée par l'hélice mobile en écrivant que la direction correspondante est perpendiculaire à deux déplacements pris sur la surface, par exemple celui correspondant à $dt = 0$ et celui correspondant à $ds = 0$. On obtient ainsi les deux équations du problème

$$A\cos\chi + B\sin\chi + C\psi = 0,$$
$$AL \quad + BM \quad + CN = 0,$$

ce qui donne un système de coefficients directeurs, que nous adopterons dans tout ce qui suit :

$$A = \quad N\sin\chi - M\psi,$$
$$B = - N\cos\chi + L\psi,$$
$$C = \quad M\cos\chi - L\sin\chi.$$

On en déduit sans peine les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à la surface.

Angle de la normale à la surface avec la normale princi-

pale à l'hélice génératrice. — Les paramètres directeurs de la normale principale à l'hélice ont pour expressions (les différentiations étant, bien entendu, prises suivant l'hélice), dS désignant l'arc de l'hélice,

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{dx}{dS}\right) = \frac{1}{\sqrt{\psi^2+1}}\frac{d}{ds}\left[\frac{dx}{\sqrt{\psi^2+1}\,ds}\right] = \frac{1}{\psi^2+1}\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\sin\chi}{\psi^2+1}\frac{\partial\chi}{\partial s},$$

et, de même, les deux autres sont

$$\frac{1}{\psi^2+1}\cos\chi\frac{\partial\chi}{\partial s}$$

et zéro.

Dès lors, les cosinus directeurs de la normale principale à l'hélice sont

$$-\sin\chi,\quad \cos\chi,\quad 0,$$

valeurs qu'on pouvait d'ailleurs écrire immédiatement en remarquant que la normale principale d'une hélice est la normale au cylindre principal correspondant et que χ n'est autre que l'angle de la tangente de la section droite de ce cylindre avec l'axe des x. Soit ϖ l'angle de la normale principale à l'hélice avec la normale à la surface. De ce qui précède, on tire sans peine

$$\cos\varpi = \frac{B\cos\chi - A\sin\chi}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

formule qu'il est facile de transformer pour obtenir celles qui sont indiquées au Tableau II.

On obtient toutes les formules de ce Tableau par des calculs très simples et qu'il me paraît inutile de reproduire, en partant des formules fondamentales établies dans ce paragraphe.

Tableau II.

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned} A &= N\sin\chi - M\psi,\\ B &= -N\cos\chi + L\psi,\\ C &= M\cos\chi - L\sin\chi,\\ H &= (A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left\{[N-\psi(L\cos\chi + M\sin\chi)]^2 + (\psi^2+1)(L\sin\chi - M\cos\chi)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Cosinus directeurs :

$$\text{(II)} \qquad \alpha = \frac{A}{H}, \qquad \beta = \frac{B}{H}, \qquad \gamma = \frac{C}{H}.$$

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial s} ds + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + q C - r B \right) dt, \\ \delta B &= \frac{\partial B}{\partial s} ds + \left(\frac{\partial B}{\partial t} + r A - p C \right) dt, \\ \delta C &= \frac{\partial C}{\partial s} ds + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + p B - q A \right) dt. \end{aligned} \right.$$

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial s} &= \cos\chi \left[N \frac{\partial \chi}{\partial s} - \psi \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] + \sin\chi (p \sin\chi - q \cos\chi + \psi') + p\psi^2, \\ \frac{\partial B}{\partial s} &= \sin\chi \left[N \frac{\partial \chi}{\partial s} - \psi \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] - \cos\chi (p \sin\chi - q \cos\chi + \psi') + q\psi^2, \\ \frac{\partial C}{\partial s} &= r + \frac{\partial \chi}{\partial t} - \psi (p \cos\chi + q \sin\chi) - \frac{\partial \chi}{\partial s} (L \cos\chi + M \sin\chi). \end{aligned} \right.$$

$$\text{(V)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} = {} & N \cos\chi \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ & - M\psi' + \sin\chi \left\{ w' + s\psi'' + \int_0^s \left[\left(p' + q \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \sin\chi - \left(q' - p \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \cos\chi \right] ds \right\} \\ & - \psi \left\{ v' - s(\psi' p + p\psi') + \int_0^s \left[\left(r' + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \cos\chi - \sin\chi \frac{\partial \chi}{\partial t} \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] ds \right\}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = {} & N \sin\chi \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ & + L\psi' - \cos\chi \left\{ w' + s\psi'' + \int_0^s \left[\left(p' + q \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \sin\chi - \left(q' - p \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \cos\chi \right] ds \right\} \\ & + \psi \left\{ u' + s(\psi' q + q'\psi) - \int_0^s \left[\left(r' + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \sin\chi + \cos\chi \frac{\partial \chi}{\partial t} \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] ds \right\}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} = {} & - \frac{\partial \chi}{\partial t} [M \sin\chi + L \cos\chi] \\ & + \cos\chi \left\{ v' - p's\psi - p\psi' s + \int_0^s \left[\left(r' + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \cos\chi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \sin\chi \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] ds \right\} \\ & - \sin\chi \left\{ u' + (q'\psi + q\psi')s - \int_0^s \left[\left(r' + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \sin\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \cos\chi \left(r + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] ds \right\}. \end{aligned} \right.$$

L'angle ϖ de la normale avec la normale principale à l'hélice

génératrice est donné par l'une des formules

$$\text{(VI)}\quad \cos\varpi = \frac{B\cos\chi - A\sin\chi}{H}$$
$$= \frac{\psi(L\cos\chi + M\sin\chi) - N}{\left\{[N - \psi(L\cos\chi + M\sin\chi)]^2 + (\psi^2+1)(L\sin\chi - M\cos\chi)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\tan g\,\varpi = (\psi^2+1)^{\frac{1}{2}} \frac{L\sin\chi - M\cos\chi}{\psi(L\cos\chi + M\sin\chi) - N}.$$

6. *Équations des lignes remarquables de la surface.* — Les formules précédentes permettront d'obtenir immédiatement l'équation différentielle des lignes asymptotiques ou celle des lignes de courbure en portant les valeurs qu'elles donnent pour δx, δy, δz, δA, δB, δC, dans les équations bien connues

$$\text{(I)}\qquad \delta A\,\delta x + \delta B\,\delta y + \delta C\,\delta z = 0$$

pour les asymptotiques, et

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta A & \delta B & \delta C \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

pour les lignes de courbure.

Pour obtenir l'équation des géodésiques sous forme générale, il faudrait écrire l'équation

$$\text{(III)}\qquad \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta^2 x & \delta^2 y & \delta^2 z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

après y avoir remplacé les δ par les valeurs trouvées ci-dessus et les δ^2 par les valeurs qu'on obtiendrait en introduisant dans les formules générales du déplacement δx, δy et δz, au lieu de x, y et z. Ces expressions sont très compliquées. Comme nous n'aurons pas à nous en servir dans ce qui suit, nous nous dispenserons de les développer. Il en est de même des formules qui donnent la torsion et la courbure géodésiques.

Remarques. — 1. Les formules précédentes se simplifient beaucoup lorsque les hélices mobiles conservent même direction d'axe.

Nous avons vu que, dans ce cas, on peut, en effet, supposer nulles les rotations p, q et r.

2. Il est à peine besoin de faire observer qu'une surface quelconque peut toujours être considérée comme engendrée par une hélice mobile, et cela d'une infinité de façons.

II. — Étude de quelques problèmes généraux. Recherche des surfaces dont une famille d'asymptotiques ou de géodésiques est formée par des hélices.

Problème I. — *Déterminer les surfaces dont une famille d'asymptotiques est formée d'hélices de même direction d'axe.* — Pour que l'hélice mobile soit constamment une asymptotique de la surface qu'elle engendre, il faut et il suffit que la condition

$$\cos\varpi = 0$$

soit réalisée pour tout point de chaque position de la courbe mobile, ce qui revient (Tableau II, formule VI) à exprimer que l'équation

$$\psi(L\cos\chi + M\sin\chi) - N = 0 \tag{1}$$

est vérifiée identiquement.

Différentions-la deux fois par rapport à s, en tenant compte, bien entendu, de ce qu'on a

$$p = q = r = 0,$$

et en remplaçant chaque fois $\frac{\partial L}{\partial s}$, $\frac{\partial M}{\partial s}$ par leurs valeurs, lesquelles ne contiennent pas de signe d'intégration (*voir* Tableau I les expressions de L et M).

Nous trouvons ainsi les deux relations (¹)

$$\psi\frac{\partial\chi}{\partial s}(M\cos\chi - L\sin\chi) = \psi', \tag{2}$$

$$\psi\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}(M\cos\chi - L\sin\chi) - \left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2(L\cos\chi + M\sin\chi) + \frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial s}\right] = 0, \tag{3}$$

qui doivent également être vérifiées identiquement.

(¹) ψ' représente la dérivée $\frac{d\psi}{dt}$. De même, dans ce travail, nous réservons les lettres accentuées aux dérivés des fonctions figurant dans la question.

Laissons de côté la solution $\psi = 0$ qui conduirait à des surfaces réglées dont les génératrices rectilignes seraient les hélices en question ; nous tirons alors de l'équation (3) la suivante :

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}(\mathrm{M}\cos\chi - \mathrm{L}\sin\chi) - \left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2(\mathrm{L}\cos\chi + \mathrm{M}\sin\chi) + \frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial s} = 0.$$

En remplaçant dans cette dernière relation les binomes

$$\mathrm{M}\cos\chi - \mathrm{L}\sin\chi, \qquad \mathrm{L}\sin\chi + \mathrm{M}\cos\chi$$

par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2) et N par $\varpi + \psi' s$, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2\chi}{\partial s^2}}{\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2} - \left(\frac{\varpi}{\psi'} + s\right)\frac{\partial\chi}{\partial s} + \frac{\psi}{\psi'}\frac{\partial\chi}{\partial t} = 0$$

qui, ψ et ϖ étant données, définit la fonction χ. La solution de ce problème dépend donc d'une équation à caractéristiques confondues.

Les calculs qui conduisent à l'équation (5) supposent $\psi' \neq 0$.

Nous verrons que dans le problème actuel il n'y a aucun intérêt à supposer ψ constant. Cette remarque permettrait de prendre la fonction $\psi(t)$ pour variable indépendante, ce qui simplifierait un peu l'écriture.

Je me propose de montrer maintenant qu'à une hélice définie par une solution de l'équation (5) correspond, ϖ étant donné ainsi que ψ, un mouvement et un seul, par lequel elle engendre une surface satisfaisant à la question.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ correspondantes. Or, u et v sont données sans ambiguïté en fonction de L et M par les formules

$$(6)\qquad u = \mathrm{L} + \int_0^s \frac{\partial\chi}{\partial t}\sin\chi\, ds, \qquad v = \mathrm{M} - \int_0^s \frac{\partial\chi}{\partial t}\cos\chi\, ds,$$

et les fonctions L et M sont elles-mêmes données par les formules

$$
(7)\qquad\left\{\begin{aligned}
L &= \frac{\psi'}{\psi}\left[\left(\frac{w}{\psi'}+s\right)\cos\chi - \frac{\sin\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}\right],\\
M &= \frac{\psi'}{\psi}\left[\left(\frac{w}{\psi'}+s\right)\sin\chi + \frac{\cos\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}\right]
\end{aligned}\right.
$$

obtenues en tirant L et M des équations (1) et (2), après remplacement de N par $w+\psi' s$.

Ces valeurs étant parfaitement déterminées dès que χ est donnée, il en sera de même de u et v. Si ces fonctions ne dépendent que de t seul, elles satisferont à la question et l'on aura déterminé un système $uvw\psi\chi$ satisfaisant aux conditions du problème. Mais, en apparence, u et v dépendent de s. Par la façon même dont nos équations ont été obtenues (en supposant u et v indépendant de t), on peut prévoir qu'inversement la réciproque est vraie.

Toutefois, elle n'est pas évidente. Pour la démontrer, il suffit de vérifier que les dérivées partielles par rapport à la variable s des fonctions u et v tirées des équations (6) sont nulles identiquement.

Faisons la vérification pour u, par exemple.

On a, en différentiant la première équation (6),

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial s} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\sin\chi;$$

mais, d'après la première équation (7), on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial s} &= \frac{\psi'}{\psi}\left[\cos\chi - \left(\frac{w}{\psi'}+s\right)\sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial s} - \cos\chi + \sin\chi\frac{\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2}\right]\\
&= \frac{\psi'}{\psi}\left[\sin\chi\frac{\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2} - \sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial s}\left(\frac{w}{\psi'}+s\right)\right]
\end{aligned}
$$

et, par suite,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sin\chi\left\{\frac{\psi'}{\psi}\left[\frac{\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2} - \frac{\partial\chi}{\partial s}\left(\frac{w}{\psi'}+s\right)\right] + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right\}.$$

Le crochet facteur de $\sin\chi$ est visiblement nul lorsque χ est une solution de l'équation (5). Ce qui démontre la proposition.

Toute la difficulté de la question consiste donc à en trouver une intégrale. Mais si, malheureusement, ce problème sous sa forme générale paraît inabordable, au moins sans avoir recours à des développements en série, il n'en est pas moins vrai que la considération de l'équation (5) conduit à des applications intéressantes, ainsi que nous le montrerons bientôt par un exemple.

Auparavant, faisons quelques remarques générales.

Remarques. — 1. *Puisque u et v ne dépendent pas de s,* on peut, pour les calculer en fonction de ω, ψ et χ, donner à s, dans la formule, une valeur arbitraire. En faisant $s = 0$, on obtient, en particulier, les formules plus simples et sans signe de quadrature :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\psi'}{\psi}\left[\frac{w}{\psi'}\cos\chi(0, t) - \frac{\sin\chi(0, t)}{\frac{\partial\chi}{\partial s}(0, t)}\right],\\ v &= \frac{\psi'}{\psi}\left[\frac{w}{\psi'}\sin\chi(0, t) + \frac{\cos\chi(0, t)}{\frac{\partial\chi}{\partial s}(0, t)}\right].\end{aligned}\right.$$

2. *Nous avons laissé de côté le cas où ψ' est identiquement nul, c'est-à-dire où le pas est constant ;* il est évident, géométriquement, que ce fait ne peut se présenter que pour les génératrices d'une surface réglée dont le cône directeur est de révolution autour de la direction perpendiculaire au plan de base. Il n'y aura de véritable hélice satisfaisant à cette question que si ces droites ont une enveloppe, c'est-à-dire si la surface est d'égale pente. Cette hélice en sera l'arête de rebroussement.

Il est intéressant de voir comment le calcul pourrait nous permettre de retrouver ces résultats.

Les équations (1) et (2) donnent (abstraction faite de la solution $\psi\frac{\partial\chi}{\partial s} = 0$, qui conduit à des génératrices rectilignes) les deux équations suivantes:

$$(9) \text{ et } (10)\qquad M\cos\chi - L\sin\chi = 0,\qquad M\sin\chi + L\cos\chi = \frac{w}{\psi_0},$$

en indiquant par la notation ψ_0 que le pas est constant.

On tire de là

$$\text{(11)}\qquad M = \frac{w}{\psi_0}\sin\chi(s, t), \qquad L = \frac{w}{\psi_0}\cos\chi(s, t),$$

mais la somme

$$L + \int_0^s \frac{\partial\chi}{\partial t}\sin\chi\, ds$$

doit représenter u fonction de t seul; d'où la relation de condition

$$\frac{\partial L}{\partial s} + \sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial t} = 0$$

ou, en vertu de la deuxième équation (11),

$$-\frac{w}{\psi_0}\sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial s} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\sin\chi = 0,$$

et, en mettant de côté la solution $\sin\chi = 0$, qui conduit à des génératrices rectilignes, il reste

$$\text{(12)}\qquad \frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{w}{\psi_0}\frac{\partial\chi}{\partial s}.$$

La considération de v conduit d'ailleurs à la même conclusion.

L'équation (12) est facilement intégrable. Si l'on pose

$$\frac{w}{\psi_0} = \frac{d\lambda(t)}{dt},$$

on obtient, F désignant une fonction arbitraire,

$$\text{(13)}\qquad \chi = F[s + \lambda(t)],$$

et, en remarquant qu'on a

$$u = \frac{w}{\psi_0}\cos\chi(0, t), \qquad v = \frac{w}{\psi_0}\sin\chi(0, t),$$

on trouve

$$\text{(14)}\qquad u = \frac{w}{\psi_0}\cos F[\lambda(t)], \qquad v = \frac{w}{\psi_0}\sin F[\lambda(t)].$$

Les formules du déplacement d'un point de la génératrice deviennent ici

$$\begin{aligned}
\delta x &= \cos F(s + \lambda)\left(ds + \frac{w}{\psi_0}dt\right),\\
\delta y &= \sin F(s + \lambda)\left(ds + \frac{w}{\psi_0}dt\right),\\
\delta z &= \psi_0 \qquad\quad \left(ds + \frac{w}{\psi_0}dt\right),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\delta x}{\cos F} = \frac{\delta y}{\sin F} = \frac{\delta z}{\psi_0}. \tag{15}$$

Le point ainsi défini n'est autre que le point infiniment voisin sur la position initiale de la courbe. Donc, quels que soient ds et dt, on trouve toujours un point situé sur une position fixe de la courbe. Autrement dit, cette solution amène à ne trouver qu'une hélice fixe. C'est bien conforme à nos prévisions, les génératrices rectilignes ayant été écartées dans le cours des calculs.

2. Problème II. — *Chercher les surfaces satisfaisant à la question précédente et pour lesquelles la projection de l'hélice mobile sur son plan de base correspond à une fonction* $\chi(s, t)$ *du type défini par la relation*

$$\chi(s, t) = \eta(s)\xi(t) + \zeta(t), \tag{16}$$

$\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ *désignant des fonctions quelconques de la variable* t.

Nous remarquerons que les hélices circulaires rentrent dans cette famille, dont nous donnerons plus loin une définition géométrique.

L'équation (5), si l'on pose pour abréger $\rho = \frac{\psi}{\psi'}$, devient

$$\frac{\eta''}{\eta'^2} = \left(s + \frac{w}{\psi'}\right)\eta'\xi^2 - \rho\xi(\eta\xi' + \zeta'). \tag{17}$$

Différentions par rapport à s; on obtient l'équation

$$\left(\frac{\eta''}{\eta'^2}\right)' = \frac{w}{\psi'}\xi^2\eta'' + \xi^2(s\eta'' + \eta') - \rho\eta'\xi\xi'. \tag{18}$$

Multiplions l'équation (17) par η'', l'équation (18) par $-\eta'$ et ajoutons; nous trouvons

$$\rho\xi\xi'(\eta'^2 - \eta\eta'') - \xi^{2'}\eta'^2 - \rho\xi\zeta'\eta'' = \Delta \tag{19}$$

ou

$$\frac{1}{2}\rho\omega'(\eta'^2 - \eta\eta'') - \omega\eta'^2 - \rho\xi\zeta'\eta'' = \Delta, \tag{19'}$$

en posant

$$\omega = \xi^2, \qquad \Delta = \left(\frac{\eta''}{\eta'^2}\right)^2 - \eta'\left(\frac{\eta''}{\eta'^2}\right). \tag{20}$$

Différentions l'équation (19) par rapport à t; comme le deuxième membre dépend de la variable s seulement, il en est de même du premier, et l'on aura

$$\frac{1}{2}[\rho\omega']'(\eta'^2 - \eta\eta'') - \omega'\eta'^2 - (\rho\xi\zeta')'\eta'' = 0. \tag{21}$$

Différentions l'équation (21) par rapport à s; nous obtenons

$$\frac{1}{2}(\rho\omega')'(\eta'\eta'' - \eta\eta''') - 2\omega'\eta'\eta'' - (\rho\xi\zeta')'\eta''' = 0, \tag{22}$$

et, en éliminant $(\rho\xi\zeta')'$ entre (21) et (22), on trouve l'équation

$$\frac{2\omega'}{(\rho\omega')'} = \frac{\eta'''\eta' - \eta''^2}{\eta'''\eta' - 2\eta''^2} \tag{23}$$ (1).

Comme le premier membre de cette égalité est fonction de t seul et le deuxième de s seul, on doit avoir, en désignant par a une

---

(1) Cette condition suppose que η' n'est pas nul. Or pour $\eta' = 0$ les hélices correspondantes se réduisent à des droites. Nous écartons cette solution. D'autre part, en toute rigueur, la forme adoptée par la condition (23) suppose que les dénominateurs des deux membres sont différents de zéro. En fait, les conclusions suivantes tirées de l'équation (24) seraient en défaut si les deux termes de l'un ou de l'autre des deux membres de l'équation (23) sont nuls. Nous aurons dans le cours des développements des conséquences de l'équation (24) à revenir sur le cas où ce fait se présenterait pour le second membre. Or, d'autre part, il ne peut évidemment se produire pour le premier membre que si ω' est nul, c'est-à-dire si $\xi\xi'$ est nul. Or supposer ξ nul revient à admettre que les génératrices sont des droites; reste l'hypothèse $\xi = \xi_0$ en désignant par ξ_0 une constante non nulle. Nous terminerons par l'étude directe de ce cas la solution de la présente question. Remarquons de suite que le cylindre principal de la génératrice est alors indéformable.

Enfin, si l'on suppose nul l'un des dénominateurs sans que le numérateur correspondant le soit, la compatibilité des équations (21) et (25) exige que l'autre dénominateur soit nul. Nous avons donc à envisager l'hypothèse où l'on a

$$(\rho\omega')' = 0, \qquad \eta'''\eta' - 2\eta''^2 = 0;$$

ces deux équations donnent aisément, α et λ désignant deux constantes arbitraires,

$$\eta'' = \alpha\eta'^2, \qquad \rho\xi\xi' = \lambda_0. \tag{a}$$

L'équation (17) devient, dans ces conditions,

$$\alpha = \left(s + \frac{\varpi}{\psi'}\right)\eta'\xi^2 - \eta\lambda_0 - \rho\xi\zeta'.$$

Différentions cette relation et remplaçons dans le résultat η'' par sa valeur constante arbitraire,

$$(24)\qquad \frac{2\omega'}{(\rho\omega')'} = a, \qquad \frac{\eta'''\eta' - \eta''^2}{\eta'''\eta' - 2\eta''^2} = a.$$

La première de ces équations s'intègre immédiatement et donne

$$(25)\qquad \omega = \frac{a}{2}\rho\omega' + C$$

C désignant une nouvelle constante arbitraire.

Posons, pour simplifier la notation, $\eta' = \theta$; la seconde équation (24) devient

$$(26)\qquad \theta'^2 - k\theta\theta'' = 0,$$

en posant

$$k = \frac{a-1}{2a-1}.$$

La nouvelle équation suppose expressément

$$2a - 1 \neq 0.$$

Voyons d'abord ce que donne la supposition $a = \frac{1}{2}$. La deuxième équation (24) se réduit à $\eta'''\eta' = 0$; l'hypothèse η' donnerait des

---

donnée par la première des formules (a); nous obtenons

$$\eta'\left[\xi^2 + \left(s + \frac{\varpi}{\psi'}\right)\alpha\eta'\xi^2 - \lambda_0\right] = 0.$$

En laissant de côté la solution $\eta' = 0$, il reste une relation de la forme

$$\left(s + \frac{\varpi}{\psi'}\right)\eta' = \text{fonction de } t.$$

En différentiant cette relation et remplaçant η'' en fonction de η', on trouve (la solution $\eta' = 0$ étant abandonnée)

$$\eta' = -\frac{\psi'}{\alpha(\psi' s + \varpi)}$$

dont il est facile de voir l'incompatibilité, hors le cas sans intérêt où ψ' est nul, avec la première des équations a. L'hypothèse dont nous sommes partis ne conduit donc à aucune solution du problème.

L'équation (30) ci-dessous donnerait lieu à des observations du même genre et qui conduiraient également à des solutions déjà rencontrées. Les calculs sont analogues à ceux qui précèdent et je n'y reviendrai pas.

hélices réduites à des droites. Reste $\eta''' = 0$. Donc

$$\eta'' = C_0,$$

C_0 désignant une constante arbitraire.

Δ se réduit alors à $\frac{3\eta''^2}{\eta'^2}$ et l'on a

$$\eta' = C_0 s + C'_0, \qquad \eta = \frac{1}{2} C_0 s^2 + C'_0 s + C''_0,$$

C'_0 et C''_0 désignant de nouvelles constantes.

Mais alors, en remplaçant dans l'équation (19) η, η' et η'' par les valeurs que nous venons de trouver, nous obtenons la relation

$$\frac{3C_0^2}{(C_0 s + C'_0)^2} = \frac{1}{2}\rho\omega' C_0'^2 - \rho\xi\zeta' C_0 - C_0(C_0 s + C'_0)^2,$$

identité qui ne peut avoir lieu que si $C_0 = 0$. Donc, enfin, $\eta'' = 0$.

Le numérateur et le dénominateur du deuxième membre de l'équation (23) sont identiquement nuls; c'est d'ailleurs le seul cas où cette particularité se présente. Nos calculs sont en défaut, mais nous étudierons directement le cas où $\eta'' = 0$.

Revenons au cas où $a \neq \frac{1}{2}$.

Nous devons encore étudier un cas spécial, celui où $a = 0$, car dans cette hypothèse $k = 1$ et l'intégrale de l'équation (26) prend une forme qui diffère de la forme générale. Mais alors la première des équations (24) donne

$$\omega' = 0, \qquad \omega = C,$$

C désignant une constante. La dérivée $(\rho\omega')'$ est nulle et l'équation (21) donne

$$\eta''(\rho\xi\zeta')' = 0,$$

d'où nous tirons : soit $\eta'' = 0$, hypothèse que nous étudierons plus loin, soit

$$(\rho\xi\zeta')' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho\xi\zeta' = C_1;$$

C_1 est une constante et l'équation (19') se réduit à

$$-C\eta'^2 - C_1\eta'' = \Delta.$$

D'autre part, on remarquera que

$$\eta'\eta''' - \eta''^2 = 0,$$

en vertu de la deuxième équation (24) et que Δ se réduit à $\frac{2\eta''}{\eta'^2}$.

Il résulte de là que θ doit vérifier les deux relations

$$(27) \qquad \left\{\begin{aligned} & C\theta^2 + C_1\theta' = -2\frac{\theta'^2}{\theta^2}, \\ & \theta\theta'' - \theta'^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

La dernière s'intègre immédiatement et, les γ désignant des constantes, admet pour solution la fonction θ définie par la relation

$$\theta = \gamma\rho^{\gamma_1 s}.$$

Portant cette valeur dans la première des relations (27), on obtient la condition

$$\gamma^2 C\rho^{2\gamma_1 s} + C\gamma\gamma_1\rho^{\gamma_1 s} \equiv 2\gamma_1^2$$

qui entraîne $\gamma_1 = 0$ avec $\gamma = 0$ ou $C = 0$.

Si $\gamma_1 = \gamma = 0$, on a $\eta' = 0$, solution sans intérêt, comme on a vu;
Si $\gamma_1 = C = 0$, on a $\theta = \gamma$, $\omega = 0$ et, par suite,

$$\theta' = \eta'' = 0, \qquad \xi = 0, \qquad \ldots.$$

χ se réduit à une fonction de t. C'est encore le cas limite des hélices réduites à des droites.

Passons maintenant au cas où a n'est ni nul ni égal à $\frac{1}{2}$. La première des équations (24) donne

$$(28) \qquad (\rho\omega')' = \frac{2\omega'}{a},$$

et les équations (21) et (22) deviennent, après substitution de cette valeur de $(\rho\omega')'$,

$$(29) \qquad \left\{\begin{aligned} & \omega'\left(\frac{\eta'^2 - \eta\eta''}{a} - \eta'^2\right) - (\rho\xi\zeta')\eta'' = 0, \\ & \omega'\left(\frac{\eta'\eta'' - \eta\eta'''}{a} - 2\eta'\eta''\right) - (\rho\xi\zeta')\eta''' = 0; \end{aligned}\right.$$

elles conduisent, comme il fallait s'y attendre puisqu'on avait effectué l'élimination, à la même valeur pour $\rho\xi\zeta'$.

On peut écrire la première des relations (29) sous la forme

$$(30)\qquad \frac{\omega'}{(\rho\zeta'\xi)'} = \frac{a\eta''}{\eta'^2(1-a)-\eta\eta''}.$$

Le deuxième membre est fonction de s seul, le premier de t seul; cette équation équivaut donc aux deux suivantes, où b désigne une constante arbitraire

$$(31)\qquad \eta''(a-b\eta)+\eta'^2 b(a-1)=0, \qquad \omega'=b(\rho\xi\zeta')'.$$

La première s'écrit

$$(32)\qquad \frac{\eta''}{\eta'} = (a-1)\frac{b\eta'}{b\eta-a}.$$

D'autre part, l'équation (26) donne

$$\theta = (Cs+C_1)^{\frac{k}{k-1}},$$

d'où

$$(33)\qquad \eta = (Cs+C_1)^{\frac{1}{a}}+C_2,$$

en faisant rentrer le facteur $\frac{1}{C}\left(\frac{2k-1}{k-1}\right)$ résultant de l'intégration dans les constantes arbitraires C et C_1.

Portons cette valeur de η dans l'équation (32); en posant

$$\sigma = Cs + C_1,$$

on obtient

$$C\frac{\frac{b}{a}\sigma^{\frac{1-a}{a}}}{b\sigma^{\frac{1}{a}}+bC_2-a}(a-1) = \frac{(1-a)}{a\sigma}C.$$

Si nous laissons de côté la solution $C=0$ de cette équation, pour laquelle η se réduit à une constante et l'hélice génératrice à une droite, et si nous divisons par $(a-1)$ les deux membres de la relation précédente (¹), nous obtenons

$$(34)\qquad 2b\sigma^{\frac{1}{a}}+bC_2-a\equiv 0,$$

(¹) On laisse ainsi de côté le cas où $a=1$. Mais la seconde équation (24) impose la condition $\eta''=0$. On retombe ainsi sur une étude déjà réservée.

ce qui exige évidemment

$$b = 0, \qquad a = 0.$$

On est conduit à une contradiction, car a a été supposé différent de zéro. Donc pas de solution possible en dehors de

$$a = 0, \qquad a = \frac{1}{2}, \qquad a = 1.$$

On a vu directement que $a = 0$ ne mène à rien d'intéressant.

Les deux autres hypothèses possibles $a = \frac{1}{2}$ et $a = 1$ exigent $\eta'' = 0$. Donc :

Si le problème admet une solution, celle-ci sera nécessairement une surface engendrée par une famille d'hélices circulaires.

Pour achever la question, il suffit de chercher s'il existe effectivement une solution du problème, correspondant à $\eta'' = 0$. Alors on aura

$$\eta = h(s - s_0),$$

h et s_0 étant deux constantes arbitraires. Mais on peut faire rentrer h dans le facteur ξ et hs_0 dans ζ, ce qui revient à dire que, sans diminuer la généralité du problème, on peut prendre

$$\eta = s. \tag{35}$$

Cette remarque simplifie les écritures et les calculs.

L'équation (19) devient alors

$$\eta'^2(\rho\xi' - \xi)\xi = 0. \tag{36}$$

Or les hypothèses $\eta' = 0$ et $\xi = 0$ ne donnent aucun résultat intéressant. Il reste donc une seule solution

$$\rho\xi' - \xi = 0, \tag{37}$$

et, en remplaçant ρ par sa valeur, on trouve par une intégration facile

$$\xi = \frac{\psi}{l}, \qquad \omega = \frac{\psi^2}{l^2}, \tag{38}$$

l désignant une constante (il est aisé de voir que c'est une longueur).

Pour que le problème soit résolu, il reste encore à vérifier l'équation (17), ce qui, en tenant compte des valeurs données pour ξ et ω par les relations (38), donne la condition

$$w = \zeta' l. \tag{39}$$

On peut donc se donner le pas ψ et w ou ζ'. La formule (39) détermine la troisième de ces fonctions. Nous savons par la théorie générale du problème qu'on peut déterminer les fonctions w et v convenables. Ainsi le problème admet une solution.

Reste à trouver la nature géométrique de cette solution. Pour fixer les idées, donnons-nous ζ. La formule (39) donne w. D'ailleurs χ se réduit à

$$\chi = s\frac{\psi}{l} + \zeta,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{l}{\psi}\left[\sin\left(\frac{\psi s}{l} + \zeta\right) - \sin\zeta\right], \\ y &= -\frac{l}{\psi}\left[\cos\left(\frac{\psi s}{l} + \zeta\right) - \cos\zeta\right], \\ z &= s\psi, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

et, par la formule (8) du problème précédent, on obtient

$$u = \frac{w}{\psi}\cos\zeta - \frac{\psi' l}{\psi^2}\sin\zeta, \qquad v = \frac{w}{\psi}\sin\zeta + \frac{\psi' l}{\psi^2}\cos\zeta. \tag{41}$$

Soient alors X, Y, Z les coordonnées rapportées à des axes fixes parallèles à nos axes mobiles; considérons, en particulier, la droite (axe de l'hélice génératrice)

$$x_0 = -\frac{l}{\psi}\sin\zeta, \qquad y_0 = +\frac{l}{\psi}\cos\zeta;$$

la vitesse absolue de sa translation est

$$\frac{dX_0}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + u, \qquad \frac{dY_0}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + v$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{dX_0}{dt} = 0, \qquad \frac{dY_0}{dt} = 0.$$

Cette droite est fixe : toutes les génératrices ont même axe.

Pour achever le problème, nous remarquerons que les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface sont

$$(42)\quad x = \frac{l}{\psi}\sin\left(\frac{\psi}{l}s+\zeta\right) - x_0, \quad y = -\frac{l}{\psi}\cos\left(\frac{\psi}{l}s+\zeta\right) - y_0, \quad z = \psi s,$$

et par suite nos coordonnées X, Y, Z, rapportées aux axes fixes dont l'axe commun des hélices est Oz, seront

$$(43)\quad X = \frac{l}{\psi}\sin\left(\frac{\psi}{l}s+\zeta\right), \quad Y = -\frac{l}{\psi}\cos\left(\frac{\psi}{l}s+\zeta\right), \quad Z = \psi s;$$

sous cette forme, on reconnaît les équations d'un hélicoïde gauche à plan directeur.

Cas où la fonction ξ se réduit à une constante ξ_0. — Il nous reste, pour terminer, à étudier l'hypothèse où la fonction ξ se réduit à une constante ξ_0. Il résulte d'une remarque antérieure que, dans le problème actuel, il n'y a pas lieu de supposer le pas constant. On peut alors, ce qui simplifie les calculs, prendre pour variable indépendante t le pas ψ lui-même. L'équation (17) devient alors

$$(17\ bis)\qquad \frac{\eta''}{\eta'^2} = (s+w)\eta'\xi_0^2 - \psi\zeta'\xi_0.$$

Différentions cette relation par rapport à ψ; nous trouvons

$$(17\ ter)\qquad 0 = w'\xi_0^2\eta' - \xi_0(\psi\zeta')'.$$

Si on laisse de côté le cas étudié précédemment où η'' est identiquement nul, cette équation exige qu'on ait séparément les relations

$$w' = 0, \qquad (\psi\zeta')' = 0,$$

obtenues en joignant à (17 *ter*) la condition résultant de la différentiation de cette équation par rapport à s ou, en désignant par w_0, α et β trois constantes,

$$(A)\qquad w = w_0, \qquad \zeta = \alpha \operatorname{Log}\beta\psi \quad (^1).$$

(1) Si α est nul, il n'est pas possible de mettre l'intégrale de l'équation $(\psi\zeta')' = 0$ sous la forme adoptée dans le texte. Cette intégrale se réduit à $\zeta_0 =$ const. Mais, étant donnée la signification de ζ, il n'y a aucun inconvénient à particulariser cette

Mais alors l'équation (17 *bis*) devient

$$\text{(B)} \qquad \frac{\eta''}{\eta'^2} - (s + w_0)\xi_0^2\eta' = -\alpha\xi_0.$$

L'équation (B) détermine la forme de la section droite du cylindre indéformable portant l'hélice génératrice. A toute solution de l'équation B, étant données les constantes w_0, α et β, correspondra : 1° une famille d'hélices génératrices dont le déplacement, par rapport aux axes mobiles, est donné par la seconde des formules A; 2° un mouvement des axes mobiles donné par la première des relations A et par les relations qui donnent u et v, ainsi qu'il a été expliqué plusieurs fois ci-dessus.

Il nous faudrait étudier les sections droites déterminées par l'équation (B) et les mouvements correspondants. Nous nous bornerons sur ce sujet aux remarques suivantes :

1° Les hélices définies par l'équation (B) ne sont jamais circulaires. Cette remarque permettra d'énoncer immédiatement le théorème II lorsqu'on sera parvenu à démontrer que les axes des hélices circulaires dont il est question dans ce théorème conservent une direction fixe.

2° Si l'on suppose α nul, l'équation (B) s'intègre immédiatement et d'une façon très simple. L'étude de ce cas paraît devoir être intéressante, mais nous entraînerait trop loin. Nous signalerons plus spécialement encore les solutions correspondant à $\alpha = w_0 = 0$.

3° Dans le cas général, l'équation (B) déterminant η' est du premier ordre et rentre dans le type

$$\frac{dy}{dx} = a(x + b)y^3 + cy^2$$

(a, b, c désignent trois constantes), qui appartient à une classe ayant fait l'objet des études de plusieurs géomètres. (*Cf.* R. Liouville, *Journal de l'École Polytechnique,* année 1887, p. 189.)

---

constante et spécialement à la supposer nulle. De la sorte, on peut dire que la forme adoptée s'applique encore lorsque α est nul. Enfin cette formule suppose, si l'on veut éviter l'introduction d'imaginaires inutiles ici, que $\beta\psi$ est positif. Il est aisé de modifier la formule pour éviter la difficulté pour les valeurs de ψ de signe contraire à β. Nous ne nous arrêterons pas à cette question dont la solution est tout à fait élémentaire.

De cette discussion résulte le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les seules surfaces engendrées par des hélices de même direction d'axe et dont la base varie d'après la loi définie par la relation*

$$\chi(s, t) = \xi(t)\eta(s) + \zeta(t),$$

et qui admettent ces hélices comme asymptotiques, sont : 1° *des hélicoïdes gauches à plan directeur;* 2° *une famille de surfaces engendrées par des hélices dont le cylindre principal est indéformable et appartient à un type défini par l'équation* (B).

Il est intéressant de donner la *signification géométrique de la loi de variation précédente*. On remarque que la courbure de la projection de l'hélice sur son plan de base a pour expression $\frac{\partial \chi}{\partial s}$, et par suite cette courbure γ est ici

$$\gamma = \xi(t)\eta'(s),$$

et inversement, si la courbure de la projection de l'hélice se réduit au produit d'une fonction de t par une fonction de s, la fonction χ aura la forme spécifiée dans l'énoncé du théorème I.

Comme d'autre part la courbure de l'hélice ne diffère de celle de sa projection que par un facteur fonction de t, on voit qu'au lieu de parler de la projection dans l'énoncé précédent on peut lui substituer l'hélice elle-même. *La courbure des hélices génératrices est de la forme* $F(t) \times F_1(s)$. F *et* F_1 *étant deux fonctions quelconques et inversement,* toute génératrice dont la courbure répond à cette définition est du type considéré. C'est ce que nous exprimerons en disant que *nos hélices génératrices varient en conservant même loi de courbure en fonction de l'arc, à un facteur près.*

Les hélices circulaires rentrent dans cette catégorie. On pourrait imaginer d'autres exemples ; un cas simple est celui où la projection de la génératrice sur son plan de base serait une spirale de M. Cornu. Les hélices indéformables rentrent aussi évidemment dans ce type.

3. PROBLÈME III. — *Recherchel les surfaces admettant une série d'hélices quelconques comme famille d'asymptotiques.*

La mise en équation du problème est la même que celle du problème I. On doit chercher à réaliser l'identité

$$N = \psi(M \sin\chi + L \cos\chi). \tag{44}$$

Nous simplifierons un peu les calculs en prenant les axes mobiles tels que Ox soit parallèle à la caractéristique du plan xOy. (Nous laissons de côté le cas des plans de base enveloppant le cercle de l'infini.) Alors $q = 0$. Deux différentiations successives par rapport à s, effectuées sur l'équation (44), donnent

$$-L \sin\chi + M \cos\chi = \frac{p \sin\chi(\psi^2+1) + \psi'}{\psi \dfrac{\partial\chi}{\partial s}}, \tag{45}$$

$$L \cos\chi + M \sin\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial s^2} \frac{p \sin\chi(\psi^2+1) + \psi'}{\psi\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2} + \frac{r - p\psi\cos\chi + \dfrac{\partial\chi}{\partial t}}{\dfrac{\partial\chi}{\partial s}} - \frac{p\cos\chi(\psi^2+1)}{\psi\dfrac{\partial\chi}{\partial s}}. \tag{46}$$

Une troisième différentiation conduit à la relation

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p\cos\chi(\psi^2+1)}{\psi}\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2} - p\sin\chi\frac{\psi^2+1}{\psi}\left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2 \\ &= \frac{\partial^3\chi}{\partial s^3}(M\cos\chi - L\sin\chi) \\ &\quad - 3\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\frac{\partial\chi}{\partial s}(L\cos\chi + M\sin\chi) + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\left(r - p\psi\cos\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \\ &\quad + \frac{\partial\chi}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial s} + 2p\psi\sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^3(M\cos\chi - L\sin\chi). \end{aligned}\right. \tag{47}$$

La substitution dans l'équation (47) des valeurs données par les relations (45) et (46) pour les binomes $L\cos\chi + M\sin\chi$ et $M\cos\chi - L\sin\chi$ conduit à l'équation suivante, qui définit χ en fonction de p, r et ψ fonctions arbitraires de t :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p\cos\chi(\psi^2+1)}{\psi}\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2} \\ &= \frac{\partial^3\chi}{\partial s^3}\,\frac{p\sin\chi(\psi^2+1)+\psi'}{\psi\dfrac{\partial\chi}{\partial s}} \\ &\quad - 3\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\left[\frac{\dfrac{\partial^2\chi}{\partial s^2}}{\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2}\,\frac{p\sin\chi(\psi^2+1)+\psi'}{\psi} + r - p\psi\cos\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{p(\psi^2+1)\cos\chi}{\psi}\right] \\ &\quad + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\left(r - p\psi\cos\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + \frac{\partial\chi}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial s} + 2p\psi\sin\chi\frac{\partial\chi}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\right)^2\frac{\psi'}{\psi}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, si l'on fait dans cette équation

$$p = q = r = 0,$$

on obtient, comme on doit s'y attendre, l'équation du troisième ordre résultant de l'élimination par différentiation de la fonction w dans l'équation fondamentale du problème I.

L'équation (48) sera utilisée comme il a été dit pour l'équation analogue du problème I. Dans le cas général, la résolution de cette équation est inabordable pratiquement.

Comme dans la question précédente, on montre que, si par un moyen quelconque on a pu déterminer une fonction χ, il lui correspond une surface solution de la question. Cette fonction définit en effet la génératrice ; de plus, les équations (45) et (46) donnent sans ambiguïté des valeurs correspondantes pour L et M. On en déduit u et v.

L'équation (44) donne N et par suite w. On voit toujours comme précédemment que les valeurs trouvées pour u, v et w sont bien indépendantes de s et par suite caractérisent un mouvement bien déterminé de la génératrice.

Remarque. — La fonction χ dépend des fonctions p, r, ψ. On peut les éliminer par différentiation et obtenir une équation aux dérivées partielles en χ qui ne contient plus aucune fonction arbitraire. Ce sera l'équation générale des fonctions χ auxquelles correspondra une solution du problème. Étant donnée la complication des calculs, cette remarque n'a qu'un intérêt théorique. Elle s'applique évidemment au problème précédent : d'ailleurs l'équation (48) dans laquelle on aura fait $p = r = 0$ est un exemple de cette transformation, exemple correspondant à l'élimination de w dans le problème I.

4. Nous ferons une application intéressante de l'équation (48) en l'utilisant à la démonstration du théorème suivant :

Théorème II. — *L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface admettant pour asymptotiques une famille d'hélices circulaires.*

On a, dans ce cas,

$$\chi = s\,\xi(t) + \zeta(t).$$

L'équation (48) devient simplement

$$\xi[\xi' + 2p\psi\xi\sin(s\xi + \zeta)] = \xi^2\frac{\psi'}{\psi},$$

et abandonnant $\xi = 0$, qui donne la génératrice d'une surface réglée, il reste

$$\text{(A)} \qquad 2p\psi\xi\sin(s\xi + \zeta) = \xi\frac{\psi'}{\psi} - \xi';$$

le second membre est fonction de t seul ; il doit en être de même du premier, ce qui exige

$$p\psi\xi = 0$$

et par suite

$$\xi\frac{\psi'}{\psi} = \xi'.$$

Laissons de côté les solutions $\psi = 0$ ou $\xi = 0$ qui conduisent à des génératrices rectilignes d'une surface réglée. Il faut donc prendre $p = 0$. Comme par hypothèse $q = 0$, les hélices circulaires doivent avoir une direction d'axe fixe et, comme elles, appartiennent à la classe objet du théorème I, la surface qu'elles engendrent doit se réduire à un hélicoïde gauche à plan directeur. On pourrait d'ailleurs continuer les calculs en portant la condition

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{\xi'}{\xi},$$

à laquelle se réduit l'équation (A), mais on retomberait sur une question déjà traitée.

5. ***Recherche des surfaces admettant comme lignes géodésiques une famille d'hélices variables.***

On doit avoir

$$\cos^2\varpi = 1$$

ou (formule VI, Tableau II)

$$\textbf{(49)} \qquad \mathrm{M}\cos\chi - \mathrm{L}\sin\chi = 0.$$

Comme dans le problème précédent, nous prendrons $q = 0$.
Différentions deux fois par rapport à s l'équation (49) et rem-

plaçons $\frac{\partial L}{\partial s}$ et $\frac{\partial M}{\partial s}$ par leurs valeurs; nous obtenons ainsi les deux relations suivantes :

$$\text{(50)} \qquad L\cos\chi + M\sin\chi = \frac{r + \frac{\partial\chi}{\partial t} - p\psi\cos\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}$$

et

$$\text{(51)} \quad (-L\sin\chi + M\cos\chi)\frac{\partial\chi}{\partial s} - p\psi\sin\chi = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r + \frac{\partial\chi}{\partial t} - p\psi\cos\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}\right).$$

L'élimination de L et M se fait immédiatement en introduisant dans la relation (51) la condition

$$L\sin\chi - M\cos\chi = 0$$

donnée par l'équation (49).

On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(52)} \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\left(r + \frac{\partial\chi}{\partial t} - p\psi\cos\chi\right) = \frac{\partial\chi}{\partial s}\left(2p\psi\sin\chi\frac{\delta\chi}{\partial s} + \frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial s}\right).$$

Si l'on connaît une solution χ de cette équation, il lui correspondra un mouvement déterminé et, par suite, une surface répondant à la question. L et M seront déterminés par les équations (49) et (50) qui donnent

$$\text{(53)} \quad \begin{cases} M = \dfrac{\sin\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}\left[r + \dfrac{\partial\chi}{\partial t} - p\psi\cos\chi\right], \\[2ex] L = \dfrac{\cos\chi}{\frac{\partial\chi}{\partial s}}\left[r + \dfrac{\partial\chi}{\partial t} - p\psi\cos\chi\right]. \end{cases}$$

Des expressions de L et M on déduit u et v; on démontre que les fonctions u et v ainsi trouvées sont bien indépendantes de s de la même façon qu'il a été indiqué par le premier de ces problèmes [1].

---

(1) On peut faire une *remarque*. Si les relations précédentes sont des équations vérifiées par les fonctions qui y figurent, considérées comme fonction de s, mais pour *certaines valeurs isolées de t*, on aura écrit que les positions de la génératrice correspondant à ces valeurs sont des géodésiques. Cette remarque s'applique évidemment aux problèmes précédents.

6. Remarques géométriques. — Nous ferons quelques remarques géométriques évidentes :

1° *Si une hélice est géodésique d'une surface, le cylindre principal de l'hélice est circonscrit à la surface;*

2° *Si une hélice est la courbe de contact d'une surface et de son cylindre principal, c'est une géodésique de la surface;*

3° *Si la courbe de contact d'une surface et d'un cylindre est une trajectoire des génératrices de celui-ci, c'est une hélice et une géodésique de la surface.*

Ces remarques conduisent immédiatement au théorème suivant :

Théorème III. — *Les cylindres sont les seules surfaces ayant comme géodésiques une famille d'hélices de même direction d'axe.*

Il est intéressant de retrouver ce résultat comme application de l'équation (52). En y introduisant l'hypothèse nouvelle

$$p = r = 0,$$

celle-ci devient

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t\, \partial s} \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{L} \frac{\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial s}\right)} = 0,$$

d'où l'on tire, f désignant une fonction arbitraire de t dont f' est la dérivée,

$$\frac{\frac{\partial \chi}{\partial t}}{\frac{\partial \chi}{\partial s}} = f'(t),$$

et en désignant par F une fonction arbitraire

$$\chi = \mathrm{F}[s + f(t)]. \tag{54}$$

Par un choix convenable de l'origine du trièdre mobile, on peut évidemment ramener cette équation à la forme

$$\chi = F(s),$$

qui définit, étant donnée la signification de χ, un cylindre principal indéformable. Mais on peut directement arriver au résultat que nous avons en vue.

Revenons à la forme générale (54), si l'on définit s en fonction de t par la relation

$$ds + f'(t)\,dt = 0.$$

Le point correspondant à chaque système de valeurs de s et de t décrit sur la surface une courbe telle qu'à chaque instant

$$\delta x = \delta y = 0.$$

Comme le plan de base est fixe en direction, cette courbe est une parallèle à la direction d'axe. La surface est bien un cylindre.

7. Nous utiliserons cette proposition à la démonstration du théorème suivant :

Théorème IV. — *Le cylindre circulaire droit est la seule surface admettant comme géodésiques une famille d'hélices circulaires.*

On a en effet ici

$$\chi = s\,\xi(t) + \eta(t),$$

et l'équation (52) devient

$$2p\psi\xi \sin\chi + \xi' = 0. \tag{55}$$

Or ξ' est fonction de t seul et, d'après une remarque déjà faite, nous devons supposer nécessairement que χ dépend réellement de s. Dès lors l'identité (55) ne peut avoir lieu que si l'on a séparément

$$p\psi = 0, \qquad \xi' = 0. \tag{56}$$

Si nous laissons de côté le cas de $\psi = 0$ qui correspond à des hélices réduites à des cercles, question connue (on trouve les surfaces canaux). Il reste

$$p = 0, \qquad \xi' = 0.$$

On pourrait achever la question en partant de ces deux relations, mais le théorème résulte immédiatement de la première et de l'application du théorème précédent.

8. *Déterminer les surfaces admettant pour géodésiques une famille de courbes planes.*

On peut démontrer géométriquement d'une façon très simple que la courbe en question doit être indéformable et que chacun de ses points décrit une trajectoire normale à son plan. On est conduit ainsi aux surfaces de Monge. On démontre également ce résultat en remarquant que les surfaces en question sont des surfaces à lignes de courbure planes dont le plan est à chaque instant normal à la surface. Ces propriétés ne sont pas neuves; aussi ne développerons-nous pas ces démonstrations et nous bornerons-nous à montrer comment on peut arriver au résultat par l'emploi de notre méthode.

En introduisant la condition $\psi = 0$ dans l'équation (52), on obtient, par une intégration facile,

$$\chi = \Phi[s - F(t)] - \int_0^t r(t)\,dt, \tag{57}$$

où F et t représentent des fonctions arbitraires.

Si l'on remarque qu'en remplaçant les axes choisis par ceux que l'on obtiendrait en les faisant tourner d'un angle

$$\varphi = \int_0^t r(t)\,dt,$$

l'équation (57) se réduit au type (54); on en conclut que la génératrice est indéformable.

Ceci posé, si l'on détermine la courbe de la surface satisfaisant à l'équation différentielle

$$ds + \frac{r + \dfrac{\partial\chi}{\partial t}}{\dfrac{\partial\chi}{\partial s}}\,dt = 0,$$

on vérifie immédiatement que les déplacements δx et δy correspondants sont nuls. Cette propriété, jointe à l'indéformabilité de la génératrice, caractérise les surfaces de Monge.

9. Sur une surface quelconque on peut tracer une infinité d'hélices de pas donné, tangentes à une courbe déterminée. Cette propriété est à peu près évidente et nous avertit que sur la surface engendrée par une hélice quelconque munie d'une enveloppe, celle-ci *n'est pas nécessairement* une courbe spéciale. Toutefois, si l'on se donne *a priori* une hélice mobile munie d'une enveloppe, celle-ci sera en général une arête de rebroussement; cette remarque et la suivante s'appliquent à une courbe mobile quelconque. Dans le cas où l'enveloppe ne serait pas, exceptionnellement, une ligne de singularités, la représentation de la surface par un système de coordonnées comprenant ces génératrices serait en défaut sur les points de l'enveloppe de celles-ci. Nous allons maintenant chercher les conditions pour qu'une famille d'hélices définies comme précédemment ait une enveloppe. Cette condition s'écrit immédiatement

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{\delta y}{dy} = \frac{\delta z}{dz}, \tag{58}$$

ou

$$\frac{\mathrm{L}}{\cos\chi} = \frac{\mathrm{M}}{\sin\chi} = \frac{\mathrm{N}}{\psi}, \tag{59}$$

ou, sous une autre forme plus commode dans certaines applications,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{L}\sin\chi - \mathrm{M}\cos\chi = 0, \\ \mathrm{N} = \psi(\mathrm{M}\sin\chi + \mathrm{L}\cos\chi). \end{array} \right. \tag{60}$$

Si ces deux équations admettent une solution commune

$$f(s, t) = 0,$$

la courbe que définit cette dernière constitue une branche d'enveloppe. La considération de la forme des équations (60) conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème V. — *Si une famille d'hélices mobiles engendre une surface dont ces hélices sont constamment des asymptotiques ou des géodésiques, ces hélices admettent une enveloppe.*

Cela tient à ce que l'une ou l'autre des équations (60) est vérifiée en tout point de la surface quand on se place dans l'une ou l'autre des hypothèses du théorème V.

Remarque. — Cette enveloppe peut se réduire à un point ou être rejetée à l'infini. La considération d'une famille d'hélices tracées sur un cylindre donné comme cylindre principal fournit immédiatement des exemples simples de tous les cas possibles correspondant à une famille d'hélices géodésiques.

Cas des hélices indéformables. — L'emploi du procédé qui fait l'objet de ce Mémoire conduit, quand on l'applique à une hélice indéformable, à des résultats particulièrement intéressants sur lesquels nous nous réservons de revenir.