

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RÉMY

## **Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 37 (1909), p. 3-11

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1909\\_\\_37\\_\\_3\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__3_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

### SUR LE NOMBRE DES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE DE CERTAINES SURFACES ALGÈBRIQUES;

PAR M. L. REMY.

D'après un théorème fondamental de M. Picard <sup>(1)</sup>, toute surface algébrique  $F(X, Y, Z) = 0$  possède un nombre limité  $\rho_0$  d'intégrales doubles de seconde espèce distinctes, c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces intégrales de la forme

$$\iint \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dX dY,$$

U et V étant des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

La présente Note a pour objet de déterminer la valeur de cet invariant  $\rho_0$  pour les surfaces algébriques  $S_n$  liées à une courbe hyperelliptique  $C_n$  de genre  $n$ , de telle sorte qu'à tout couple de points de  $C_n$  réponde un point de  $S_n$  et qu'inversement à tout point de  $S_n$  répondent deux couples de  $C_n$ , les points du premier couple étant conjugués hyperelliptiques de ceux du second <sup>(2)</sup>. Cette classe de surfaces algébriques comprend comme

---

<sup>(1)</sup> *Traité des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, p. 186 et 409, et *Annales de l'École Normale*, 1908.

<sup>(2)</sup> On peut établir que toute surface  $S_n$  dont les points admettent une correspondance (1, 2) avec les couples de points de la courbe  $C_n$  est nécessairement de ce type.

cas particulier (pour  $n = 2$ ) les surfaces du type de Kummer.

Pour déterminer l'invariant  $\rho_0$ , nous aurons recours à la formule suivante, due également à M. Picard :

$$\rho_0 = N + \sum (\mu_i - 1) - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1),$$

où  $N$  désigne la classe et  $m$  le degré de la surface,  $p$  le genre d'une section plane arbitraire,  $r$  le nombre des intégrales de différentielles totales de seconde espèce de la surface, et où la somme  $\sum (\mu_i - 1)$  est étendue à tous les points singuliers isolés, d'ordres  $\mu_i$  de multiplicité. Enfin, le nombre  $\rho$  est le nombre maximum des courbes algébriques irréductibles  $C_1, \dots, C_\rho$  qu'on peut tracer sur la surface, sans qu'il existe d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement la totalité ou une partie des courbes  $C_1, \dots, C_\rho$  comme courbes logarithmiques.

## I.

La détermination de l'invariant  $\rho_0$  suppose la connaissance de l'invariant relatif  $\rho$ . Nous avons établi <sup>(1)</sup> que  $\rho$  est égal à deux pour les surfaces dont les points admettent une correspondance univoque, sans courbe exceptionnelle, avec les couples de points d'une courbe algébrique non unicursale et non singulière; mais ce résultat n'est pas immédiatement applicable au cas actuel, la correspondance entre la surface  $S_n$  et la courbe  $C_n$  n'étant pas *univoque*.

Envisageons une surface  $S_n$  sans courbe exceptionnelle (c'est-à-dire répondant à un seul couple de  $C_n$ ), et supposons de plus, par analogie avec la théorie des surfaces hyperelliptiques, que tous les couples de  $C_n$  formés de deux points conjugués l'un de l'autre définissent un même point de la surface. D'autre part, il est permis de supposer que la courbe  $C_n$  a été ramenée, par une transformation birationnelle, à une courbe plane  $f(x, y) = 0$ , de degré  $(n + 2)$ , avec un point multiple d'ordre  $n$ .

Toute courbe algébrique  $\Gamma$  de la surface  $S_n$  définit une *correspondance algébrique* entre les points  $(x, y)$  et  $(x', y')$  de la

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 2 novembre 1908.

courbe  $C_n$ . Or, on doit à Hurwitz (1) un théorème relatif à ces correspondances, qui peut être énoncé sous la forme suivante : *Étant donnée une correspondance quelconque entre les points  $(x, y)$  et  $(x', y')$  d'une courbe algébrique NON SINGULIÈRE (2), on peut former une fonction rationnelle  $P(x, y; x', y')$  n'ayant comme lignes de zéros et d'infinis, en dehors de la correspondance considérée, que la correspondance  $x = x', y = y'$ , ainsi que les correspondances associant respectivement à un point variable certains points fixes  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ .*

Désignons par  $(\xi, \eta)$  le conjugué hyperelliptique du point  $(x, y)$  et par  $(\xi', \eta')$  celui de  $(x', y')$ , et formons le produit

$$\Pi = P(x, y; x', y') P(x', y'; x, y) P(\xi, \eta; \xi', \eta') P(\xi', \eta'; \xi, \eta).$$

Cette expression est une fonction rationnelle symétrique de  $(x, y)$  et  $(x', y')$  qui reste inaltérée par le changement simultané de  $(x, y)$  en  $(\xi, \eta)$  et de  $(x', y')$  en  $(\xi', \eta')$  : c'est, par conséquent, une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface. Elle admet, d'ailleurs, pour ligne de zéros et d'infinis :

1° La courbe considérée  $\Gamma$ ;

2° La courbe J définie par les couples de  $C_n$  formés de deux points confondus;

3° Enfin, un certain nombre de courbes  $L_i$  correspondant aux couples formés d'un point variable et d'un point fixe  $(x_i, y_i)$  ou de son conjugué  $(\xi_i, \eta_i)$ .

Formons, d'autre part, la fonction

$$H = \left[ \frac{t - t'}{(t - t_0)(t' - t_0)} \right]^2,$$

en choisissant le point multiple de  $C_n$  pour origine des coordonnées et en posant

$$\frac{y}{x} = t, \quad \frac{y'}{x'} = t';$$

cette fonction s'annule lorsque les deux points  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont ou bien confondus, ou bien conjugués l'un de l'autre, et elle

(1) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII, p. 561.

(2) C'est-à-dire telle qu'il n'existe entre les périodes de ses intégrales abéliennes de première espèce aucune relation *singulière* à coefficients entiers.

devient infinie lorsque  $(x, y)$ , ou  $(x', y')$ , coïncide avec l'un des deux points d'intersection de la courbe avec la sécante

$$y - t_0 x = 0.$$

Or la correspondance qui associe à un point de  $C_n$  le point conjugué définit sur la surface  $S_n$  non pas une courbe, mais un point ; dès lors la fonction rationnelle  $H$  n'admet, pour lignes de zéros et d'infinis sur la surface, que les deux courbes  $J$  et  $L_0$ .

Introduisons enfin la fonction rationnelle

$$S_i = \frac{(t - t_0)(t' - t_0)}{(t - t_i)(t' - t_i)},$$

laquelle s'annule le long de la courbe  $L_0$  et devient infinie le long de la courbe  $L_i$ .

Ceci posé, il est possible, en multipliant la fonction  $H$  définie plus haut par un produit convenablement choisi des fonctions  $H$  et  $S_i$ , de former une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la surface  $R(X, Y, Z)$  qui n'admette, comme lignes de zéros ou d'infinis, que les deux courbes  $\Gamma$  et  $L_0$ . Soient, dès lors,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux courbes algébriques quelconques de la surface et  $R_1, R_2$  les fonctions rationnelles correspondantes, lesquelles sont infinies d'ordres  $n_1$  et  $n_2$  le long de la courbe  $L_0$ ; l'expression

$$\text{Log} \frac{(R_1)^{n_2}}{(R_2)^{n_1}}$$

est une intégrale de différentielle totale de troisième espèce de la surface ne possédant pas d'autre courbe logarithmique que les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

De là cette conclusion : *L'invariant relatif  $\rho$  est égal à un pour les surfaces algébriques considérées  $S_n$ , dans le cas où elles ne dérivent pas d'une courbe  $C_n$  SINGULIÈRE.*

## II.

Proposons-nous en second lieu de définir géométriquement une surface particulière de la classe considérée.

A cet effet considérons, dans le plan  $t = 0$ , deux polygones de  $(n + 1)$  côtés chacun, circonscrits à une même conique

$f_2(x, y, z) = 0$  et désignons par  $u_0 = 0, \dots, u_n = 0, v_0 = 0, \dots, v_n = 0$  les équations de leurs côtés. D'après un théorème de Géométrie élémentaire, on peut tracer, d'une part, une courbe du  $n^{\text{ième}}$  ordre  $f_n(x, y, z) = 0$  passant par les  $n(n+1)$  sommets des deux polygones complets, et, d'autre part, une courbe du  $(n+1)^{\text{ième}}$  ordre  $f_{n+1}(x, y, z) = 0$  passant par les  $n(n+1)$  sommets et par les  $(2n+2)$  points de contact des côtés avec la conique; il existe, d'ailleurs, une identité de la forme

$$(E) \quad (f_{n+1})^2 - f_2(f_n)^2 = (u_0 \dots u_n)(v_0 \dots v_n).$$

Ceci posé, nous envisagerons la surface définie par l'équation

$$t^2 f_n(x, y, z) + 2t f_{n+1}(x, y, z) + f_2(x, y, z) f_n(x, y, z) = 0,$$

laquelle est du  $(n+2)^{\text{ième}}$  ordre et possède un point multiple d'ordre  $n$ . Une sécante issue du point multiple  $O$  rencontre la surface en deux points variables; si l'on projette la surface à partir de  $O$  sur le plan  $t = 0$ , à chaque point  $m$  de ce plan correspondent deux points  $m_1, m_2$  de la surface et ces deux points coïncident lorsque  $m$  se trouve sur le contour apparent de la surface, constitué par les  $(2n+2)$  côtés des polygones en vertu de l'identité (E).

Si donc l'on représente le point  $m$  par les deux paramètres  $\lambda, \lambda'$  des tangentes qu'on peut mener de ce point à la conique

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

et si l'on désigne par  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  les paramètres correspondant respectivement aux côtés des deux polygones, il résulte des considérations précédentes que les coordonnées d'un point de la surface sont des fonctions rationnelles des trois quantités

$$\lambda, \lambda', \sqrt{(\lambda - a_0) \dots (\lambda - b_n)} \sqrt{(\lambda' - a_0) \dots (\lambda' - b_n)}.$$

En d'autres termes, si l'on considère la courbe hyperelliptique de genre  $n$ ,

$$(C_n) \quad \rho^2 = (\lambda - a_0) \dots (\lambda - a_n) (\lambda - b_0) \dots (\lambda - b_n),$$

à tout couple de points de cette courbe répond un point de la surface, et à tout point de la surface répondent deux couples conjugués

$$(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \quad \text{et} \quad (\lambda, -\rho), (\lambda', -\rho').$$

Il est aisé, d'ailleurs, d'expliciter les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de  $(\lambda, \rho)$ ,  $(\lambda', \rho')$  : si l'on choisit pour plans coordonnés  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  les plans qui projettent trois côtés  $a_1, a_2, a_3$  d'un des polygones et si l'on pose

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= (\lambda - a_0) \dots (\lambda - a_n), \\ B(\lambda) &= (\lambda - b_0) \dots (\lambda - b_n), \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - a_1)(\lambda' - a_1), \\ y &= (\lambda - a_2)(\lambda' - a_2), \\ z &= (\lambda - a_3)(\lambda' - a_3), \\ t &= \frac{[A(\lambda)B(\lambda') + B(\lambda)A(\lambda') + 2\rho\rho'](\lambda' - \lambda)}{A(\lambda)B(\lambda') - B(\lambda)A(\lambda')}. \end{aligned}$$

### III.

L'application de la formule fondamentale de M. Picard à la surface particulière

$$(S_n) \quad t_2 f_n(x, y, z) + 2t f_{n+1}(x, y, z) + f_2(x, y, z) f_n(x, y, z) = 0$$

ne présente aucune difficulté.

La surface n'a pas de ligne multiple, mais elle possède, outre le point singulier d'ordre  $n$ , des points doubles isolés, ainsi qu'on le reconnaît par la considération des points doubles du contour apparent; aux points d'intersection des côtés du premier polygone avec ceux du second répondent  $(n + 1)^2$  points doubles de la surface, tandis que les  $n(n + 1)$  sommets des deux polygones complets sont projetés du point O suivant des droites D qui appartiennent à la surface. Dès lors

$$\sum (\mu_i - 1) = (n - 1) + (n + 1)^2.$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} m &\doteq n + 2, \\ N &= 4n^2, \\ p &= \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, la surface ne possédant pas d'intégrale de différentielle

totale de première espèce, on en conclut que

$$r = 0.$$

La valeur du nombre  $\rho$  se déduit aisément des considérations du paragraphe II. Envisageons, en même temps que la surface particulière  $S_n$ , une surface  $S'_n$  du type défini au paragraphe II, sans courbe exceptionnelle; les deux surfaces  $S_n$  et  $S'_n$  admettant une correspondance birationnelle, leurs invariants relatifs  $\rho$  et  $\rho'$  sont liés par la relation (1)

$$(1) \quad \rho + F = \rho' + F',$$

$F$  et  $F'$  désignant, pour chacune des deux surfaces, le nombre des points fondamentaux qui correspondent dans la transformation birationnelle à une courbe exceptionnelle de l'autre surface.

Au cas actuel,  $F = 1$ , car le point multiple  $x = y = z = 0$  de la surface  $S_n$  correspond à la courbe de la surface  $S'_n$  définie par l'équation

$$A(\lambda) B(\lambda') + B(\lambda) A(\lambda') - 2\rho\rho' = 0,$$

ainsi qu'il résulte des expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de  $(\lambda, \rho)$ ,  $(\lambda', \rho')$ .

Inversement, à chacune des  $n(n+1)$  droites  $D$  de la surface  $S_n$  répond un seul point de la surface  $S'_n$ , défini par un couple de  $C_n$  du type

$$(\lambda = a_i, \rho = 0), \quad (\lambda' = a_j, \rho' = 0),$$

ou encore

$$(\lambda = b_i, \rho = 0), \quad (\lambda' = b_j, \rho' = 0) \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

D'autre part, les couples de points conjugués de la courbe  $C_n$  pour lesquels on a

$$\lambda = \lambda' \quad \text{et} \quad \rho = -\rho'$$

définissent une courbe de  $S_n$ , à savoir la conique

$$t = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

(1) Voir PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, p. 412.



tandis qu'ils définissent, par hypothèse, un point unique de la surface  $S'_n$ . Par suite, le nombre  $F'$  est égal à  $[n(n+1)+1]$ .

Dès lors, on déduit de la relation (1) que

$$\rho = n(n+1)+1.$$

Si l'on porte les valeurs précédentes dans la formule de M. Picard,

$$\rho_0 = N + \sum (\mu_i - 1) - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1),$$

on trouve, pour la surface considérée,

$$\rho_0 = 2n^2 - n - 1.$$

Nous parvenons donc au résultat suivant :

*Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance (1, 2) avec les couples de points d'une courbe hyperelliptique de genre  $n$ , supposée non singulière, possèdent  $(2n^2 - n - 1)$  intégrales doubles distinctes de seconde espèce.*

On peut prévoir, *a priori*, la forme de ces intégrales. Envisageons les  $2n$  intégrales abéliennes de seconde espèce de la courbe hyperelliptique  $C_n$ , lesquelles peuvent être ramenées à la forme

$$\int \frac{z^q dz}{\sqrt{P(z)}} \quad (q = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

$P(z)$  étant un polynome de degré  $(2n+1)$ , et formons les combinaisons

$$\int \int \frac{z^q z'^r - z^r z'^q}{\sqrt{P(z)}\sqrt{P(z')}} dz dz' \quad (q, r = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

Ces expressions présentent le caractère d'une intégrale de seconde espèce ; d'ailleurs, elles restent invariables lorsqu'on y remplace respectivement  $[z, \sqrt{P(z)}]$ ,  $[z', \sqrt{P(z')}]$  par  $[z, -\sqrt{P(z)}]$ ,  $[z', -\sqrt{P(z')}]$  ; dès lors, ce sont des intégrales doubles de la surface  $S_n$ . Elles sont au nombre de  $n(2n-1)$ , mais elles se ramènent à  $(2n^2 - n - 1)$  intégrales distinctes, en vertu d'une identité

de Weierstrass fondamentale dans la théorie des intégrales hyper-elliptiques

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\sqrt{P(z)}}{(z' - z)\sqrt{P(z')}} \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\sqrt{P(z')}}{(z - z')\sqrt{P(z)}} \right] = \frac{U(z, z')}{\sqrt{P(z)P(z')}},$$

U étant un polynome en  $z, z'$ .

Toutefois, cette méthode algébrique ne précise pas dans quel cas les intégrales sont réductibles à un nombre moindre, et c'est par une voie toute différente que nous avons reconnu que le cas d'exception est celui où il existe entre les périodes des intégrales abéliennes de la courbe  $C_n$  des relations singulières à coefficients entiers.

---