BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEMONNIER

Mémoire sur la transformation des formes quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 48-76

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__48_1>

Mémoire sur la transformation des formes quadratiques;
par M. H. Lemonnier.

(Séance du 11 novembre 1874)

Les traités de géométrie analytique indiquent, pour les coordonnées ordinaires et celles qui en sont des fonctions linéaires, à quelles conditions les équations de deux droites ou de trois plans donnent deux diamètres conju gués d'une conique, trois plans diamétraux conjugués d'une surface du second degré. Nous n'avons rencontré nulle part l'équation de la ligne ou de la surface exprimée au moyen de celles de deux diamètres conjugués ou de trois plans diamétraux conjugués quelconques.

C'est pourquoi on accueillera, je l'espère, avec quelque intérêt les développements qui suivent, sur certaines transformations d'une forme quadratique.

Le premier problème que nous traitons est celui de passer d'une forme connue en carrés qui soient indépendants les uns des autres à toute autre forme analogue, s'exprimant par les carrés de fonctions données, linéaires par rapport à celles qui entrent dans la première forme. La question est alors d'établir, entre les coefficients de ces fonctions linéaires, des relations nécessaires et suffisantes, et de trouver les facteurs dont les carrés doivent être affectés. Nous traitons en second lieu du problème de passer d'une forme en produits sans carrés, puis de la forme générale, à toute forme possible en carrés, dans des conditions analogues à celles du premier problème. Quant à la transformation d'une somme de carrés en une somme de produits sans carrés, ou de celle d'une somme de produits, nous nous bornons au cas où la première forme dépend seulement de trois fonctions, les formules se compliquant au delà de ce nombre.

Nous terminons la première partie de ce travail par une démonstration fort simple du théorème de M. Hermite sur le maintien de l'espèce, et par l'établissement de ce fait général qu'une forme du second degré à n variables, $\sum a_{ij}x_ix_j$, est réductible à la somme de p carrés, lorsque $n-p$ des dérivées partielles sont des fonctions linéaires des autres.

I

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions de variables, linéaires ou autres, ou plutôt des expressions quelconques susceptibles chacune d'une valeur arbitraire, et soient considérées n fonctions linéaires de ces quantités :

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} u_k,$$

ε_k étant ± 1.

La formule

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

a lieu, n'est même qu'une identité, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

soient satisfaites avec

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2.$$

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

la valeur de U_i étant

$$(2) \qquad U_i = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} u_k.$$

La formule (1) a lieu identiquement, si l'on a pour toutes valeurs, depuis 1 jusqu'à n,

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Il y a là $\frac{n(n+1)}{2}$ relations entre les dénominateurs H_i et les coefficients m_{ij}.

En prenant, par rapport à u_i, les dérivées de (1), on trouve

$$u_i = \frac{U_1 m_{1i}}{H_1} + \frac{U_2 m_{2i}}{H_2} + \dots + \frac{U_n m_{ni}}{H_n};$$

si l'on multiplie par m_{ki} et qu'on fasse la somme de, $i = 1$ à $i = n$, on obtient

$$U_k = \frac{U_1}{H_1} \sum_{i=1}^{i=n} m_{1i} m_{ki} + \frac{U_2}{H_2} \sum_{i=1}^{i=n} m_{2i} m_{ki} + \dots + \frac{U_n}{H_n} \sum_{i=1}^{i=n} m_{ni} m_{ki},$$

ce qui donne

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0,$$

et

$$(4) \qquad H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

si les U_i sont, comme les u_i, indépendants les uns des autres.

Or les n équations (2) déterminent pour $u_1, u_2, \dots, u_n$ des valeurs finies, quand on donne à $U_1, \ldots, U_n$ telles valeurs finies qu'on veut, si le déterminant des coefficients m_{ik}

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. On peut donc, à cette condition, faire que, par des valeurs convenables de $u_1, \ldots, u_n$, les fonctions U_i prennent des valeurs arbitraires, indépendantes les unes des autres. Moyennant cela, les relations (3) entraînent donc les relations (4).

Réciproquement, étant donné les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations qu'implique la relation générale

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

si l'on prend

$$(4) \qquad H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

on aura la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

pourvu que le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Observons d'abord que l'on a

$$M^2 = \begin{vmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ M_{n1} & \ldots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

avec

$$M_{kk} = m_{k1}^2 + m_{k2}^2 + \ldots + m_{kn}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2 = H_k,$$

et

$$M_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

de sorte que

(5) $$M^2 = H_1 H_2 \dots H_n.$$

On voit par là que si M n'est pas nul, il en est de même de $H_1, H_2, \dots, H_n$.
Posons les n équations

(6) $$\sum_{i=1}^{i=n} m_{ik}\alpha_i = A_k.$$

Puisque le déterminant M est différent de zéro, on pourra, en disposant arbitrairement des A_k, obtenir des valeurs finies correspondantes pour α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, et, par conséquent, en attribuant à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des valeurs convenables, on aura pour $A_1, \dots, A_n$ telles valeurs finies qu'on voudra.

Or, si l'on multiplie par $m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kn}$ les n équations (6) et qu'on ajoute, on obtient

$$H_k\alpha_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}A_i,$$

d'où

(7) $$\alpha_k = \frac{1}{H_k}\sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}A_i.$$

On a ainsi n équations nouvelles qui, multipliées par $m_{1h}, m_{2h}, \dots, m_{nh}$ et ajoutées, donnent

$$A_h = A_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{i1}}{H_i} + A_2 \sum_{i=1}^{i=2} \frac{m_{ih}m_{i2}}{H_i} + \dots + A_n \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{in}}{H_i}$$

De là résulte

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{ik}}{H_i} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1;$$

ce sont les formules (3).

On a donc la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

du moment que M est différent de zéro, quand on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi}m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi}^2 = H_h.$$

Il est à remarquer que, d'après cette analyse, les deux groupes de formules s'exprimant l'un par

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi}m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

l'autre par

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{ik}}{H_i} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1.$$

pour

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

sont équivalents à la seule condition que le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Si l'on change u_i en $u_i\sqrt{\varepsilon_i}$, m_{ki} en $m_{ki}\sqrt{\varepsilon_i}$, ε_i étant ± 1, la formule (1) devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

pour

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} u_k,$$

et, à la place des formules (4), on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2;$$

à la place des formules (3)

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k},$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}m_{kj}}{H_k} \qquad (i \gtrless j);$$

on a d'ailleurs

$$M^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} = H_1 H_2 \ldots H_n.$$

Dans cette transformation d'une somme de carrés en une autre, quand les fonctions sont réelles, l'espèce se conserve, c'est-à-dire que le nombre des carrés affectés de coefficients négatifs reste le même. C'est un théorème dont la première démonstration est due à M. Hermite (*Cours d'algèbre supérieure* par J. A. Serret, n° 254, 2[e] édit.). Il peut s'établir avec plus de simplicité comme il suit.

Considérons la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

en y supposant réelles les fonctions u_i et, par suite, les H_i. Supposons qu'on ait là

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots\ldots = \varepsilon_p = 1, \\ \varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{p+2} = \ldots\ldots = \varepsilon_n = -1, \end{gathered}$$

et, d'autre part,

$$\begin{gathered} H_1 > 0,\ H_2 > 0,\ \ldots,\ H_q > 0, \\ H_{q+1} < 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ H_n < 0. \end{gathered}$$

Soit d'abord $q > p$. Si l'on pose

$$U_{q+1} = 0, \quad U_{q+2} = 0, \quad \ldots, \quad U_n = 0,$$

on pourra généralement tirer de ces équations, pour u_{q+1}, u_{q+2}, ..., u_n, des valeurs en fonction de u_1, u_2, ..., u_q. La substitution de ces valeurs dans $\sum \varepsilon_i u_i^2$ n'atteindra pas le terme négatif $\varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2$. Si l'on fait ensuite $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ..., $u_p = 0$, le premier membre de la formule ne sera susceptible que de valeurs négatives, tandis que le second n'ayant plus que des termes positifs sera d'un signe contraire. On ne peut donc avoir $q > p$.

Soit en second lieu $q < p$. Si l'on pose alors

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots, \quad U_q = 0,$$

et qu'on tire de là u_1, u_2, ..., u_q en fonction de u_{q+1}, ..., u_n, pour en substituer les valeurs dans le premier membre, la substitution n'atteindra pas le terme positif $\varepsilon_q u_q^2$. On pourra donc faire que le premier membre soit d'une valeur positive, tandis que le second n'ayant que des termes négatifs ne pourra avoir le même signe.

On ne saurait donc avoir $q < p$. Donc les termes négatifs sont en même nombre des deux côtés.

Dans ce mode de démonstration, nous supposons bien deux déterminants mineurs différents de zéro ; mais un cas d'exception ne peut là faire difficulté, car il serait à considérer comme limite du cas général.

Des conditions à remplir pour qu'une forme quadratique, homogène, de n variables

$$\sum a_{ij} x_i x_j \qquad (a_{ij} \gtrless a_{ji})$$

soit réductible à être une somme de p carrés ; $p < n$.

Soit posé

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{i=p} A_i U_i^2 \qquad (p \gtrless n),$$

U_i étant une fonction linéaire homogène des variables x_k.

Posons $U_i = 0$ pour les p valeurs de i, et tirons de ces équations les valeurs de p des variables en fonction des autres. Si ces valeurs se substituent dans la forme, elle deviendra nulle, quelles que soient les valeurs attribuées aux $n - p$ autres variables.

Il en sera de même pour toute derivée partielle de la fonction $2\sum A_i U_i \frac{dU_i}{dx_k}$. D'après quoi, si l'on égale à zéro p des n dérivées de la forme par rapport aux variables, et qu'on tire des p équations les valeurs de p des variables en fonctton des autres, la substitution de ces valeurs dans les autres dérivées conduira à des résultats nuls, quelles que soient les valeurs attribuées à ces autres variables.

Réciproquement, la fonction du second degré est une somme de p carrés, lorsque les valeurs de p des variables tirées des équations qu'on obtient en égalant à zéro p des n dérivées annulent les autres identiquement. Cela revient encore à ce que $n - p$ des dérivées soient des combinaisons linéaires des p autres, alors qu'aucune de celles-ci ne l'est des $p - 1$ autres.

Soient, en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les variables qui s'expriment par les autres au moyen de p dérivées égalées à zéro. L'hypothèse est que les valeurs de ces variables ainsi obtenues annulent toutes les dérivées, quelques valeurs qu'on attribue à $x_{p+1}, \ldots, x_n$. En général, on pourra façonner la fonction en une somme de carrés, en nombre n au plus, tels que x_1 entre dans le premier seul, x_2 dans le deuxième, sans être dans les suivants, qu'il soit ou non dans le premier, x_3 dans le troisième, sans appartenir à ceux qui le suivent, étant ou non dans les précédents, et ainsi de suite. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_n$ les fonctions dont on a ainsi les carrés, abstraction faite des coefficients.

Prenons les dérivées de la forme par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La première ne dépendra que de X_1, la deuxième de X_1 et de X_2, la troisième de X_1, X_2, X_3, etc., et elles en seront des fonctions linéaires. Or les expressions des p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonction des autres qui annulent les dérivées, pour toutes valeurs de ces dernières variables, annuleront alors X_1, et par suite X_2, puis X_3, etc., jusqu'à X_p, ainsi que $X_{p+1}, \ldots, X_n$. Mais ces dernières fonctions étant indépendantes des p variables en question, c'est identiquement qu'elles sont nulles, sans aucune substitution. Donc la forme quadratique est la somme de p carrés. Elle pourra d'ailleurs se transformer d'autre façon en somme de p carrés.

C'est ainsi qu'une forme quadratique est réductible à un seul carré, quand la valeur d'une variable tirée d'une dérivée égalée à zéro annule toutes les autres, ou, ce qui revient au même, quand les dérivées sont proportionnelles à des constantes. Sous ce dernier énoncé, le théorème, du reste, s'étend à une fonction homogène quelconque de plusieurs variables de degré K, en ce qu'elle est alors la puissance du degré K d'une fonction linéaire des variables.

II

Proposons-nous d'abord de transformer

$$2\sum u_i u_j$$

en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, alors que les nombres k, i et j sont variables de 1 à n, i se prenant plus petit que j.

Soit posé

$$(1) \qquad 2\sum u_i u_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \qquad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} u_i.$$

La formule (1), comme identité, implique les relations

$$(3) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i}$$

et

$$(3) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} \qquad (h \gtrless k).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i, on obtient

$$(4) \qquad \sum u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \qquad (j \gtrless i).$$

Comme i est susceptible de n valeurs 1, 2, ..., n, il y a n formules de ce genre. Multiplions-les par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et ajoutons ; il s'ensuit

$$(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)u_1 + (\lambda_3 + \ldots + \lambda_n + \lambda_1)u_2 + \ldots + (\lambda_1 + \ldots \lambda_{n-1})u_n$$
$$= \frac{U_1}{H_1} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k m_{ik} + \frac{U_2}{H_2} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k m_{2k} + \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= m_{h1}, \\ \lambda_3 + \ldots + \lambda_1 &= m_{h2}, \\ \ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} &= m_{hn}, \end{aligned}$$

on a, par l'addition,

$$(n-1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk} = S_h,$$

ou

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \frac{1}{n-1} S_h,$$

par suite

$$\lambda_i = \frac{1}{n-1} S_h - m_{hi},$$

et la formule S devient

$$U_h = \frac{U_1}{H_1} \sum_{k=1}^{k=n} m_{1k} \left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right) + \frac{U_2}{H_2} \sum_{k=1}^{k=n} m_{2k} \left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{U_n}{H_n} \sum_{k=1}^{k=n} m_{nk} \left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right),$$

ce qui peut se changer en

$$U_h = \frac{U_1}{H_1} \left(\frac{S_h S_1}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{1k} m_{hk}\right) + \frac{U_2}{H_2} \left(\frac{S_h S_2}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{2k} m_{hk}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{U_n}{H_n} \left(\frac{S_h S_n}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{nk} m_{hk}\right).$$

Il en résulte

$$(7) \qquad H_h = \frac{1}{n-1} S_h^2 - \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk}^2,$$

et

$$(7) \qquad 0 = \frac{1}{n-1} S_h S_i - \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk} m_{ik} \qquad (h \gtrless 1).$$

Nous trouvons ainsi, avec les expressions de H_h, $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (7).

Réciproquement, ces relations (7), eu égard aux expressions H_h, entraînent les relations (3), et par conséquent la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons en effet

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{kh}\alpha_k = A_h,$$

h étant susceptible des valeurs $1, 2, \dots, n$.

Si l'on multiplie les n égalités par $\frac{1}{n-1} S_g - m_{g1}, \dots, \frac{1}{n-1} S_g - m_{gn}$, et qu'on ajoute, on obtient

$$H_g\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi}\right),$$

d'où

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{H_g} \left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi}\right).$$

Considérons les égalités de ce genre répondant à $g = 1, 2, \dots, n$, multiplions-les par $m_{1h}, m_{2h}, \dots, m_{nh}$ et ajoutons les résultats; il s'ensuit

$$A_h = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{ki}\right) \right\}.$$

Comme, d'après les hypothèses faites, $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont susceptibles de telles valeurs qu'on veut, cette égalité se partage en

$$1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_n - m_{hk}\right),$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{kj}\right) \qquad (i \gtrless j).$$

Or, si l'on pose

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k},$$

ces n relations peuvent s'écrire

$$1 = \frac{1}{n-1}\left(M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{h,h-1} + M_{h,h+1} + \dots + M_{hn}\right) - \frac{n-2}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h1} + \frac{1}{n-1}\left(M_{h2} + M_{h3} + \dots M_{hn}\right) - \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h2} + \frac{1}{n-1}\left(M_{h1} + M_{h3} + \dots + M_{hn}\right) + \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

M_{hh} manquant dans la parenthèse.

En soustrayant de la première relation chacune des autres, on a, à la place de celles-ci,

$$1 = M_{h1} - M_{hh},$$
$$1 = M_{h2} - M_{hh},$$
$$\dots\dots,$$

d'où, par l'addition,

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{hn}) - (n-1)M_{hh}.$$

La première relation étant

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{hn}) - (n-2)M_{hh},$$

il s'ensuit

$$M_{hh} = 0$$

et

$$M_{hi} = 1 \qquad (h \gtrless i).$$

Les relations (3) sont ainsi obtenues.

Les relations (3) et les relations (7) sont, en conséquence, équivalentes, eu égard à la valeur générale de H_h et aux conditions exprimées.

En second lieu, soit proposé de transformer

$$2\sum a_{ij}u_iu_j,$$

alors que i est différent de j en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, les u_i étant indépendants les uns des autres, ainsi que les U_k.

Soit posé

$$(1) \qquad 2\sum a_{ij}u_iu_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \qquad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}u_i;$$

c'est avoir

$$(3) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$

$$(3) \qquad a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{ik}}{H_i} \qquad (h \gtrless k).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i, on trouve

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki}\frac{U_k}{H_k},$$

j étant différent de i, ou $a_{ii} = 0$.

Comme i est susceptible des n valeurs 1, 2, 3, ..., n, il y a n équations de ce genre. Multiplions-les par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \ldots, \lambda_{hn}$ et ajoutons ; il s'ensuivra

$$(5) \qquad U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i}\left(\sum_{k=1}^{k=1} \lambda_{hk} m_{ik}\right),$$

en posant

$$(6) \quad a_{1i}\lambda_{h1} + a_{2i}\lambda_{h2} + \ldots + a_{i-1,i}\lambda_{h,i-1} + a_{i+1,i}\lambda_{h,i+1} + \ldots + a_{ni}\lambda_{hn} = m_{hi},$$

i variable de 1 à n.

Ces équations (6) donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta\lambda_{hi} = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \ldots & m_{hi} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & m_{hn} & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

et l'équation (5) se partage en

$$(7) \qquad H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$

$$(7) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \qquad (h \gtrless k),$$

de sorte qu'avec les expressions de H_h, il y a là $\frac{n(n-1)}{2}$ relations.

Réciproquement, ces relations, en ayant égard aux expressions des H_h, entraînent les relations (3), par suite la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons, en effet,

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{hk}\alpha_k = A_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

et multiplions ces égalités par λ_{g1}, λ_{g2}, ..., λ_{gn}, puis ajoutons ; nous aurons

$$\mathrm{H}_g \alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i \lambda_{gi},$$

d'où

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i \frac{\lambda_{gi}}{\mathrm{H}_g};$$

et de là, en faisant $g = 1, 2, \ldots, n$ et multipliant par m_{1h}, m_{2h}, ...,

$$\mathrm{A}_h = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{hk}}{\mathrm{H}_k} \lambda_{ki} \right),$$

ce qui se partage en

$$1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{\mathrm{H}_i} \lambda_{ih},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{\mathrm{H}_i} \lambda_{ik} \qquad (h \gtrless k),$$

La première de ces deux relations peut se développer moyennant la valeur de λ_{ih} en

$$\alpha_{h1}\beta_{h1} - \alpha_{h2}\beta_{h2} + \ldots \pm \alpha_{hn}\beta_{hn} = \left(\frac{m_{11}m_{1h}}{\mathrm{H}_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{\mathrm{H}_2} + \ldots \right) \beta_{h1}$$
$$- \left(\frac{m_{12}m_{1h}}{\mathrm{H}_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{\mathrm{H}_2} + \ldots \right) \beta_{h2} + \ldots,$$

ce qui est satisfait par

$$\alpha_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}m_{ih}}{\mathrm{H}_i},$$

et

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{\mathrm{H}_i}.$$

Il en est de même des autres formules du premier groupe.

La première de celles du second, se développant en

$$0 = \left(\frac{m_{11}m_{1h}}{\mathrm{H}_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{\mathrm{H}_2} + \ldots \right) \beta_{k1} - \left(\frac{m_{12}m_{1h}}{\mathrm{H}_1} + \frac{m_{22}m_{2h}}{\mathrm{H}_2} + \ldots \right) \beta_{k2} + \ldots,$$

revient également, moyennant les mêmes conditions, à

$$0 = a_{h1}\beta_{k1} - a_{h2}\beta_{k2} + \ldots,$$

ce qui a lieu, h étant différent de k ; et de même pour les autres.

D'ailleurs, il n'y a pas d'autre solution ; car, à prendre pour inconnues les n expressions

$$\mathrm{M}_{kh} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}m_{ih}}{\mathrm{H}_i},$$

le déterminant des n équations est

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1} \gtrless 0.$$

La réciproque à établir est ainsi démontrée.

Cette analyse est de tout point applicable à la fonction complète du second degré

$$\sum a_{ij} u_i u_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

i et j variables de 1 à n, sauf à remplacer, dans Δ et $\Delta\lambda_{hi}$, les éléments 0 par $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Car si l'on pose

$$\text{(1)} \qquad \sum a_{ij} u_i u_j = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k^2}{H_k},$$

on aura, pour la dérivée par rapport à u_i,

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} u_j = \sum_{k=n}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k}.$$

En multipliant par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{hn}$ les n équations de cette sorte, et les ajoutant, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} \lambda_{hk} \right) u_i = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} \left(\sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \right),$$

d'où

$$U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{hk} m_{ik} \right),$$

en déterminant les λ_{hk} par les équations

$$\sum_{t=1}^{t=n} a_{ik} \lambda_{ht} = m_{hk},$$

qui donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta\lambda_{hi} = \begin{vmatrix} a_{11} & m_{h1} & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & m_{hn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et l'on a par là

$$H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$
$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \qquad (h \gtrless k).$$

Réciproquement, on pourra déduire de ces relations, comme plus haut,

$$a_{kk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$
$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i},$$

et par conséquent la formule (1).

III

Transformation de $u^2 + v^2 + w^2$ *en* $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$
$$V = m'u + n'v + p'w,$$
$$W = m''u + n''v + p''w.$$

Avoir la formule (1) pour toutes valeurs de u, v, w, c'est avoir

$$(2) \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}, \\ 1 &= \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''}, \\ 1 &= \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''}, \end{aligned}$$

et

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + m''n'}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''} &= 0, \\ \frac{np' + pn'}{H} + \frac{n'p'' + p'n''}{H'} + \frac{n''p + p''n}{H''} &= 0, \\ \frac{pm' + mp'}{H} + \frac{p'm'' + m'p''}{H'} + \frac{p''m + m''p}{H''} &= 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
2u &= \frac{mV + m'U}{H} + \frac{m'W + m''V}{H'} + \frac{m''U + mW}{H''},\\
2v &= \frac{nV + m'U}{H} + \frac{n'W + n''V}{H'} + \frac{n''U + nW}{H''},\\
2w &= \frac{pV + p'U}{H} + \frac{p'W + p''V}{H'} + \frac{p''U + pW}{H''},
\end{aligned}
$$

d'où, en multipliant par m, n, p et ajoutant,

$$
(5)\quad 2U = \frac{(m^2+n^2+p^2)V+(mm'+nn'+pp')U}{H} + \frac{(mm'+nn'+pp')W+(mm''+nn''+pp'')V}{H'} + \frac{(mm''+nn''+pp'')U+(m^2+n^2+p^2)W}{H''},
$$

relation qui se partage en

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
2 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp''}{H''},\\
0 &= \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp''}{H'},\\
0 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H'} + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H''},
\end{aligned}
$$

si U, V, W peuvent être quelconques, c'est-à-dire si l'on a

$$
\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \gtrless 0.
$$

Résolvons ces équations par rapport à $\frac{1}{H}, \frac{1}{H'}, \frac{1}{H''}$. Le déterminant est

$$
\Delta_1 = 2(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2),
$$

et l'on trouve

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 \frac{1}{H} &= 2(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2),\\
\Delta_1 \frac{1}{H'} &= -\,2(m^2 + n^2 + p^2),\\
\Delta_1 \frac{1}{H''} &= 2(m^2 + n^2 + p^2)(mm' + nn' + pp'),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
H &= mm' + nn' + pp',\\
H' &= -\frac{(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' pp'')}{m^2 + n^2 + p^2}\\
H'' &= mm'' + nn'' + pp''.
\end{aligned}
$$

A l'aide des facteurs m', n', p', on tire de même des équations (4)

$$H' = m'm'' + n'n'' + p'p'',$$
$$H'' = -\frac{(m'm'' + n'n'' + p'p'')(m'm + n'n + p'p)}{m'^2 + n'^2 + p'^2},$$
$$H = m'm + n'n + p'p,$$

et, à l'aide des facteurs m'', n'', p'',

$$H'' = m''m + n''n + p''p,$$
$$H = -\frac{(m''m + n''n + p''p)(m''m' + n''n' + p''p')}{m''^2 + n''^2 + p''^2},$$
$$H' = m''m' + n''n' + p''p'.$$

On a ainsi

$$(8) \qquad \begin{aligned} H &= mm' + nn' + pp', \\ H' &= m'm'' + n'n'' + p'p'', \\ H'' &= m''m + n''n + p''p, \end{aligned}$$

et

$$(8) \qquad \begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= -\frac{HH''}{H'}, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= -\frac{H'H}{H''}, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= -\frac{H''H'}{H}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$H^2 = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2),$$
$$H'^2 = (m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2),$$
$$H''^2 = (m''^2 + n''^2 + p''^2)(m^2 + n^2 + p^2),$$

et

$$-HH'H'' = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2).$$

Par suite, il faut

$$(9) \qquad \begin{aligned} H &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}, \\ H' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}, \\ H'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$(9) \qquad \begin{aligned} H &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}, \\ H' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}, \\ H'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \end{aligned}$$

chaque radical pouvant d'ailleurs se prendre implicitement avec tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle on a donc

$$(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)-(mm'+nn'+pp')^2=0,$$

ou

$$(mn'-m'n)^2+(np'-pn')^2+(pm'-mp')^2=0,\ \dots;$$

par où l'on voit que m, n, p ne peuvent être réels à la fois.

Réciproquement, étant données les expressions (8) de H, H', H'' et les relations (9), les formules (2) et (3) en seront les conséquences, par suite la formule (1), si aucune des quantités H, H', H'' n'est nulle, ni le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}.$$

Posons, en effet,

$$(10)\qquad \begin{aligned} m\alpha+m'\beta+m''\gamma&=A,\\ n\alpha+n'\beta+n''\gamma&=B,\\ p\alpha+p'\beta+p''\gamma&=C. \end{aligned}$$

En disposant de α, β, γ, les quantités A, B, C pourront être de toutes valeurs, le déterminant Δ étant différent de zéro.

Multiplions ces équations par m, n, p, puis ajoutons. En tenant compte des relations (8), on trouve

$$-\frac{HH''}{H'}\alpha+H\beta+H''\gamma=mA+nB+pC.$$

On a de même par m', n' p', et par m'', n'', p'',

$$H\alpha-\frac{H'H}{H''}\beta+H'\gamma=m'A+n'B+p'C,$$

$$H''\alpha+H'\beta-\frac{H''H'}{H}m''A+n''B+p''C.$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ. Le déterminant est

$$\Delta_1=4HH'H'',$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} 2\alpha&=\frac{m'A+n'B+p'C}{H}+\frac{m''A+n''B+p''C}{H''};\\ 2\beta&=\frac{m''A+n''B+p''C}{H'}+\frac{mA+nB+pC}{H},\\ 2\gamma&=\frac{mA+nB+pC}{H''}+\frac{m'A+n'B+p'C}{H'}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par m, m', m'' et ajoutant, on tire

$$2A = 2\left(\frac{mn'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}\right)A + \left(\frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''}\right)B$$
$$+ \left(\frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + p'm''}{H'} + \frac{m''p + p''m}{H''}\right)C,$$

ce qui donne

$$1 = \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''},$$
$$0 = \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''},$$
$$0 = \frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + m''p'}{H'} + \frac{m''p + np''}{H''}.$$

On obtiendra d'une façon semblable les autres formules (2) et (3).

Remarque. — Quand u, v, w sont des fonctions du premier degré en x, y, z, l'équation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ donne un cône, et les équations $U = 0$, $V = 0$ deux plans passant au sommet du cône. L'intersection des deux plans est sur le cône si l'on a à la fois

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$
$$mu + nv + pw = 0,$$
$$m'u + n'v + pw = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn' - m'n}.$$

puis

$$(np' - pn')^2 + (pm' - mp')^2 + (mn' - m'n)^2 = 0.$$

Les relations (9) ont par là une signification géométrique.

Si l'on change u, v, w en $u\sqrt{\varepsilon}$, $v\sqrt{\varepsilon'}$, $w\sqrt{\varepsilon''}$, m, n, p en $m\sqrt{\varepsilon}$, $n\sqrt{\varepsilon'}$, $p\sqrt{\varepsilon''}$, ε, ε', ε'' étant ± 1, la formule (1) devient

$$\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + \varepsilon'' w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

avec

$$U = \varepsilon mu + \varepsilon' nv + \varepsilon'' pw,$$
$$V = \varepsilon m'u + \varepsilon' n'v + \varepsilon'' p'w,$$
$$W = \varepsilon m''u + \varepsilon' n''v + \varepsilon'' p''w.$$

et l'on a

$$H = \varepsilon mm' + \varepsilon' nn' + \varepsilon'' pp',$$
$$H' = \varepsilon m'm'' + \varepsilon' n'n'' + \varepsilon'' p'p'',$$
$$H'' = \varepsilon m''m + \varepsilon' n''n + \varepsilon'' p''p,$$

$$\varepsilon m^2 + \varepsilon' n^2 + \varepsilon'' p^2 = -\frac{HH''}{H'},$$

$$\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2 = -\frac{H'H}{H''},$$

$$\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2 = -\frac{H''H'}{H},$$

puis

$$H = -\sqrt{\varepsilon m^2 + \varepsilon' n^2 + \varepsilon'' p^2}\sqrt{\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2},$$

$$H' = -\sqrt{\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2}\sqrt{\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2},$$

$$H'' = -\sqrt{\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2}\sqrt{\varepsilon m^2 + \varepsilon' m^2 + \varepsilon'' p^2},$$

ou les mêmes expressions avec changement de signe pour H′ et H″, chaque radical impliquant d'ailleurs tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle, c'est avoir

$$\varepsilon(np' - pn')^2 + \varepsilon'(pm' - mp')^2 + \varepsilon''(mn' - m'n)^2 = 0,$$

$$\varepsilon(n'p'' - p'n'')^2 + \varepsilon'(p'm'' - m'p'')^2 + \varepsilon''(m'n'' - m''n')^2 = 0,$$

$$\varepsilon(n''p - p''n)^2 + \varepsilon'(p''m - m''p)^2 + \varepsilon''(m''n - mn'')^2 = 0.$$

Les formules (2) deviennent

$$\varepsilon = \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''},$$

$$\varepsilon' = \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''},$$

$$\varepsilon'' = \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''},$$

et les formules (3) restent les mêmes.

IV

Transformation de $uv + vw + wu$ *en* $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \qquad uv + vw + wu = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$

$$V = m'u + n'v + p'w,$$

$$W = m''u + n''v + p''w,$$

u, v, w étant des quantités indépendantes les unes des autres.

Cette formule implique les relations

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} = 0, \\ &\frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''} = 0, \\ &\frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''} = 0, \end{aligned}$$

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{mn'+m'n}{\mathrm{H}}+\frac{m'n''+n'm''}{\mathrm{H}'}+\frac{m''n+mn''}{\mathrm{H}''}=1,\\
&\frac{np'+pn'}{\mathrm{H}}+\frac{n'p''+p'n''}{\mathrm{H}'}+\frac{n''p+p''n}{\mathrm{H}''}=1,\\
&\frac{pm'+mp'}{\mathrm{H}}+\frac{p'm''+m'p''}{\mathrm{H}'}+\frac{p''m+m''p}{\mathrm{H}''}=1.
\end{aligned}
$$

On tire de (1), par dérivation,

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
v+w&=\frac{m\mathrm{V}+m'\mathrm{U}}{\mathrm{H}}+\frac{m'\mathrm{W}+m''\mathrm{V}}{\mathrm{H}'}+\frac{m''\mathrm{U}+m\mathrm{W}}{\mathrm{H}''},\\
w+u&=\frac{n\mathrm{V}+n'\mathrm{U}}{\mathrm{H}}+\frac{n'\mathrm{W}+n''\mathrm{V}}{\mathrm{H}'}+\frac{n''\mathrm{U}+n\mathrm{W}}{\mathrm{H}''},\\
u+v&=\frac{p\mathrm{V}+p'\mathrm{U}}{\mathrm{H}}+\frac{p'\mathrm{W}+p''\mathrm{V}}{\mathrm{H}'}+\frac{p''\mathrm{U}+p\mathrm{W}}{\mathrm{H}''},
\end{aligned}
$$

d'où, en multipliant par λ, μ, ν et ajoutant,

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
(\mu+\nu)u+(\nu+\lambda)v+(\lambda+\mu)w=&\left\{\lambda\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H}''}\right)+\mu\left(\frac{n'}{\mathrm{H}}+\frac{n''}{\mathrm{H}''}\right)+\nu\left(\frac{p'}{\mathrm{H}}+\frac{p''}{\mathrm{H}''}\right)\right\}\mathrm{U}\\
&+\left\{\lambda\left(\frac{m}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H}''}\right)+\mu\left(\frac{n''}{\mathrm{H}'}+\frac{n}{\mathrm{H}}\right)+\nu\left(\frac{p''}{\mathrm{H}'}+\frac{p}{\mathrm{H}}\right)\right\}\mathrm{V}\\
&+\left\{\lambda\left(\frac{m}{\mathrm{H}''}+\frac{m'}{\mathrm{H}'}\right)+\mu\left(\frac{n}{\mathrm{H}''}+\frac{n'}{\mathrm{H}'}\right)+\nu\left(\frac{p}{\mathrm{H}''}+\frac{p'}{\mathrm{H}'}\right)\right\}\mathrm{W}.
\end{aligned}
$$

Si l'on pose

$$\mu+\nu=m,\quad \nu+\lambda=n,\quad \lambda+\mu=p,$$

d'où

$$\lambda=\frac{n+p-m}{2},\quad \mu=\frac{p+m-n}{2},\quad \nu=\frac{m+n-p}{2},$$

on aura, par cette équation (5),

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
1&=\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H}''}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n'}{\mathrm{H}}+\frac{n''}{\mathrm{H}''}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p'}{\mathrm{H}}+\frac{p''}{\mathrm{H}''}\right)\frac{m+n-p}{2},\\
0&=\left(\frac{m''}{\mathrm{H}'}+\frac{m}{\mathrm{H}}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n''}{\mathrm{H}'}+\frac{n}{\mathrm{H}}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p''}{\mathrm{H}'}+\frac{p}{\mathrm{H}}\right)\frac{m+n-p}{2},\\
0&=\left(\frac{m}{\mathrm{H}''}+\frac{m'}{\mathrm{H}'}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n}{\mathrm{H}''}+\frac{n'}{\mathrm{H}'}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p}{\mathrm{H}''}+\frac{p'}{\mathrm{H}''}\right)\frac{m+n-p}{2}.
\end{aligned}
$$

Posons, pour abréger,

$$m'\frac{n+p-m}{2}+n'\frac{p+m-n}{2}+p'\frac{m+n-p}{2}=[mm']=[m'm],$$

c'est aussi

$$\frac{1}{2}(m'+n'+p')(m+n+p)-(mm'+nn'+pp')=\frac{1}{2}\mathrm{SS}'-(mm'+nn'+pp').$$

On aura de même

$$[m'm''] = [m''m'] = \frac{1}{2}S''S' - (m'm'' + n'n'' + p'p''),$$

$$[m''m] = [mm''] = \frac{1}{2}SS'' - (m''m + n''n + p''p),$$

$S^{(i)}$ désignant $m^{(i)} + n^{(i)} + p^{(i)}$.

Les équations (6) deviennent par là

$$(6) \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H}[m'm] + \frac{1}{H''}[m''m], \\ 0 &= \frac{1}{H}[mm] + \frac{1}{H'}[m''m], \\ 0 &= \frac{1}{H'}[m'm] + \frac{1}{H''}[mm], \end{aligned}$$

et l'on a pareillement

$$(6)' \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H'}[m''m'] + \frac{1}{H}[mm'], \\ 0 &= \frac{1}{H'}[m'm'] + \frac{1}{H''}[mm'], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[m''m'] + \frac{1}{H}[m'm'], \end{aligned}$$

et

$$(6)'' \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H''}[mm''] + \frac{1}{H'}[m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[m''m''] + \frac{1}{H}[m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[mm''] + \frac{1}{H'}[m''m'']. \end{aligned}$$

Sur ces relations, les trois premières donnent

$$\Delta = 2[mm'][mm''][mm],$$

$$\Delta\frac{1}{H} = [mm''][mm],$$

d'où

$$H = 2[mm'].$$

Par les autres, il vient de même

$$(7) \qquad \begin{aligned} H' &= 2[m'm''], \\ H'' &= 2[m''m]. \end{aligned}$$

Comme l'on a

$$0 = \frac{1}{H}[mm] + \frac{1}{H'}[m''m],$$

il s'ensuit

$$0 = \frac{[mm]}{[mm']} + \frac{[m''m]}{[m'm'']},$$

ou

$$[mm'][mm''] + [m'm''][mm] = 0,$$

et de même

$$(8) \qquad \begin{array}{l} [m'm''][m'm] + [m''m][m'm'] = 0, \\ [m''m][m''m'] + [mm'][m''m''] = 0. \end{array}$$

On peut déduire des deux premières de ces relations

$$[mm']^2 = [mm][m'm'],$$

et l'on a de même

$$(8)' \qquad \begin{array}{l} [m'm'']^2 = [m'm'][m''m''], \\ [m''m]^2 = [m''m''][mm]. \end{array}$$

Ces systèmes (8) et (8)' sont équivalents, du moment que $[mm']$, $[m'm'']$, $[m''m]$ ou H, H', H'' sont différents de zéro.

Les relations (8)' peuvent s'obtenir immédiatement par une autre voie, mais sous une forme différente.

D'après la formule (1), si l'on pose $U = 0$, $V = 0$, il s'ensuit $uv + vw + wu = 0$. On doit donc avoir à la fois

$$\begin{array}{l} mu + nv + pw = 0, \\ m'u + n'v + p'w = 0, \\ uv + vw + wu = 0. \end{array}$$

De là

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn - m'n},$$

puis

$$(np' - pn')(pm' - p'm) + (pm' - mp')(mn' - m'n) + (mn' - nm')(np' - pn') = 0.$$

On a de même

$$\begin{array}{r} (n'p'' - p'n'')(p'm'' - m'p'') + (p'm'' - m'p'')(m'n'' - m''n') \\ + (m'n'' - m''n')(n'p'' - p'n'') = 0, \end{array}$$

$$(n''p - p''n)(p''m - m''p) + (p''m - m''p)(m''n - mn'') + (m''n - mn'')(n''p - p''n) = 0.$$

On a d'après cela l'identité

$$\begin{aligned} &(np' - pn')(pm' - mp') + (pm' - mp')(mn' - m'n) + (mn' - m'n)(np' - pn') \\ &\qquad = [mm][m'm'] - [mm']^2 \\ &= (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 \\ &\quad + (m + n + p)(m' + n' + p')(mm' + nn' + pp') - \frac{1}{2}(m + n + p)^2(m'^2 + n'^2 + p'^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(m' + n' + p')^2(m^2 + n^2 + p^2). \end{aligned}$$

Réciproquement, quand les relations (8) sont satisfaites, les relations (2) et (3) s'ensuivent, pourvu que les expressions (7) de H, H', H'', ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} m\,n\,p \\ m'\,n'\,p' \\ m''\,n''\,p'' \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Observons d'abord que ces relations reviennent à

$$\begin{aligned}
[mm] + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{HH''}}{\mathrm{H'}} &= 0, \\
[m'm'] + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H'H}}{\mathrm{H''}} &= 0, \\
[m''m''] + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H''H'}}{\mathrm{H}} &= 0.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
m\alpha + m'\beta + m''\gamma &= 0, \\
n\alpha + n'\beta + n''\gamma &= 0, \\
p\alpha + p'\beta + p''\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations par les coefficients de m, n, p dans $[mm]$, et ajoutons ; nous aurons

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{HH''}}{\mathrm{H'}}\alpha + [mm']\beta + [mm'']\gamma &= \mathrm{A}\frac{n+p-m}{2} + \mathrm{B}\frac{p+m-n}{2} + \mathrm{C}\frac{m+n-p}{2} = \mathrm{G}, \\
[m'm]\alpha - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H'H}}{\mathrm{H''}}\beta + [m'm'']\gamma &= \mathrm{A}\frac{n'+p'-m'}{2} + \mathrm{B}\frac{p'+m'-n'}{2} + \mathrm{C}\frac{m'+n'-p'}{2} = \mathrm{G'}, \\
[m''m]\alpha + [m''m']\beta - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H''H'}}{\mathrm{H}}\gamma &= \mathrm{A}\frac{n''+p''-m''}{2} + \mathrm{B}\frac{p''+m''-n''}{2} + \mathrm{C}\frac{m''+n''-p''}{2} = \mathrm{G''}.
\end{aligned}$$

Or le déterminant de α, β, γ dans ces nouvelles relations est

$$\Delta = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -\frac{\mathrm{HH''}}{\mathrm{H'}} & \mathrm{H} & \mathrm{H'} \\ \mathrm{H} & -\frac{\mathrm{H'H}}{\mathrm{H''}} & \mathrm{H'} \\ \mathrm{H''} & \mathrm{H'} & -\frac{\mathrm{H''H'}}{\mathrm{H}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{HH'H''}.$$

Il est ainsi différent de zéro, si H, H', H'' le sont eux-mêmes.

On trouve d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= 2\mathrm{G'}[mm''][m'm''] + 2\mathrm{G''}[mm'][m''m'], \\
\Delta\beta &= 2\mathrm{G''}[m'm][m''m] + 2\mathrm{G}[m'm''][mm''], \\
\Delta\gamma &= 2\mathrm{G}[m''m'][mm'] + 2\mathrm{G'}[m''m][m'm].
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}HH'H''A = \frac{1}{2}G(m'H'H'' + m''H'H) + \frac{1}{2}G'(m''H''H + mH''H') + \frac{1}{2}G''(mHH' + m'HH''),$$

puis

$$A = G\left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right) + G'\left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right) + G''\left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right).$$

Or si

$$\begin{vmatrix} m\, n\, p \\ m'\, n'\, p' \\ m''\, n''\, p'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, A, B, C sont susceptibles de valeurs quelconques, moyennant des valeurs convenables de α, β, γ. On a donc là une identité, d'où résulte

$$1 = \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{n+p-m}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{n'+p'-m'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{n''+p''-m''}{2};$$

$$0 = \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{p+m-n}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{p'+m'-n'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{p''+m''-n''}{2},$$

$$0 = \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{m+n-p}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{m'+n'-p'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{m''+n''-p''}{2}.$$

On obtiendra de même d'autres formes analogues.

D'après cela, si l'on pose

$$\frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} = M,$$

$$\frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''} = N,$$

$$\frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''} = P,$$

et

$$\frac{mn'+m'n}{H} + \frac{m'n''+m''n'}{H'} + \frac{m''n+mn''}{H''} = \mu,$$

$$\frac{np'+pn'}{H} + \frac{n'p''+p'n''}{H'} + \frac{n''p+pn''}{H} = \nu,$$

$$\frac{pm'+mp'}{H} + \frac{p'm''+m'p''}{H'} + \frac{p''m+m''p}{H''} = \varpi,$$

les relations précédentes sont

$$1 = \frac{\mu}{2} + \frac{\varpi}{2} - M,$$

$$0 = \frac{\varpi}{2} - \frac{\mu}{2} + M,$$

$$0 = \frac{\mu}{2} - \frac{\varpi}{2} + M,$$

et les analogues sont

$$1=\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}-N,$$

$$0=\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+N,$$

$$0=\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+N,$$

puis

$$1=\frac{\varpi}{2}+\frac{\nu}{2}-P,$$

$$0=\frac{\nu}{2}-\frac{\varpi}{2}+P,$$

$$0=\frac{\varpi}{2}-\frac{\nu}{2}+P.$$

On en déduit

$$M=0,\quad N=0,\quad P=0,$$
$$\mu=1,\quad \nu=1,\quad \varpi=0,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve les relations (2) et (3).

Au résumé, les relations d'où dépend la transformation

$$uv+vw+wu=\frac{UV}{H}+\frac{VW}{H'}+\frac{WU}{H''},$$

pour

$$U=mu+nv+pw,$$
$$V=m'u+n'v+p'w,$$
$$W=m''u+n''v+p''w,$$

si l'on pose

$$[m^{(i)}m^{(j)}]=m^{(i)}\frac{n^{(j)}+p^{(j)}-m^{(j)}}{2}+n^{(i)}\frac{p^{(j)}+m^{(j)}-n^{(j)}}{2}+p^{(i)}\frac{m^{(j)}+n^{(j)}-p^{(j)}}{2},$$

consistent en

$$H=2[mm'],\quad H'=2[m'm''],\quad H''=2[m''m],$$

et

$$[mm]+\frac{1}{2}\frac{H''H}{H'}=0,$$

$$[m'm']+\frac{1}{2}\frac{HH'}{H''}=0,$$

$$[m''m'']+\frac{1}{2}\frac{H'H''}{H}=0,$$

ou bien

$$[mm][m'm']-[mm']^2=0,$$
$$[m'm'][m''m'']-[m'm'']^2=0,$$
$$[m''m''][mm]-[m''m]^2=0.$$

Pour la transformation de

$$u^2+v^2+w^2+t^2$$

en

$$\frac{UV}{H}+\frac{UW}{H'}+\frac{UT}{H''}+\frac{VW}{H'''}+\frac{VT}{H^{IV}}+\frac{WT}{H^{V}},$$

si l'on a

$$\begin{array}{ll} U=mu\ +nv+pw+qt, & V=m'u\ +\ldots+q't \\ W=m''u+\ldots\ldots\ldots+q''t, & T=m'''u+\ldots+q'''t, \end{array}$$

nous nous bornerons à faire observer qu'après avoir obtenu par des dérivations les expressions de $2u$, $2v$, $2w$, $2t$ en fonction de U, V, W, T, on obtient, par des valeurs de 2U, 2V, 2W, 2T, entre autres relations, les suivantes à l'égard de H, H', H'',

$$\begin{aligned}
2&=\frac{mm'+nn'+pp'+qq'}{H}+\frac{mm''+nn''+pp''+qq''}{H'}+\frac{mm'''+nn'''+pp'''+qq'''}{H''},\\
0&=\frac{m'^2+n'^2+p'^2+q'^2}{H}+\frac{m'm''+\ldots\ldots\ldots+q'q''}{H'}+\frac{m'm'''+\ldots\ldots\ldots+q'q'''}{H''},\\
0&=\frac{m'm''+\ldots\ldots+q'q''}{H}+\frac{m''^2+\ldots\ldots\ldots+q''^2}{H'}+\frac{m''m'''+\ldots\ldots\ldots+q''q'''}{H''},\\
0&=\frac{m'm'''+\ldots\ldots+q'q'''}{H}+\frac{m''m'''+\ldots\ldots+q''q'''}{H'}+\frac{m'''^2+\ldots\ldots\ldots+q'''^2}{H''}.
\end{aligned}$$

Il en résulte en particulier l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} m'^2+\ldots+q'^2 & m'm''+\ldots+q'q'' & m'm'''+\ldots+q'q''' \\ m'm''+\ldots+q'q'' & m''^2+\ldots+q''^2 & m''m'''+\ldots+q''q''' \\ m'm'''+\ldots+q'q''' & m''m'''+\ldots+q''q''' & m'''^2+\ldots+q'''^2 \end{vmatrix}=0.$$

Comme, en posant $V=0$, $W=0$, $T=0$, on a $u^2+v^2+w^2+t^2=0$, on voit que si l'on prend

$$\frac{u}{\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}}=\frac{-v}{\begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}}=\frac{w}{\begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}}=\frac{-t}{\begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m'' & n''' & p''' \end{vmatrix}},$$

il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m''' & n''' & p''' \end{vmatrix}^2=0.$$

Par là se trouve accusée l'identité

$$\begin{vmatrix} m^2+n^2+p^2+q^2 & mm'+nn'+pp'+qq' & mm''+nn''+pp''+qq'' \\ mm'+nn'+pp'+qq' & m'^2+n'^2+p'^2+q'^2 & m'm''+n'n''+p'p''+q'q'' \\ mm''+nn''+pp''+qq'' & m'm''+n'n''+p'p''+q'q'' & m''^2+n''^2+p''^2+q''^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} n\,p\,q \\ n'p'q' \\ n''p''q'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p\,q\,m \\ p'q'm' \\ p''q''m'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q\,m\,n \\ q'm'n' \\ q''m''n'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m\,n\,p \\ m'n'p' \\ m''n''p'' \end{vmatrix}^2 .$$

Elle fait suite à l'identité connue

$$\begin{vmatrix} m^2+n^2+p^2 & mm'+nn'+pp' \\ mm'+nn'+pp' & m'^2+n'^2+p'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n\,p \\ n'p' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p\,m \\ p'm' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m\,n \\ m'n' \end{vmatrix}^2 .$$