Bulletin de la S. M. F.

Edm. Maillet

Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers (Problème de Waring)

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 69-77

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__69_0>

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN UNE SOMME DE PUISSANCES HUITIÈMES D'ENTIERS

(Problème de Waring);

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

On peut se demander, avec Waring, si tout nombre entier N n'est pas, quel que soit N, la somme d'un nombre k, limité et indépendant de N, de puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs. C'est là *une des énigmes historiques de l'Arithmétique,* qu'on peut appeler *problème de Waring,* et qui n'a encore reçu sa solution que pour les petites valeurs de n. On sait que la réponse est affirmative pour $n=2$ ($k \leqq 4$, Fermat, Euler, Lagrange), $n=4$ (J. Liouville), $n=3$ et 5 (E. Maillet), et, comme vient de le montrer [1] M. Albert Fleck, pour $n=6$. Le joli résultat de M. Fleck m'a donné l'idée d'étendre sa méthode, d'une manière convenable, au cas de $n=8$. Les calculs sont assez compliqués, mais enfin ils me permettent d'établir, grâce à des lemmes de Cauchy et de J. Liouville, l'exactitude de l'hypothèse de Waring pour $n=8$.

En terminant, je démontre que $k \geqq n+1$ pour une infinité de valeurs de N : si cette hypothèse est vraie pour une infinité de valeurs de n, k croît indéfiniment avec n.

II.

Soient n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et la somme

$$(1) \qquad 2^{p-1} A_{p-1} = \sum_n (x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_p)^8 \qquad (p \leqq n),$$

obtenue en prenant dans les parenthèses toutes les combinaisons p à p de ces n quantités et additionnant dans chaque combinaison

(1) *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907, p. 561 (où l'on trouve aussi l'historique de la question). J'ai donné un résumé de ma présente Note dans les *Comptes rendus,* 30 décembre 1907.

les p lettres dont $p-1$ ont été affectées des signes $+$ ou $-$ de toutes les manières possibles. Le nombre des termes obtenus dans le second membre de (1) est ainsi $2^{p-1}C_n^p$.

Je développe le second membre de (1). On a, en posant ([1])

$$
(2)\qquad \begin{cases} A_0=\sum x_1^8, \quad L=\sum x_1^6 x_2^2, \quad M=\sum x_1^4 x_2^4, \\ P=\sum x_1^4 x_2^2 x_3^2, \quad Q=\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2, \end{cases}
$$

$$
(3)\qquad A_{p-1}=C_{n-1}^{p-1}A_0+C_{n-2}^{p-2}(\lambda L+\mu M)+C_{n-3}^{p-3}\varpi P+C_{n-4}^{p-4}\chi Q,
$$

avec

$$
(4)\qquad \begin{cases} \lambda=\dfrac{8.7}{2}, \quad \mu=\dfrac{8.7.6.5}{1.2.3.4}=\dfrac{5}{2}\lambda, \quad \varpi=\dfrac{8.7.6.5}{4}, \quad \chi=\dfrac{(8!)}{16}, \\ C_j^0=1, \quad C_j^{-k}=0 \text{ pour } k>0. \end{cases}
$$

([1]) La méthode que je suis ici est une extension de la méthode de M. Fleck pour l'exposant 6, laquelle est d'ailleurs elle-même, si l'on veut, une modification et une généralisation des méthodes de Liouville et E. Lucas pour $n=4$. Si

$$
2^{q-1}A'_{q-1}=\sum_n (x_1\pm x_2\pm\ldots\pm x_q)^4, \qquad G'=\Big(\sum_n x_1^2\Big)^2 \qquad (n\geqq q),
$$

on a

$$
G'=\frac{1}{3}\frac{A'_{q-1}}{C_{n-2}^{q-2}}+A'_0\left(1-\frac{1}{3}\frac{n-1}{q-1}\right).
$$

Fixant, par exemple, $n\geqq 4$ et q de façon que $\left(1-\frac{1}{3}\frac{n-1}{q-1}\right)$ soit nul ou positif, on en déduit des décompositions variées d'un carré quelconque $G'=f^2$ sous la forme $f^2=\frac{\sigma}{\varphi}$, où σ est une somme de bicarrés, φ un entier numérique; tout entier N étant une somme de 4 carrés f^2, on déduit de là une décomposition de φN en une somme de bicarrés, par suite aussi de

$$
\varphi N+i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \varphi-1),
$$

c'est-à-dire de tout entier, puisque l'unité est un bicarré. En particulier, pour $n=4$ et $q=2$,

$$
G'=f^2=\frac{2A'_1}{6},
$$

et l'on retrouve une identité connue (E. Lucas, *Nouv. Ann.*, 2ᵉ série, t. XVII, 1878, p. 536; Fleck, *Sitzungsberichte der Berl. math. Gesellschaft*, 28 juin 1905, 2 janvier 1906).

D'autre part, quand $n \geqq 4$,

$$(5)\qquad \begin{cases} G = \left(\sum_n x_1^2\right)^4 = A_0 + 4L + 6M + 12P + 24Q, \\ H = \left(\sum_n x_1^4\right)^2 = A_0 + 2M, \end{cases}$$

$$(6)\qquad G + 2H = 3A_0 + \frac{4}{\lambda}(\lambda L + \mu M) + 12P + 24Q.$$

Le rapprochement des expressions (3) et (6) montre qu'on peut essayer de mettre $G + 2H$ sous la forme

$$(7)\qquad G + 2H = \frac{1}{\lambda\alpha}(\beta_0 A_0 + \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_q A_q)$$

(α entier, $q \leqq n - 1$), où $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q$ sont des nombres *rationnels et positifs* qui ne dépendent que de n et q. Il suffira

$$(8)\qquad \begin{cases} 3\lambda\alpha = \sum_0^q \beta_r C_{n-1}^r, \\ 4\ \alpha = \sum_1^q \beta_r C_{n-2}^{r-1}, \\ 12\lambda\alpha = \varpi \sum_2^q \beta_r C_{n-3}^{r-2}, \\ 24\lambda\alpha = \chi \sum_3^q \beta_r C_{n-4}^{r-3}; \end{cases}$$

on posera

$$\alpha = (n-1)(n-2)\ldots(n-q),$$

$$\beta_r = \gamma_r(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-q).(r!), \qquad \beta_q = \gamma_q.(q!),$$

et les conditions (8) deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} a_0 = 3\lambda = \sum_0^q \gamma_r, \qquad a_1 = 4(n-1) = \sum_1^q \gamma_r r, \\ a_2 = 12\frac{\lambda}{\varpi}(n-1)(n-2) = \sum_2^q \gamma_r r(r-1), \\ a_3 = 24\frac{\lambda}{\chi}(n-1)(n-2)(n-3) = \sum_3^q \gamma_r r(r-1)(r-2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{gathered}\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_q=3.28=a_0,\\ \gamma_1+2\gamma_2+3\gamma_3+\ldots+q\gamma_q=4(n-1)=a_1,\\ 2\gamma_2+3.2\gamma_3+\ldots+q(q-1)\gamma_q=\frac{4}{5}(n-1)(n-2)=a_2,\\ 3.2.1\gamma_3+\ldots+q(q-1)(q-2)\gamma_q\\ =\frac{4}{15}(n-1)(n-2)(n-3)=a_3;\end{gathered}$$

on en tire, si

$$\gamma_0=0,\qquad R_r=(r-1)(r-2)(r-3)(r-4),$$

$$6\gamma_1=(24a_0-18a_1+6a_2-a_3)+\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-1}=\Gamma_1+\delta_1,$$

$$2\gamma_2=(-12a_0+12a_1-5a_2+a_3)-\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-2}=\Gamma_2+\delta_2,$$

$$2\gamma_3=(8a_0-8a_1+4a_2-a_3)+\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-3}=\Gamma_3+\delta_3,$$

$$6\gamma_4=(-6a_0+6a_1-3a_2+a_3)-\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-4}=\Gamma_4+\delta_4,$$

où

$$\delta_i=(-1)^{i-1}\sum_5^q\frac{\gamma_r R_r}{r-i}.$$

Il suffit de disposer de n, q et des $\gamma_5, \ldots, \gamma_q$ pris positifs et rationnels pour que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ soient positifs.

Si l'on prend $n=51$,

$$\Gamma_1=-21\,184,\qquad \Gamma_2=22952,\qquad \Gamma_3=-24\,448,\qquad \Gamma_4=26176.$$

On peut chercher à rendre positives les expressions

$$\Gamma_1+\frac{\omega_1}{r_1-1}+\frac{\omega_2}{r_2-1},\qquad \Gamma_2-\frac{\omega_1}{r_1-2}-\frac{\omega_2}{r_2-2},$$
$$\Gamma_3+\frac{\omega_1}{r_1-3}+\frac{\omega_2}{r_2-3},\qquad \Gamma_4-\frac{\omega_1}{r_1-4}-\frac{\omega_2}{r_2-4},$$

pour des valeurs positives rationnelles de ω_1 et ω_2, avec r_1 et r_2

différents et > 4. On y réussit en prenant ([1]) $r_1 = 18$, $r_2 = 50$, $\omega_1 = \gamma_{18} R_{18} = 17.21184$, $\omega_2 = \gamma_{50} R_{50} = 47.440$, tous les autres γ_r, avec $r > 4$, étant nuls. D'après (7), (8) et (9), avec ces valeurs numériques on obtient, q étant égal à 50,

$$(10) \qquad G + 2H = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_3 A_3 + \varepsilon_4 A_4 + \varepsilon_{18} A_{18} + \varepsilon_{50} A_{50}),$$

où les ε, ε_i ont des valeurs numériques fixes indépendantes des x_i et sont entiers positifs. On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$\varepsilon_1\,\varepsilon^{-1} = \frac{47.220}{3.28.50.49}, \qquad \varepsilon_2\,\varepsilon^{-1} = \frac{79}{6.28.50.49},$$

$$\varepsilon_3\,\varepsilon^{-1} = \frac{8}{5.28.50.49.48}, \qquad \varepsilon_4\,\varepsilon^{-1} = \frac{16.121}{7.23.28.50.49.48.47},$$

$$\varepsilon_{18}\,\varepsilon^{-1} = \frac{331.64.18.17.(13!)}{28.(50.49\ldots 33)}, \qquad \varepsilon_{50}\,\varepsilon^{-1} = \frac{440}{49.48.46.28}.$$

L'exactitude de l'identité (10) peut d'ailleurs se vérifier directement à l'aide des relations (3) à (6).

III.

D'autre part, on sait, d'après un lemme de Cauchy ([2]), rapproché d'un autre lemme de Liouville ([3]), qu'on peut trouver, l et k étant des nombres impairs positifs donnés quelconques et tels que

$$(11) \qquad \sqrt{3k-2} - 1 < l < \sqrt{4k},$$

θ entiers positifs x_i satisfaisant à

$$6l = \sum_1^\theta x_i^2, \qquad 6k = \sum_1^\theta x_i^4,$$

([1]) On réussirait également en prenant $r_1 = 18$ et r_2 égal à 39, 40, ... ou 49. On en déduit une série de formules analogues à (10), et de décompositions d'un nombre entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers positifs.

([2]) *Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 273, Paris, de Bure, 1826; ou LEGENDRE, *Théorie des nombres*, 3e édition, t. II, p. 338.

([3]) LE BESGUE, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris, Leiber et Faraguet, 1859, p. 113; E. MAILLET, *Bull. Soc. math.*, 1895, p. 46.

où θ peut être pris $\leqq 48$, mais aussi plus grand, *a fortiori*, à condition d'envisager au besoin quelques valeurs nulles des x_i. On pourra poser, par exemple,

$$l = 3m, \qquad k = 3m^2, \qquad 3k = l^2 = 3^2 m^2,$$

où m est un nombre impair absolument quelconque ([1]). On aura, en prenant $n = 51$ dans (5), avec ces valeurs de G et H,

$$G = 6^4 l^4 = 6^4.3^4 m^4, \qquad H = 6^2 k^2 = 4.3^4 m^4,$$
$$G + 2H = 3^4.2^3(1 + 2.3^4)\, m^4.$$

Plus généralement, si $x'_i = 2^t x_i$,

$$2^{2t}.6l = \sum_1^\theta x'^2_i, \qquad 2^{4t}.6k = \sum_1^\theta x'^4_i,$$

et, avec ces valeurs de G et H,

$$G = 6^4.3^4.(2^{2t}m)^4, \qquad H = 2^2.3^4.(2^{2t}m)^4,$$
$$G + 2H = 3^4.2^3(1 + 2.3^4)(2^{2t}m)^4,$$

ou

$$G + 2H = 3^4.2^7(1 + 2.3^4)(2^{2t-1}m)^4.$$

Tout nombre entier N étant d'une des formes m, $2^{2t}m$, $2^{2t-1}m$, il en résulte que toute puissance quatrième d'un entier est de la forme

$$\frac{G + 2H}{\varphi},$$

où φ est un entier numérique indépendant de N et qui divise

$$3^4.2^7(1 + 2.3^4) = \psi.$$

Or, on sait ([2]) que tout entier E est la somme d'un nombre limité de bicarrés. Donc ψE peut se mettre sous la forme d'une somme d'un nombre limité de quantités $G + 2H$ et, d'après (1) et (10), $2^{50}\varepsilon\psi E$ est une somme de quantités $2A_1$, 2^2A_2, ..., c'est-à-dire une somme de puissances huitièmes d'entiers dont le nombre est

---

([1]) (11) a alors lieu *quel que soit le nombre impair m.*

([2]) *Voir* Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, p. 113, et, pour l'historique, A Fleck, *loc. cit.*, E. Landau, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXXIII, 1907 (9 décembre 1906).

limité numériquement et indépendamment de E. L'unité étant une puissance huitième d'entier positif, il en est de même de

$$2^{50}\varepsilon\psi E + i, \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ou

$$2^{50}\varepsilon\psi - 1,$$

c'est-à-dire que :

Tout nombre entier positif N *est la somme arithmétique d'un nombre limité indépendamment de* N *de puissances huitièmes de nombres entiers.* C. Q. F. D.

IV.

En admettant que pour une infinité de valeurs de n l'hypothèse de Waring soit exacte et que tout nombre N supérieur à ν soit la somme d'au plus k puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs, *on peut montrer que k croît indéfiniment avec n pour une infinité de valeurs de* N.

Soit

$$(12) \qquad N \geqq x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n;$$

on a évidemment

$$x_i^n \leqq N, \qquad x_i \leqq E\left(N^{\frac{1}{n}}\right) = N_1.$$

Or, le nombre des nombres qu'on peut former en additionnant k des nombres $0, 1^n, 2^n, \ldots, N_1^n$ est au plus égal au nombre $D_{N_1}^k$ des combinaisons avec répétitions de ces $N_1 + 1$ nombres k à k, c'est-à-dire à

$$\frac{(N_1+1)(N_1+2)\ldots(N_1+k)}{k!} \leqq \frac{(N_1+k)^k}{k!}.$$

Pour qu'on puisse former tout nombre $\leqq N$ et $> \nu$ à l'aide du second membre de (12) il faudra

$$\frac{(N_1+k)^k}{k!} \geqq N - \nu.$$

Ceci sera impossible si

$$\frac{(N_1+k)^k}{k!} < N - \nu,$$

ou, *a fortiori*, si N étant assez grand,

$$\nu + \frac{(N_1 + k)^k}{k!} < \nu + \frac{\left(N^{\frac{1}{n}} + k\right)^k}{k!} < \left(N^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Posant $N^{\frac{1}{n}} = m$, il suffit, pour m assez grand,

$$m^n - \nu - \frac{(m+k)^k}{k!} > 0,$$

ce qui a lieu évidemment quand $2 \leqq k \leqq n$. Donc, si l'hypothèse de Waring est exacte pour une valeur de n, il faut $k \geqq n+1$, c'est-à-dire que k croît indéfiniment avec n, si cette hypothèse est vraie pour une infinité de valeurs de n. C. Q. F. D.

Remarque. — Quand $N = 2^n - 1,\ 2.2^n - 1,\ \ldots,\ r.2^n - 1 < 3^n$ et $N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n$, il faut évidemment $k \geqq 2^n - 1$. Mais cette remarque ne prouve rien pour les grandes valeurs de N, n étant donné.

V.

En terminant, je ne crois pas inutile de rappeler ici les récents résultats relatifs au problème de Waring : a-t-on

$$N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n,$$

quel que soit n? Pour $n = 3$, j'avais trouvé antérieurement qu'il suffit $k \leqq 17$: M. Fleck (¹) a établi, par une remarque additionnelle très simple à ma démonstration, qu'il suffit $k \leqq 13$. Pour $n = 4$, M. Fleck (²) a montré qu'il suffit $k \leqq 39$, et M. E. Landau (³) est arrivé à $k \leqq 38$. Enfin, pour $n = 6$, M. Fleck obtient $k \leqq 2451$: il s'appuie sur l'identité

$$\begin{aligned} 60 n^3 &= 60(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3 \\ &= \sum_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^6 + 2\sum_4 (x_1 \pm x_2)^6 + 36 \sum_4 x_1^6. \end{aligned}$$

(¹) *Sitzungsberichte der Berl. math. Gesellschaft, loc. cit.*

(²) *Id.*

(³) *Loc. cit.*

A ce propos, il ne sera pas sans intérêt de remarquer qu'on a en même temps

$$60n = 60(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$
$$= \sum_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2 + 2\sum_1 (x_1 \pm x_2)^2 + 36 \sum_4 x_1^6.$$

Il est donc toujours possible, E étant un entier quelconque, de satisfaire à la fois aux deux équations en nombres entiers

$$60\,E^3 = \sum_1^p y_i^6, \qquad 60\,E = \sum_1^p y_i^2, \qquad \text{où} \qquad p \geqq 184.$$