

# BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

## Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 36 (1908), p. 3-19

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1908\\_\\_36\\_\\_3\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__3_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

SUR LA MÉTHODE DE M. GOURSAT POUR LA RÉOLUTION  
DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM ;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. La solution de l'équation de Fredholm dépend d'expressions analytiques assez compliquées. Dans son *Mémoire des Acta mathematica* <sup>(1)</sup>, M. Fredholm a montré comment l'on pouvait vérifier que ces expressions fournissaient bien la solution cherchée, mais il n'a pas indiqué comment on était amené à la considération de ces expressions.

M. Goursat <sup>(2)</sup> a montré récemment que l'étude d'un cas particulier conduisait facilement à prévoir la forme de la solution ; il

---

<sup>(1)</sup> *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903).

<sup>(2)</sup> *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXV, fasc. III, 1907).

devient alors tout naturel d'employer le procédé de vérification de M. Fredholm. D'ailleurs cette vérification est inutile dans des cas étendus, comme il résulte d'un raisonnement rapidement indiqué par M. Goursat à la fin de sa Note. C'est ce raisonnement que je vais développer; il conduit à une conclusion très générale: cela m'a paru intéressant à noter, d'autant que la méthode de M. Goursat semble pouvoir s'appliquer à d'autres équations fonctionnelles.

Pour être clair, je reprends d'abord l'étude du cas particulier considéré par M. Goursat; cela me permet de fixer les notations et d'indiquer des transformations de déterminants à peine différentes de celles qu'effectue M. Goursat, mais un peu plus simples (1).

2.  $K(x, y)$  et  $\psi(x)$  étant des fonctions données,  $\varphi(x)$  étant la fonction inconnue, l'équation de Fredholm s'écrit

$$(1) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x).$$

Examinons d'abord le cas où le noyau  $K(x, y)$  est de la forme

$$(2) \quad K(x, y) = X_1(x) Y_1(y) + X_2(x) Y_2(y) + \dots + X_n(x) Y_n(y).$$

En remplaçant  $K$  par cette valeur dans le premier membre de l'équation (1), on voit que l'intégrale qui y figure est une fonction linéaire des  $X_i(x)$ ; donc on trouve

$$(3) \quad \varphi(x) = \psi(x) - H_1 X_1(x) - H_2 X_2(x) - \dots - H_n X_n(x),$$

les  $H_i$  étant des constantes à déterminer.

Modifions l'équation (1) à l'aide de (2) et de (3); le même fait se reproduit, mais cette fois  $\psi(x)$  disparaît dans les deux membres. On trouve alors qu'une combinaison linéaire et homogène des  $X_i$  est nulle. Mais on peut supposer les  $X_i$  linéairement indépendantes; donc on doit annuler les coefficients des  $X_i$ , d'où,

---

(1) Je n'ai fait qu'indiquer les premiers calculs faciles à rétablir et qu'on trouvera dans la Note de M. Goursat.

pour déterminer les  $H_i$ ,  $n$  équations linéaires de la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \int_0^1 X_1(s) Y_i(s) ds H_1 + \dots + \lambda \int_0^1 X_{i-1}(s) Y_i(s) ds H_{i-1} \\ + \left[ 1 + \lambda \int_0^1 X_i(s) Y_i(s) ds \right] H_i + \lambda \int_0^1 X_{i+1}(s) Y_i(s) ds H_{i+1} + \dots \\ + \lambda \int_0^1 X_n(s) Y_i(s) ds H_n = \lambda \int_0^1 \psi(s) Y_i(s) ds. \end{array} \right.$$

Posons  $\varphi(x) = \psi(x) - \rho(x)$ ; nous avons

$$(5) \quad X_1(x) H_1 + X_2(x) H_2 + \dots + X_n(x) H_n = \rho(x).$$

En supposant que le déterminant des équations (4) soit différent de zéro, l'équation en  $\rho$ , obtenue en égalant à zéro le déterminant total de (4) et (5), fournira la solution du problème. Mais, sous cette forme, la solution est donnée en fonction des  $X_i$  et  $Y_i$ , lesquelles ne sont pas entièrement déterminées quand  $K$  est donné; cherchons à éviter le calcul des  $X_i$  et  $Y_i$  en transformant l'équation en  $\rho$ .

Le premier membre de cette équation est un déterminant dont tous les termes peuvent être considérés comme des intégrales définies prises de 0 à 1; on peut faire sortir les signes d'intégration correspondants du symbole du déterminant, pourvu qu'on remplace la variable  $s$  par des variables différentes dans chaque terme ou simplement dans chaque ligne. Ainsi l'équation peut s'écrire

$$(6) \quad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} \rho^0 & X_1^0 & X_2^0 & \dots & X_n^0 \\ \lambda \psi^1 Y_1^1 & 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1 & \lambda X_2^1 Y_1^1 & \dots & \lambda X_n^1 Y_1^1 \\ \lambda \psi^2 Y_2^2 & \lambda X_1^2 Y_2^2 & 1 + \lambda X_2^2 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^2 Y_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \psi^n Y_n^n & \lambda X_1^n Y_n^n & \lambda X_2^n Y_n^n & \dots & 1 + \lambda X_n^n Y_n^n \end{vmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0,$$

en mettant pour simplifier  $X_i^j, Y_i^j, \psi^j, \rho^0, X_i^0$ , au lieu de  $X_i(x_j), Y_i(x_j), \psi(x_j), \rho(x), X_i(x)$ . On voit qu'il n'y a aucune relation entre les indices supérieurs et les indices inférieurs; on pourrait effectuer sur les indices supérieurs 1, 2, ...,  $n$  une permutation quelconque sans que l'équation (6) soit modifiée. D'une façon générale, deux termes seront dits *équivalents* si l'on passe de l'un à l'autre par une telle permutation; deux termes équivalents,

soumis à l'intégration  $n$ -uple qui figure dans (6), donnent le même résultat. Remarquons encore que l'intégration par rapport à  $dx_i$  peut être supprimée quand il s'agit d'un terme ne contenant pas  $x_i$ .

Ceci posé, la difficulté qu'on éprouve à faire apparaître la fonction  $K$  dans le déterminant  $A$  qui figure dans l'équation (6) provient surtout de la présence de produits  $X_i Y_j$  à indices inférieurs différents; mais le déterminant  $A$  est égal au déterminant  $B$  :

$$B = \begin{vmatrix} \rho^0 & \lambda X_1^0 Y_1^1 & \lambda X_2^0 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^0 Y_n^n \\ \psi^1 & 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1 & \lambda X_2^1 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^1 Y_n^n \\ \psi^2 & \lambda X_1^2 Y_1^1 & 1 + \lambda X_2^2 Y_2^2 & \dots & \lambda X_n^2 Y_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^n & \lambda X_1^n Y_1^1 & \lambda X_2^n Y_2^2 & \dots & 1 + \lambda X_n^n Y_n^n \end{vmatrix}.$$

Cela serait tout à fait évident si les éléments principaux étaient nuls; le cas général se ramène à celui-là, pourvu qu'on utilise le développement donné par la formule

$$\Delta = D + \sum_i \alpha_i^i D_i + \sum_{i,j} \alpha_i^i \alpha_j^j D_{i,j} + \dots,$$

dans laquelle  $\Delta$  est le déterminant des  $\alpha_i^k$ ,  $D$  celui qu'on déduit de  $\Delta$  en remplaçant les éléments principaux  $\alpha_i^i$  par des zéros,  $D_{i,j}, \dots$  le mineur de  $D$  obtenu en barrant les lignes et les colonnes de rangs  $i, j, \dots$ .

Or le déterminant  $B$ , ainsi que tous ses équivalents, se retrouve évidemment dans le développement de  $C$  :

$$C = \begin{vmatrix} \rho^0 & \lambda K^{0,1} & \lambda K^{0,2} & \dots & \lambda K^{0,n} \\ \psi^1 & 1 + \lambda K^{1,1} & \lambda K^{1,2} & \dots & \lambda K^{1,n} \\ \psi^2 & \lambda K^{2,1} & 1 + \lambda K^{2,2} & \dots & \lambda K^{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^n & \lambda K^{n,1} & \lambda K^{n,2} & \dots & 1 + \lambda K^{n,n} \end{vmatrix},$$

dans lequel les indices supérieurs désignent les variables; comparons donc  $B$  et  $C$ . Nous considérerons les éléments des  $n$  dernières colonnes de ces déterminants comme des sommes, et nous remplacerons  $B$  et  $C$  par des sommes de déterminants.

Les éléments de  $B$  seront remplacés par les sommes

$$0 + \lambda X_1^0 Y_1^1, \quad 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1, \quad \dots;$$

ceux de C seront remplacés d'une part, et cela donnera le développement C', par les sommes

$$0 + \lambda K^{0,1}, \quad 1 + \lambda K^{1,1}, \quad \dots,$$

et d'autre part, ce qui donnera le développement C'', par

$$0 + \lambda X_1^0 Y_1^1 + \dots + \lambda X_n^0 Y_n^1, \quad 1 + \lambda X_1^1 Y_1^1 + \dots + \lambda X_n^1 Y_n^1, \quad \dots$$

Quand, pour la formation d'un déterminant partiel, une colonne aura été remplacée par la première file de ses éléments, laquelle est constituée de  $n$  zéros et d'un chiffre 1, on pourra barrer cette colonne et la ligne de même rang. En opérant ainsi, le coefficient de  $\lambda^p$  se présente sous la forme d'une somme de déterminants d'ordre  $p + 1$ .

Dans C', ces déterminants sont en nombre égal à celui des combinaisons de  $n$  lettres  $p$  à  $p$ , et ils sont évidemment tous équivalents; le terme en  $\lambda^p$  est donc équivalent à

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \alpha_p \lambda^p,$$

$$\alpha_p = \begin{vmatrix} \rho^0 & K^{0,1} & K^{0,2} & \dots & K^{0,p} \\ \psi^2 & K^{1,1} & K^{1,2} & \dots & K^{1,p} \\ \psi^2 & K^{2,1} & K^{2,2} & \dots & K^{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^p & K^{p,1} & K^{p,2} & \dots & K^{p,p} \end{vmatrix}.$$

Dans C'', ceux de ces déterminants qui ne sont pas nuls proviennent de files d'éléments contenant des  $X_i Y_i$  à indices inférieurs variables d'une file à l'autre. Ces déterminants sont évidemment équivalents à ceux qu'on rencontre dans B; d'ailleurs, chaque déterminant provenant de B donne dans C'' autant de déterminants équivalents qu'il y a d'arrangements de  $n$  lettres  $p$  à  $p$ ; le coefficient de  $\lambda^p$  dans B est donc équivalent à  $\frac{\alpha_p}{p!}$ . La question que nous nous étions posée est résolue.

Pour arriver à la forme de M. Fredholm, il va suffire de développer  $\alpha_p$  suivant les éléments de sa première colonne. Désignons, avec M. Fredholm, par  $K \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{pmatrix}$  le déterminant ayant pour élément situé dans sa  $i^{\text{ième}}$  colonne et sa  $j^{\text{ième}}$  ligne le nombre

$\mathbf{K}(a_i, b_j)$ , et remarquons qu'une permutation effectuée sur l'une ou l'autre des deux lignes de variables de ce nouveau symbole correspond tout simplement à une permutation des lignes ou des colonnes du déterminant correspondant. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \rho \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} - \psi^1 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} \\ &+ \psi^2 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, x_3, \dots, x_p \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \end{pmatrix} - \dots = \rho \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} \\ &- \psi^1 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} - \psi^2 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, x_3, \dots, x_p \\ x_2, x_1, x_3, \dots, x_p \end{pmatrix} - \dots, \end{aligned}$$

et, sous cette nouvelle forme, il est évident que tous les termes autres que le premier sont équivalents. Si donc on pose

$$(7) \quad \mathbb{D}(\lambda) = 1 + \sum \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_p,$$

$$(8) \quad \hat{\mathcal{F}}(x, y; \lambda) = \lambda \mathbf{K}(x, y) + \sum \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_p,$$

et si  $\mathbb{D}(\lambda)$  est différent de zéro, l'équation (1) admet la solution donnée par la formule

$$(9) \quad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathbb{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \hat{\mathcal{F}}(x, s; \lambda) ds.$$

Jusqu'ici les symboles  $\sum$  désignent des suites finies, mais on peut les considérer comme représentant des séries, car les symboles  $\mathbf{K} \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_q \\ a, a_2, \dots, a_q \end{pmatrix}$ , à plus de  $2n$  variables, sont identiquement nuls, ce qui résulte immédiatement d'un calcul analogue à celui qui nous a donné  $C''$ .

3. Pour étendre le résultat précédent à des cas où le noyau n'est pas de la forme (2), je reprends le raisonnement qui termine la Note de M. Goursat.

Dans l'équation (1), les données sont le noyau  $\mathbf{K}$  et le second membre  $\psi$ . Considérons une équation de Fredholm dans laquelle les données  $\mathbf{K}_n$  et  $\psi_n$  sont variables avec  $n$  et supposons qu'elle

admette la solution  $\varphi_n$ , de sorte que l'on a

$$(10) \quad \varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s) \varphi_n(s) ds = \psi_n(x).$$

Supposons de plus que  $K_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\varphi_n$  soient des fonctions sommables, bornées, tendant uniformément vers des limites  $K$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ , lesquelles sont par suite bornées et sommables. Alors  $K_n \varphi_n$  tend uniformément vers  $K \varphi$  et, d'après le théorème classique sur l'intégration des suites uniformément convergentes, chaque terme de l'équation (10) tend vers le terme correspondant de (1) et  $\varphi$  est solution de l'équation (1). Ce qu'on peut résumer, d'une façon un peu imprécise, en disant que *la limite d'une solution d'une équation de Fredholm à données variables est une solution de l'équation correspondant aux données limites.*

4. Remarquons maintenant que les formules (7) et (8) conservent un sens tant que le noyau est borné. Si, en effet, on a toujours  $|K(x, y)| < M$ , les symboles  $K$  à  $2p$  variables sont des déterminants d'ordre  $p$  dont les termes ne surpassent pas  $M$  en valeur absolue. D'après un théorème de M. Hadamard <sup>(1)</sup>, un tel déterminant ne dépasse pas  $M^p \sqrt{p^p}$ ; donc les séries (7) et (8) ont leurs termes respectivement inférieurs, en valeur absolue, à ceux des séries

$$d = 1 + \sum_1^{\infty} (\lambda M)^p \frac{\sqrt{p^p}}{p!}, \quad f = \lambda M + \sum_1^{\infty} (\lambda M)^{p+1} \frac{\sqrt{(p+1)^{p+1}}}{p!};$$

ces séries convergent quel que soit  $\lambda$ ; les formules (7) et (8) conservent donc un sens et, par suite, aussi la formule (9), pourvu que  $\mathcal{O}(\lambda)$  diffère de zéro.

Si  $\psi$  est en module inférieur à  $N$ , la série  $fN$  est majorante pour la série représentant  $\mathcal{C}(\lambda) = \int_0^1 \psi(s) \mathcal{F}(x, s; \lambda) ds$ .

Ceci posé, soient  $K_n$  et  $\psi_n$  des fonctions sommables tendant uniformément vers les fonctions  $K$  et  $\psi$  que nous supposons sommables et bornées. Alors, si  $|K| < M$ ,  $|\psi| < N$ , on a aussi, quand

<sup>(1)</sup> Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, 1893).



$n$  est assez grand,  $|\mathbf{K}_n| < \mathbf{M}$ ,  $|\psi_n| < \mathbf{N}$ , et les séries  $d$  et  $f\mathbf{N}$  sont majorantes pour les séries représentant les fonctions  $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ ,  $\mathfrak{C}_n(\lambda)$ ,  $\mathfrak{O}(\lambda)$ ,  $\mathfrak{C}(\lambda)$  attachées aux données  $\mathbf{K}_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\psi$ .

Il en résulte que, si  $q$  est assez grand, on commettra une erreur uniformément inférieure au nombre positif  $\mathfrak{E}$  arbitrairement choisi en limitant ces séries à leurs  $q$  premiers termes, et, par suite, la convergence de  $\mathfrak{D}_n$  vers  $\mathfrak{O}$  et de  $\mathfrak{C}_n$  vers  $\mathfrak{C}$  résultera de la convergence de chaque terme des séries  $\mathfrak{D}_n$  et  $\mathfrak{C}_n$  vers le terme correspondant de  $\mathfrak{O}$  et  $\mathfrak{C}$ . Or, par exemple, le coefficient de  $\frac{\lambda^p}{p!}$  dans  $\mathfrak{C}_n$  est l'intégrale

$$(11) \quad \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi_n(s) \mathbf{K}_n \left( \begin{matrix} x, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \\ s, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \end{matrix} \right) ds dx_1 \dots dx_{p-1}.$$

Il est évident que  $\psi_n(s) \mathbf{K}_n \left( \begin{matrix} x, \dots \\ s, \dots \end{matrix} \right)$  tend uniformément vers  $\psi(s) \mathbf{K} \left( \begin{matrix} x, \dots \\ s, \dots \end{matrix} \right)$ ; en appliquant encore le théorème sur l'intégration des suites uniformément convergentes, on voit que le coefficient de  $\lambda^p$  dans  $\mathfrak{C}_n$  tend vers le coefficient de  $\lambda^p$  dans  $\mathfrak{C}$ .

Si donc on suppose  $\mathfrak{O}(\lambda) \neq 0$ , il en sera de même de  $\mathfrak{D}_n(\lambda)$  pour  $n$  assez grand; la formule (9) fait alors correspondre à  $\mathbf{K}_n$  et  $\psi_n$  et à  $\mathbf{K}$  et  $\psi$  des fonctions  $\Phi_n(x)$ ,  $\Phi(x)$ ;  $\Phi_n$  tend vers  $\Phi$ . Ce qu'on peut résumer en disant que *la formule (9) définit une fonction qui varie d'une façon continue avec les données.*

§. Pour légitimer la formule (9) comme formule donnant une solution de (1), il va suffire maintenant de se placer dans des cas tels qu'on puisse confondre les fonctions  $\varphi_n$  et  $\Phi_n$  des deux paragraphes précédents.

Supposons que  $\mathbf{K}(x, \gamma)$  soit continue en  $(x, \gamma)$ . Alors on prendra pour  $\mathbf{K}_n$  un polygone en  $x, \gamma$  et, en supposant  $\psi$  bornée, on prendra  $\psi_n = \psi$ . Alors  $\Phi_n$  est un polynôme qui satisfait à l'équation de Fredholm de données  $\mathbf{K}_n, \psi_n$ , pourvu que  $\mathfrak{D}_n$  diffère de zéro. Mais il en est ainsi pour  $n$  assez grand si l'on suppose  $\mathfrak{O}(\lambda) \neq 0$ , et alors les  $\Phi_n$  sont uniformément bornés dans leur ensemble. Par suite,  $\Phi$ , qui est leur limite, étant sommable et bornée, est, d'après le paragraphe 3, solution de l'équation (1).

Ainsi, la formule (9) fournit une solution de l'équation (1)

quand le noyau est continu et quand le second membre est sommable et borné.

6. Le raisonnement précédent est celui de M. Goursat (1). Examinons le rôle qu'y joue l'hypothèse de la convergence *uniforme* de  $\varphi_n$  vers  $\varphi$ , de  $K_n$  vers  $K$ , de  $\psi_n$  vers  $\psi$ .

Cette hypothèse a permis, dans les paragraphes 3 et 4, l'interversion des symboles de limite et d'intégration appliqués aux termes de suites uniformément convergentes; mais cette interversion est évidemment légitime dans des cas plus étendus. On sait, par exemple, que cela est légitime sous la seule hypothèse que l'ensemble des termes de la suite soit borné (2). Les conclusions des paragraphes 3 et 4 subsistent donc, pourvu que les fonctions  $\varphi_n(x)$ ,  $K_n(x, y)$ ,  $\psi(x)$  soient bornées dans leur ensemble (quels que soient  $x, y, n$ ) et tendent vers  $\varphi, K, \psi$ .

Supposons donc  $K(x, y)$  borné et limite d'une suite convergente de polynômes en  $(x, y)$ , qu'on peut, on le sait, supposer bornés dans leur ensemble et qui joueront le rôle des  $K_n$ ; si, de plus,  $\psi$  est bornée, on prendra  $\psi_n = \psi$ , et la conclusion du paragraphe précédent s'étend à tout noyau de première classe; quant à la solution  $\Phi$  obtenue, c'est une fonction sommable puisque  $\Phi - \psi$  est la limite des polynômes  $\Phi_n - \psi$ .

Si maintenant,  $\psi$  étant toujours bornée,  $K$  est borné et de seconde classe, on pourra considérer  $K$  comme la limite d'une suite *uniformément bornée* de fonctions  $K_n$  de classe 1 (3); donc la formule (9) s'applique encore à ce cas. On voit, de plus, que  $\Phi - \psi$  est de classe 2 au plus. En continuant ainsi on voit que *la formule (9) fournit une solution de l'équation (1), quand  $\mathcal{Q}(\lambda)$  diffère de zéro, pourvu que le noyau soit : 1° borné; 2° représentable analytiquement et que 3° le second membre soit sommable et borné.*

---

(1) Après avoir donné le bon à tirer de sa Note, M. Goursat avait remarqué que sa méthode, qu'il n'avait tout d'abord employée que pour un noyau donné par une série  $\Sigma X_i Y_i$  uniformément convergente, s'appliquait à l'étude du cas où le noyau est continu quelconque.

(2) Voir mes *Leçons sur l'intégration*, p. 114.

(3) Voir, par exemple, mon Mémoire sur les fonctions représentables analytiquement (*Journal de M. Jordan*, 1905).

7. Dans l'énoncé précédent, j'ai mis en évidence trois hypothèses restrictives; il n'y a guère d'intérêt à chercher à s'affranchir de la seconde (1); je m'occuperai seulement des deux autres.

Pour cela, j'aurai à me servir d'intégrales portant sur des fonctions non bornées. Pour les définitions et les propriétés de ces intégrales, je renvoie à ma Thèse et à mes *Leçons sur l'intégration*. Pour ce qui est de la possibilité de calculer une intégrale multiple à l'aide d'intégrales simples successives, on trouvera quelques indications dans ma Thèse; il est facile de compléter ces indications autant que cela est utile pour la suite (2). Je rappelle seulement ici, que si  $f$  a une intégrale,  $|f|$  en a aussi une.

Le théorème sur l'intégration des suites, qui a servi précédemment, sera remplacé par le suivant, dont il n'est qu'un cas particulier : *Une suite convergente de fonctions sommables  $f_i$  est intégrable terme à terme lorsqu'il existe une fonction sommable  $F$ , telle que l'on ait, quels que soient  $i$  et les variables,  $|f_i| \leq |F|$ .*

En effet, si  $f$  est la limite des  $f_i$ , on a  $|f| \leq |F|$ ; donc  $f$  est sommable, et, par suite, la relation

$$|r_i| = |f - f_i| \leq 2|F| = |R|$$

(1) Voici cependant comment on pourrait opérer pour étudier le cas où le noyau  $K(x, y)$  est sommable en tant que fonction de  $x$  seul ou de  $y$  seul, mais où l'on ne suppose pas  $K$  représentable analytiquement.

Dans ces hypothèses l'équation (1) et la formule (9) conservent un sens ( $K$  et  $\psi$  étant toujours supposés bornés) et, en substituant dans ces deux formules (1) et (9) à  $K$  la fonction  $K_1$  qui va être définie, on n'apporte aucune modification. Pour  $x \neq y$  on prendra

$$K_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y K(x, y) dy,$$

là où cette dérivée existe, et  $K_1 = 0$  quand la dérivée n'existe pas. Pour  $x = y$  on prendra  $K_1 = 0$ .

Ceci posé, remarquons qu'un polynôme en  $y$  dont les coefficients sont des fonctions sommables de  $x$  est de la forme (2) sans cependant être nécessairement représentable analytiquement; raisonnant à partir de ces polynômes en  $y$  comme à partir des polynômes en  $(x, y)$ , on arrivera à légitimer la formule (9) pour les fonctions  $K(x, y)$ , qu'on peut appeler *fonctions exprimables analytiquement* en tant que fonctions de  $y$ .  $K_1(x, y)$  rentre dans cette catégorie de fonctions.

(2) La légitimité de ce procédé de calcul est d'ailleurs justifiée d'une autre manière dans une Note de M. Fubini [*Sugli integrali multipli (Rendic. della R. Accademia dei Lincei, 1<sup>er</sup> semestre 1907)*].

montre que les  $r_i$  satisfont à une inégalité analogue à celle que vérifient les  $f_i$  et réciproquement.

Or le domaine, ou l'ensemble mesurable auquel est étendue l'intégration considérée, peut toujours être considéré comme la somme de deux ensembles mesurables  $E$  et  $e$  tels que, dans  $E$ ,  $R$  soit borné et que, étendue à  $e$ , l'intégrale de  $|R|$ , donc aussi celle de  $r_i$ , soit inférieure à  $\varepsilon$ . Le théorème énoncé est exact quand l'intégration n'est étendue qu'à  $E$ , puisque alors les restes sont bornés; comme  $\varepsilon$  est quelconque il est vrai aussi quand l'intégration est étendue  $E + e$  (1).

8. Pour examiner les cas où  $\psi$  ne serait pas bornée, faisons la substitution  $\varphi = \psi - \rho$  dans l'équation (1); on trouve

$$(12) \quad \rho(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \rho(s) ds = \lambda \int_0^1 K(x, s) \psi(s) ds.$$

Cette transformation suppose que le second membre ait un sens, ce que nous admettons car ce second membre est le premier terme de  $\zeta(\lambda)$  et nous recherchons dans quel cas la formule (9) définit une solution de (1).

Le cas qui doit être considéré comme le plus simple, après celui où  $\psi$  est bornée, est celui où le second membre, en tant que fonction de  $x$ , est borné; c'est, par exemple, ce qui arrive si,  $\psi$  étant sommable,  $K$  est borné.

Je me bornerai à l'étude du cas où le second membre de (12) est borné, en faisant seulement remarquer qu'on pourrait, dans les

(1) Un autre théorème sur l'intégration des suites aurait pu être utilement employé ici, c'est celui qu'a fait connaître M. Riesz dans des recherches sur l'équation de Fredholm (*Comptes rendus*, 18 mars, 8 avril 1907).

M. Riesz annonce là des résultats très généraux relatifs au problème qui va nous occuper, résultats que M. Fischer a obtenus de son côté (*Comptes rendus*, 13 et 27 mai 1907) et qui résultent de l'emploi des méthodes de MM. Hilbert et Schmidt. Bien que je n'épuise pas la puissance de la méthode de M. Goursat, j'étudie dans le texte des cas dont le degré de généralité est à peu près comparable à celui des cas étudiés par M. Riesz.

M. Riesz annonce aussi quelques propriétés de la fonction  $\varphi$ , solution de l'équation de Fredholm. A ce sujet, je fais observer que la méthode utilisée ici met particulièrement en évidence la proposition suivante, d'ailleurs à peu près évidente : si  $K(x, y)$  est de classe  $\alpha$ , la fonction  $\rho(x) = \psi(x) - \varphi(x)$  est au plus de classe  $\alpha$ .

autres cas, essayer ce que donnerait l'application à l'équation (12) d'une transformation analogue à celle qui permet de passer de (1) à (12).

Si nous appliquons la formule (9) à la solution de l'équation (12) on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_0^1 \mathbf{K}(x, s) \psi(s) ds - \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{K}(\sigma, s) \psi(s) \mathfrak{F}(x, \sigma; \lambda) ds d\sigma \\ &= \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \left[ \lambda \mathbf{K}(x, s) \mathfrak{D}(\lambda) - \lambda \int_0^1 \mathbf{K}(\sigma, s) \mathfrak{F}(x, \sigma; \lambda) d\sigma \right] ds. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$  dans la quantité entre crochets est

$$\begin{aligned} \beta_p &= \mathbf{K}(x, s) \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p \\ &\quad - p \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{K}(\sigma, s) \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_{p-1} \\ \sigma, x_1, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{p-1} d\sigma. \end{aligned}$$

Or, en développant le déterminant

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ s, x_1, \dots, x_p \end{pmatrix}$$

d'après les éléments de sa première ligne, on voit, à l'aide d'un calcul analogue à celui qui a été effectué sur  $\alpha_p$ , que le coefficient de  $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$  dans  $\mathfrak{F}(x, s; \lambda)$  est égal à  $\beta_p$ . Donc, si la formule (9) fournit une solution de l'équation (12), on pourra aussi l'employer pour avoir une solution de l'équation (1).

Ainsi, le cas où  $\int_0^1 \psi(s) \mathbf{K}(x, s) ds$  est borné, ainsi que celui où

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{K}(x, s_1) \mathbf{K}(s_1, s_2) \dots \mathbf{K}(s_{p-1}, s_p) \psi(s_p) ds_1 ds_2 \dots ds_p$$

est borné, se ramène au cas où  $\psi$  est bornée.

9. Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} |\psi| < \mathbf{N}, \quad \int_0^1 \mathbf{K}^2(s, s) ds < \mathbf{M}^2, \quad \int_0^1 \mathbf{K}^2(x, s) ds < \mathbf{M}^2, \\ \int_0^1 \mathbf{K}^2(x, s) \mathbf{K}^2(s, y) ds < \mathbf{M}^4, \end{aligned}$$

et recherchons si les séries représentant  $\mathfrak{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{E}(\lambda)$  ont un sens. Le coefficient de  $\frac{\lambda^{p+1}}{p!}$  dans la seconde, par exemple, s'obtient par l'intégration de

$$\psi(s) \mathbf{K} \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ s, x_1, \dots, x_p \end{pmatrix}.$$

Or, ce déterminant  $\mathbf{K}$  est au plus égal, d'après le théorème de M. Hadamard, à

$$P = \sqrt{\left[ \mathbf{K}^2(x, s) + \mathbf{K}^2(x_1, s) + \dots + \mathbf{K}^2(x_p, s) \right] \times \prod_{i=1}^{i=p} \left[ \mathbf{K}^2(x, x_i) + \mathbf{K}^2(x_1, x_i) + \dots + \mathbf{K}^2(x_p, x_i) \right]};$$

donc, d'après l'inégalité de Schwartz <sup>(1)</sup>, le carré du coefficient considéré est au plus égal à l'intégrale de  $P^2 \psi^2$ . Or,  $P^2$  est la somme de  $(p+1)^{p+1}$  quantités de la forme

$$\mathbf{K}^2(x^0, s) \mathbf{K}^2(x^1, x_1) \mathbf{K}^2(x^2, x_2) \dots \mathbf{K}^2(x^p, x_p),$$

les symboles  $x^0, x^1, \dots, x^p$  désignant certaines des variables  $x, x_1, \dots, x_p$ . Multiplions une telle quantité par  $\psi^2(s)$  et intégrons-la entre 0 et 1 par rapport à  $s, x_1, \dots, x_p$ . L'intégrale en s remplace  $\psi^2 \mathbf{K}^2(x^0, s)$  par une fonction de  $x^0$  au plus égale à  $N^2 M^2$ ; nous pourrons donc laisser de côté cette fonction dans les intégrations suivantes, à condition de multiplier le résultat par un nombre au plus égal à  $N^2 M^2$  (d'après la Note précédente). Nous pourrons de même supprimer dans notre produit  $\mathbf{K}^2(x^i, x_i)$ , si la variable  $x_i$  n'entre pas dans les termes restants, à condition de

(1) Cette inégalité s'écrit

$$\left( \iint \dots \iint f \varphi \, d\tau \right)^2 \leq \iint \dots \iint f^2 \, d\tau \cdot \iint \dots \iint \varphi^2 \, d\tau;$$

elle se démontre, qu'il s'agisse d'intégrales au sens de Riemann ou au mien, en partant de l'inégalité analogue entre les sommes à un nombre fini de termes qui donnent des valeurs approchées des intégrales des deux membres. Cette inégalité suppose que les intégrales du second membre ont un sens.

Lorsque l'on a constamment  $|\varphi| \leq m$ , cette inégalité peut être remplacée par la suivante, qui va bientôt être utilisée :

$$\left| \iint \dots \iint f \varphi \, d\tau \right| \leq m \left| \iint \dots \iint |f| \, d\tau \right|.$$

multiplier l'intégrale de ces termes restants par un nombre au plus égal à  $M^2$ . Il nous reste donc finalement un produit, soit

$$K^2(x^1, x_1) K^2(x^2, x_2) \dots K^2(x^k, x_k),$$

dans lequel chaque variable  $x_i (1 \leq i \leq k)$  figure au moins dans deux termes et par suite exactement dans deux termes.  $x_1$  figurera, par exemple, dans  $K^2(x^1, x_1)$  et  $K^2(x^2, x_2)$ , c'est-à-dire qu'on aura  $x^2 = x_1$ .

Ces deux termes pourront encore être supprimés à condition de les remplacer par un multiplicateur au plus égal à  $M^4$ ; après cette suppression, si  $x^1 = x_2$ , on opérera de même sur  $x_3$ , et si  $x^1$  diffère de  $x_2$  il y aura une variable  $x_i$  ne figurant plus que dans un terme, terme que l'on supprimera, etc.

On voit ainsi que l'intégrale de  $\psi^2 P^2$  ne surpasse pas

$$(p+1)^{p+1} N^2 M^{2(p+1)},$$

et le coefficient de  $\lambda^{p+1}$  dans  $\mathcal{C}(\lambda)$  est au plus égal à

$$\frac{(p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{p!} N M^{p+1}.$$

Ceci posé, supposant de plus  $K$  représentable analytiquement, j'appelle  $K_n$  la fonction égale à  $K$  quand on a  $|K| < n$ , égale à  $n$  quand  $K \geq n$ , égale à  $-n$  quand  $K \leq -n$ .  $K_n$  est bornée et représentable analytiquement, la formule (9) s'applique à l'équation de Fredholm correspondante, quand  $\mathfrak{D}_n(\lambda)$  est différent de zéro. D'ailleurs, d'une part, les séries  $d$  et  $fN$  sont encore majorantes pour  $\mathfrak{D}_n(\lambda)$  et  $\mathcal{C}_n(\lambda)$ ; d'autre part, un terme quelconque du développement des déterminants qui figurent dans  $\mathfrak{D}_n$  ou  $\mathcal{C}_n$  est plus petit en valeur absolue que celui qu'on obtient en supprimant les indices  $n$  et celui-là est sommable, ainsi même que son carré, comme on vient de le voir; donc, d'après le théorème du paragraphe 7 et les raisonnements du paragraphe 4,  $\mathfrak{D}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  tendent vers  $\mathfrak{D}$  et  $\mathcal{C}$ . En supposant  $\mathfrak{D}(\lambda) \neq 0$ ,  $\Phi_n$  tend vers  $\Phi$ .

D'ailleurs,  $\varphi_n = \psi - \Phi_n$  étant borné pour  $n$  assez grand, il en résulte, d'une part, que  $\Phi$  est sommable et d'autre part que, si la constante  $H$  est convenablement choisie,  $\Phi_n(s) K_n(x, s)$  ne surpasse pas la fonction  $|K(x, s)| [|\psi(x)| + H]$  qui est sommable.

Donc, d'après le paragraphe 7, les termes de la relation

$$\Phi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s) \Phi_n(s) ds = \psi(x)$$

tendent respectivement vers ceux de

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \Phi(s) ds = \psi(x).$$

En résumé, il est démontré que la formule (9) fournit une solution de l'équation (1), quand  $\Omega(\lambda)$  diffère de zéro, pourvu que les fonctions  $K(x, s)$ ,  $\psi(x)$  satisfassent aux conditions suivantes :

- 1° La fonction  $K(x, s)$  est exprimable algébriquement;
- 2° Les quatre intégrales  $\int_0^1 K(x, s) \psi(s) ds$ ,  $\int_0^1 K^2(s, s) ds$ ,  $\int_0^1 K^2(x, s) ds$ ,  $\int_0^1 K^2(x, s) K^2(s, y) ds$  existent et sont uniformément bornées, quels que soient  $x$  et  $y$ .

10. Les résultats précédents (1) suffisent à montrer la puissance de la méthode de M. Goursat. Cette méthode comprend, d'une part, l'étude d'un cas particulier, d'autre part, un procédé d'extension. Le cas particulier étudié par M. Goursat est très intéressant à cause de sa généralité; mais, pour l'application de la méthode, on peut se restreindre à l'étude de cas plus particuliers (2). On est conduit immédiatement à celui que je vais considérer quand on cherche à appliquer à l'équation (1) l'une des méthodes qu'on emploie pour l'étude de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , mé-

(1) Bien entendu, ces résultats s'obtiennent tout de suite par l'emploi de la méthode de vérification de M. Fredholm, mais il pouvait y avoir intérêt à montrer que la méthode de M. Goursat permet de s'élever de proche en proche jusqu'à des cas très généraux. La méthode qu'emploie M. Fredholm pour l'étude du cas où le noyau n'est pas borné est plus puissante et plus simple que la méthode directe du paragraphe 9. La condition relative à l'intégrale de  $K^2(s, s)$  aurait pu être supprimée si l'on avait utilisé une remarque de M. Hilbert, déjà employée en note, d'après laquelle on peut toujours supposer  $K(x, y) = 0$  pour  $x = y$ .

(2) On pourrait, par exemple, se restreindre au cas où  $K(x, y)$  est un polynôme; mais cette hypothèse ne semble pas entraîner de grandes simplifications quand il s'agit de rechercher pour la solution l'expression même qu'a donnée M. Fredholm.



thode qu'il est d'autant plus naturel d'appliquer à l'équation intégrale de Fredholm qu'elle repose sur le remplacement de l'équation différentielle par l'équation intégrale  $y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ , ainsi que le remarque M. Hadamard (1).

Divisons l'intervalle  $(0, 1)$  en  $n + 1$  parties égales et soient  $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$  valeurs prises dans ces  $n + 1$  intervalles; elles sont rangées dans un ordre quelconque, de sorte que je pourrai plus tard considérer  $x_0$  comme une valeur quelconque de  $(0, 1)$ . L'équation (1) conduit à l'équation approchée

$$(13) \quad \varphi(x) + \frac{\lambda}{n+1} \sum_{i=0}^{i=n} K(x, x_i) \varphi(x_i) = \psi(x).$$

Cette équation serait exacte, si dans chaque intervalle considéré les fonctions  $K(x, s)$  et  $\varphi(s)$  de  $s$  restaient constantes.

Je suppose que les trois fonctions  $\psi(s), K(x, s), K(s, x)$  soient constantes dans les intervalles considérés; alors, en donnant à  $x$  les valeurs  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , l'équation (13) fournit un système d'équations linéaires en  $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_n)$  qui montre qu'on peut en général satisfaire à l'équation (13) à l'aide d'une fonction  $\varphi(s)$  constante dans les intervalles considérés.

La résolution de ce système donne, les indices supérieurs désignant toujours les variables et  $\frac{\lambda}{n+1}$  étant remplacé par  $\mu$ ,

$$\varphi^0 = \frac{\begin{vmatrix} \psi^0 & \mu K^{0,1} & \mu K^{0,2} & \dots & \mu K^{0,n} \\ \psi^1 & 1 + \mu K^{1,1} & \mu K^{1,2} & \dots & \mu K^{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^n & \mu K^{n,1} & \mu K^{n,2} & \dots & 1 + \mu K^{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \mu K^{0,0} & \mu K^{0,1} & \mu K^{0,2} & \dots & \mu K^{0,n} \\ \mu K^{1,0} & 1 + \mu K^{1,1} & \mu K^{1,2} & \dots & \mu K^{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu K^{n,0} & \mu K^{n,1} & \mu K^{n,2} & \dots & 1 + \mu K^{n,n} \end{vmatrix}}.$$

(1) *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles (Journal de Physique, mars 1907).*

Ce cas particulier est peut-être celui qui a conduit M. Fredholm aux expressions qu'il a introduites; on lit, en effet, dans une Note de M. Fredholm *Sur une classe de transformations rationnelles (Comptes rendus, 27 janvier 1902)*: *La théorie de l'équation (1) est un cas limite de la théorie des équations linéaires...*

J'indique encore que ce cas particulier conduit tout aussi facilement aux rela-

Développons, par exemple, le numérateur; en opérant comme pour  $C'$  on trouve que le coefficient de  $\mu^p$  est la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans  $\gamma_p$ ,

$$\gamma_p = \begin{vmatrix} \psi^0 & K^{0, \alpha_1} & K^{0, \alpha_2} & \dots & K^{0, \alpha_p} \\ \psi^{\alpha_1} & K^{\alpha_1, \alpha_1} & K^{\alpha_1, \alpha_2} & \dots & K^{\alpha_1, \alpha_p} \\ \psi^{\alpha_2} & K^{\alpha_2, \alpha_1} & K^{\alpha_2, \alpha_2} & \dots & K^{\alpha_2, \alpha_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^{\alpha_p} & K^{\alpha_p, \alpha_1} & K^{\alpha_p, \alpha_2} & \dots & K^{\alpha_p, \alpha_p} \end{vmatrix},$$

les indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  par toutes les combinaisons  $p$  à  $p$  des  $n$  indices  $1, 2, \dots, n$ . Chaque combinaison donne lieu à  $p!$  arrangements; donc si nous divisons ensuite par  $p!$  nous pourrions tenir compte de tous les arrangements et même de tous les arrangements avec répétition des  $n+1$  indices  $0, 1, \dots, n$ ; car si l'un des  $\alpha_i$  est nul, ou si deux  $\alpha_i$  sont égaux, le déterminant correspondant est nul.

Il résulte immédiatement de là que le coefficient de  $\frac{\lambda^p}{p!}$  est le déterminant  $\gamma_p$ , dans lequel on considérera maintenant les  $x_{\alpha_i}$  comme des variables et  $x_0$  comme constant, intégré entre 0 et 1 par rapport à chacune des variables  $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p}$ . En développant maintenant  $\gamma_p$ , comme  $\alpha_p$ , par rapport aux éléments de sa première colonne, on trouve pour le coefficient de  $\frac{\lambda^p}{p!}$ :

$$\begin{aligned} & \psi(x_0) \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p \\ & - p \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_0, x_1, \dots, x_{p-1} \\ s, x_1, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix} ds dx_1 \dots dx_{p-1}. \end{aligned}$$

Un calcul analogue, mais plus simple, s'applique au dénominateur et l'on est conduit tout de suite à la formule (9).

tions entre ces quantités que M. Fredholm appelle des *mineurs* et qui jouent le rôle fondamental dans son Mémoire.