A. PELLET

Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 252-255
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__252_1>

REMARQUES SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN;

PAR M. A. PELLET.

1. Le centre de courbure (α, β) de l'enveloppe des droites

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - f(\varphi) = 0$$

est donné par les équations

$$-\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi - f' = 0, \qquad \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi + f'' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 + y^2 = f^2 + f'^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = f'^2 + f''^2, \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (f + f'')^2,$$
$$\alpha x + \beta y = f'^2 - ff''.$$

Ainsi, lorsque f est de la forme $a\cos(b\varphi - c)$, a, b, c étant des constantes, un point de la courbe et son centre de courbure sont conjugués par rapport à un cercle, de rayon ab. C'est précisément le cas des épicycloïdes et le cercle n'est autre que le cercle de base.

2. Nous pouvons définir le mouvement d'une figure plane dans son plan par les positions successives de deux de ses droites que nous choisirons rectangulaires l'une sur l'autre. Soient

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \qquad \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p_1 = 0,$$

les équations de ces droites par rapport à des axes fixes; et

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

A, B, C étant des constantes, l'équation d'une droite du plan mobile. Dans le mouvement du plan, cette droite enveloppe une courbe dont la normale a pour équation $A\xi'_\varphi + By'_\varphi = 0$. Elle passe par le point $\xi'_\varphi = 0$, $y'_\varphi = 0$, centre instantané de rotation I. De même la développée $n^{\text{ième}}$ a pour normale la droite

$$A\xi_{\varphi^{n+1}}^{(n+1)} + By_{\varphi^{n+1}}^{(n+1)} = 0.$$

Elle passe par un point I_n, $(n+1)^{\text{ième}}$ centre instantané de rotation, indépendant des coefficients A, B, C.

Lorsque φ varie, le lieu du point I dans le plan mobile est la roulette, dans le plan fixe la base; la droite II est normale pour une valeur de φ à la base et à la roulette en leur point de contact, et en général la droite $I_n I_{n+1}$ à la courbe engendrée par le point I_n; enfin le second centre instantané I_1 est situé sur la *polaire du centre de courbure de la roulette par rapport au cercle de courbure de la base.*

Lorsque pour deux mouvements I, I_1, I_2, ..., I_{n-1} coïncident, les *deux mouvements ont un contact d'ordre n*, c'est-à-dire que les courbes décrites par un même point ont un contact d'ordre n et réciproquement.

Soient I, I'_1, I'_2 les trois premiers centres instantanés de rotation lorsqu'on fait rouler le cercle osculateur de la roulette sur le cercle osculateur de la base; I'_1 coïncide avec I_1; I'_2 est le pied de la perpendiculaire abaissée par le point I_2 sur la droite II_1 (*Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps, 1895, p. 217 et suivantes).

3. Prenons pour axes de coordonnées la tangente, axe des x, et la normale à la base, axe des y, au point de contact avec la roulette à un certain moment; soient

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2R_1 y = 0$$

les équations des cercles osculateurs de la roulette et de la base; les coordonnées du second centre instantané de rotation (x_1, y_1) sont données par les équations

$$x_1 = 0, \qquad y_1 R - R_1(y_1 + R) = 0.$$

En faisant rouler le cercle $x^2 + y^2 - 2\rho y = 0$ sur le cercle

$x^2 + y^2 - 2\rho_1 y = 0$, on aura un mouvement ayant un contact du second ordre avec le premier, si la relation

$$y_1\rho - \rho_1(y_1 + \rho) = 0$$

est satisfaite. Le cercle de rayon ρ passe par le point α, β si l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\rho\beta = 0.$$

Comme, dans le roulement du cercle ρ sur le cercle ρ_1, le point α, β décrit une épicycloïde, le centre de courbure (α_1, β_1) de la trajectoire se trouve à l'intersection des droites

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \mathrm{K}, \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \rho_1(\beta + \beta_1) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{K} = \frac{y_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + y_1\beta}.$$

Pour $\alpha = 0$, on a la relation

$$\beta_1(y_1 + \beta) = y_1\beta,$$

ou

$$\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Les droites joignant les points α, β et α_1, β_1 aux centres des cercles R et R_1 ont pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\mathrm{R}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & \dfrac{1}{\mathrm{K}} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\mathrm{R}_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par soustraction, on obtient la droite

$$x\alpha_1 + y\beta_1 = 0,$$

d'où le théorème que M. G. Kœnigs veut prendre pour fondement de la théorie (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1907), afin d'éviter des précautions tenant à la question des signes.

4. Soient C le cône lieu des axes instantanés de rotation d'un solide, mobile autour d'un point fixe O, dans l'espace; C′ le cône lieu de cet axe dans le solide; OM la génératrice de contact des

deux cônes, axe instantané à l'instant considéré. Menons par le point M un plan perpendiculaire à OM; ce plan coupe le cône C suivant une courbe B et le cône C′ suivant une courbe B′; en faisant rouler B′ sur B on obtient pour le plan un mouvement ayant un contact du second ordre avec celui qui résulte du mouvement du solide à l'instant considéré; d'ailleurs les points se trouvant sur une même droite passant par le point fixe O décrivent des trajectoires homothétiques.