Bulletin de la S. M. F.

C. Popovici

Sur le problème des multiplicateurs réciproques

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 133-140

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__133_1>

SUR LE PROBLÈME DES MULTIPLICATEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. C. POPOVICI.

1. A propos de la théorie des derniers multiplicateurs, on peut formuler le problème suivant : *Quels sont les systèmes d'équations*

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}, \tag{I}$$

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n}, \tag{II}$$

tels que les coefficients d'un système soient les multiplicateurs *de l'autre?* C'est ce qu'on pourrait appeler le *problème des multiplicateurs réciproques*.

Pour le traiter, il faut résoudre le système de $2(n-1)$ équations :

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} A_1\dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}+A_2\dfrac{\partial f_k}{\partial x_2}+\ldots+A_n\dfrac{\partial f_k}{\partial x_n}+f_k\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}\right)=0,\\ f_1\dfrac{\partial A_k}{\partial x_1}+f_2\dfrac{\partial A_k}{\partial x_2}+\ldots+f_n\dfrac{\partial A_k}{\partial x_n}+A_k\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)=0\\ \qquad (k=1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Nous ne considérerons que le cas de deux variables. Dans ce cas, les derniers multiplicateurs sont en même temps facteurs intégrants.

Deux questions se posent :

1° *Quels sont les deux groupes de facteurs intégrants réciproques* A, B; f, φ?

2° *Quelles sont les intégrales que l'on obtient avec ces facteurs?*

Nous résoudrons les deux questions en même temps.

2. Pour traiter la première, il faut intégrer le système

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial f}{\partial x}+B\dfrac{\partial f}{\partial y}+f\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial y}\right)=0, & f\dfrac{\partial A}{\partial x}+\varphi\dfrac{\partial A}{\partial y}+A\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0,\\ A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+B\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial y}\right)=0, & f\dfrac{\partial B}{\partial x}+\varphi\dfrac{\partial B}{\partial y}+B\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0. \end{cases}$$

En ce qui regarde la deuxième question, il faut remarquer que, si l'on fait

$$\frac{A}{B}=u,\qquad \frac{f}{\varphi}=v,$$

on a

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{u}=dy & \text{pour } v=\text{const.};\\ \dfrac{dx}{v}=dy & \text{pour } u=\text{const.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que chaque intégrale obtenue avec la combinaison $A\,dy-B\,dx$ sera une fonction de v et chaque intégrale obtenue avec la combinaison $f\,dy-\varphi\,dx$ sera une fonction de u; par conséquent, on aura

$$(3)\quad \begin{cases} z(v)=\int f(\mathrm{A}\,dy-\mathrm{B}\,dx), & t(u)=\int \mathrm{A}(f\,dy-\varphi\,dx);\\ \zeta(v)=\int \varphi(\mathrm{A}\,dy-\mathrm{B}\,dx), & \tau(u)=\int \mathrm{B}(f\,dy-\varphi\,dx).\end{cases}$$

Maintenant, si nous égalons les premiers membres de celles des équations (1) qui sont écrites sur une même ligne, nous obtiendrons

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{B}f=\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{A}\varphi,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}f=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{A}\varphi.$$

Donc

$$(5)\qquad \mathrm{A}\varphi-\mathrm{B}f=\text{const.}=k,$$

ce qui revient à

$$u-v=\frac{k}{\mathrm{B}\varphi},$$

et, en vertu des équations (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} kx=z(v)-t(u),\\ ky=\zeta(v)-\tau(u).\end{cases}$$

Ces formules font voir que les courbes $u=$ const. et $v=$ const. sont des courbes de translation, ce qui résulte aussi des équations (2).

En vertu des équations (2), on peut écrire

$$(7)\qquad uv'_x+v'_y=0,\qquad vu'_x+u'_y=0,$$

d'où, par élimination de v,

$$(8)\qquad u=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{u'_y}{u'_x}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u'_y}{u'_x}}.$$

Pour intégrer cette équation, remarquons qu'en vertu des équations (2) et (6), on a

$$(9)\qquad \frac{z'(v)}{\zeta'(v)}=v,\qquad \frac{t'(u)}{\tau'(u)}=u.$$

Donc, si l'on fait $k = 1$, il viendra

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \int v\,\zeta'(v)\,dv - \int u\,\tau'(u)\,du, \\ y = \zeta(v) - \tau(u), \end{cases}$$

ou, en éliminant v,

$$(11)\qquad x + u\,\tau(u) - \int \tau(u)\,du = \pi[y + \tau(u)],$$

qui est l'intégrale générale de l'équation (8). On tirera v de la seconde équation (7).

L'intégration du système (1) est terminée si l'on se souvient que nous avons encore obtenu l'intégrale (5). En effet, les équations (4) et (7) sont équivalentes au système (1).

Il est intéressant de remarquer que les fonctions ζ et τ peuvent être prises arbitrairement, en tant qu'elles sont regardées comme fonctions de v et u; mais, si on les regarde ensuite comme fonctions de x et y, elles ne sont plus arbitraires. En effet, les équations (3) nous donnent

$$\zeta'_x = \tau'_x = -\,B\varphi.$$

On voit que le problème dépend de trois fonctions arbitraires. Supposons que l'on se donne, par exemple, B, ζ et τ; alors les équations (10) donnent u et v, l'équation (5) fait connaître φ; puis on a $A = Bu$, $f = \varphi v$ et enfin z et t par les équations (9).

Si l'on se donne d'avance les équations

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}, \qquad \frac{dx}{f} = \frac{dy}{\varphi},$$

ce sont les équations (5) et (7) qui permettent de reconnaître si les coefficients sont des multiplicateurs réciproques.

3. On peut résoudre un problème plus général : *Déterminer les fonctions u et v telles que l'on ait*

$$\frac{dx}{\lambda(u)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \qquad \frac{dx}{\mu(v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Il faut intégrer le système

$$(7')\qquad \lambda(u)v'_x + v'_y = 0, \qquad \mu(v)u'_x + u'_y = 0,$$

qui nous conduit à l'équation

$$\lambda(u) = D^2(u),$$

D désignant le symbole $\dfrac{\frac{\partial}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial x}}$.

Le problème est le même; car, si u est une intégrale de l'équation $dx = v\,dy$, $\lambda(u)$ en sera une aussi; de même $\mu(v)$ sera comme v une intégrale de l'équation $dx = u\,dy$.

Faisons donc $\lambda(u) = U$ et $\mu(v) = V$; le système ($7'$) se réduit à

$$UV'_x + V'_y = 0, \qquad VU'_x + U'_y = 0,$$

dont nous avons trouvé l'intégrale générale. En passant de U à u, on a, pour cette dernière fonction,

$$(11') \qquad x - \lambda(u)T(u) + \int T(u)\,du = \pi[y - T(u)].$$

On pourrait trouver encore cette solution en remarquant que, d'après les équations ($7'$), les courbes u et v sont des courbes de translation. Dès lors on doit avoir

$$x = z(v) + t(u),$$
$$y = \zeta(v) + \tau(u),$$

avec

$$\frac{z'(v)}{\zeta'(v)} = \mu(v), \qquad \frac{t'(u)}{\tau'(u)} = \lambda(u).$$

4. Une question plus générale encore, que nous allons formuler, conduit à une équation de la forme

$$(12) \qquad H(z, t) = \frac{P(z, t)q + \dfrac{\partial t}{\partial y}}{P(z, t)p + \dfrac{\partial t}{\partial x}}, \qquad t = \frac{q}{p},$$

que nous pourrons étudier et même intégrer dans certains cas en la réduisant à l'équation classique de Laplace

$$s + ap + bq = 0,$$

où a et b ne dépendent que de x et y.

Nous avons intégré l'équation (12) dans le cas où P est nul et H fonction de z; son intégrale générale est exprimée par la relation (11').

On arrive à cette équation quand on se propose de trouver les fonctions u et v telles que l'on ait

$$\frac{dx}{\lambda(u, v)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \qquad \frac{dx}{\mu(u, v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Pour cela il faut intégrer le système

$$(13) \qquad \lambda(u, v)v'_x + v'_y = 0, \qquad \mu(u, v)u'_x + u'_y = 0.$$

De la deuxième équation on tire

$$v = F(u, t), \qquad t = \frac{u'_y}{u'_x},$$

et en remplaçant dans la première on obtient l'équation (12) où z représente la fonction u.

Réciproquement, on peut revenir de l'équation (12) au système (13) si l'on intègre l'équation

$$\frac{du}{dt} = P(u, t).$$

Essayons maintenant d'intégrer le système (13).

Remarquons que $\varphi(v)$ et $f(u)$ seront comme u et v des intégrales respectives des équations (13). Nous pourrons donc user des substitutions $U = f(u)$, $V = \varphi(v)$ pour simplifier les expressions de λ et de μ.

Au lieu de chercher u et v en fonction de x et y, cherchons x et y en fonction de u et v. A cet effet, posons

$$(14) \qquad x = \pi(u, v), \qquad y = \varpi(u, v).$$

Faisons successivement $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$; nous trouvons

$$\frac{\pi'_u}{\varpi'_u} = \lambda(u, v), \qquad \frac{\pi'_v}{\varpi'_v} = \mu(u, v).$$

Donc, si l'on connaît la fonction ϖ, on aura

$$(15) \qquad \pi(u, v) = \int_{u_0}^{u} \lambda\varpi'_u \, du + \int_{v_0}^{v} \mu\varpi'_v \, dv.$$

Exprimons que le second membre est intégrable; nous arrivons à

$$\varpi''_{uv} + \frac{\lambda'_v}{\lambda - \mu}\varpi'_u - \frac{\mu'_u}{\lambda - \mu}\varpi'_v = 0, \tag{16}$$

ce qui est une équation de Laplace. Supposons que l'on connaisse l'intégrale de l'équation (16); alors on aura l'expression de ϖ avec deux fonctions arbitraires, puis π; les équations (14) nous donneront enfin la solution générale du système (13).

5. Exemple I. — *On suppose λ fonction de u et μ fonction de v.* On a

$$\varpi''_{uv} = 0,$$
$$y = \varpi(u, v) = \zeta(v) - \tau(u).$$

On retombe sur une solution connue que nous avons exprimée par la formule (11').

6. Exemple II. — *On suppose $\lambda = \mu$.* Les équations (13) donnent alors

$$\frac{u'_y}{u'_x} = \frac{v'_y}{v'_x}, \qquad v = \varphi(u).$$

Les deux équations (13) se réduisent à une seule

$$\lambda[u, \varphi(u)]\,u'_x + u'_y = 0,$$

et il n'y a pas lieu de chercher x et y. On a

$$x - \lambda[u, \varphi(u)]\,y = \pi(u),$$

avec deux fonctions arbitraires φ et π.

7. Exemple III. — *On se donne le système*

$$f(u)^{n'-1}\varphi(v)^n v'_x + v'_y = 0, \qquad f(u)^{n'}\varphi(v)^{n-1} u'_x + u'_y = 0.$$

Cet exemple contient comme cas particulier l'exemple I pour $n = n' = 0$ et aussi le cas $\lambda = \varphi(v)$, $\mu = f(u)$ pour $n = n' = 1$.

Par un changement de variables on est ramené aux équations

$$u^{n'-1}v^n v'_x + v'_y = 0, \qquad u^{n'}v^n u'_x + u'_y = 0.$$

La détermination de y dépend de l'équation

$$\varpi''_{uv} + \frac{n}{v - u}\varpi'_v - \frac{n'}{v - u}\varpi'_u = 0,$$

qui est l'équation d'Euler et de Poisson. Son intégrale générale est donnée par la formule

$$y = \varpi(u, v) = \int_{u_0}^{u} \frac{f_1(\alpha)\,d\alpha}{(u - \alpha)^{n'}(v - \alpha)^{n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{f_2(\beta)\,d\beta}{(u_0 - \beta)^{n'}(v - \beta)^{n}}.$$

On aura par suite pour x

$$x = \pi(u, v) = \int_{u_0}^{u} \frac{u^{n'-1}v^{n} f_1(\alpha)\,d\alpha}{(u - \alpha)^{n'}(v - \alpha)^{n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{u_0^{n'}v^{n-1} f_2(\beta)\,d\beta}{(u_0 - \beta)^{n}(v - \beta)^{n}}.$$

Pour nous rendre compte de la généralité de la méthode, remarquons que les fonctions ainsi trouvées ne sont pas seulement les intégrales générales du système proposé; mais aussi d'une infinité d'autres; à savoir ceux dans lesquels le couple λ, μ satisfait aux équations

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda - \mu} = \frac{n}{v - u}, \qquad \frac{\mu'_u}{\lambda - \mu} = \frac{n'}{v - u}.$$

Éliminant μ entre ces équations, on trouve

$$\lambda''_{uv} - \frac{n}{v - u}\lambda'_u + \frac{n' - 1}{v - u}\lambda'_v = 0.$$

Donc les solutions ci-dessus satisferont à une double infinité de systèmes de la forme (13), dans lesquels on a

$$\lambda = \int_{u_0}^{u} \frac{\varphi_1(\alpha)\,d\alpha}{(u - \alpha)^{1-n'}(v - \alpha)^{-n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{\varphi_2(\beta)\,d\beta}{(u_0 - \beta)^{1-n'}(v - \beta)^{\;n}}.$$