BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 71-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__71_1>

Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace;
par M. Laguerre.

(Séance du 8 janvier 1873)

1. Un grand nombre de propriétés intéressantes des surfaces du second ordre (ou *quadriques*), qui passent par six points donnés de l'espace, dépendent de la décomposition d'un polynôme du sixième degré en la somme de quatre carrés.

Dans cette note, je me restreindrai au cas plus simple où on le met sous la forme d'une somme de trois carrés, ce qui correspond, au point de vue géométrique, à l'étude des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points (*).

2. Comme, dans tout ce qui suit, je m'appuie surtout sur quelques propriétés des cubiques gauches, je crois tout d'abord devoir les rappeler brièvement.

Soit $a\lambda^3+3b\lambda^2+3c\lambda+d=0$, l'équation d'un plan mobile, λ désignant une variable numérique arbitraire; ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre, dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche K, définie par le système d'équations $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; à chaque valeur de λ correspond un plan osculateur de la cubique dont je désignerai le point de contact sous le nom de point (λ), en disant que λ est le paramètre de ce point. On voit facilement, d'ailleurs, que les coordonnées de ce point sont données par les formules

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{-\lambda}=\frac{c}{\lambda^2}=\frac{d}{-\lambda^3}.$$

3. L'équation d'un plan quelconque étant $a\delta-3b\gamma+3c\beta-d\alpha=0$, on voit que ce plan coupe la cubique K en trois points dont les paramètres sont les racines de l'équation $\alpha\lambda^3+3\beta\lambda^2+3\gamma\lambda+\delta=0$; ces points définissent d'ailleurs complétement le plan, en sorte qu'on peut le considérer comme déterminé par le polynôme du troisième degré qui forme le premier membre de cette équation.

Dans ce qui suit, si A représente d'une façon générale l'équation d'un plan, A' désignera le polynôme qui a pour racines les paramètres des points où ce plan coupe la cubique. Le degré de ce polynôme A' s'abaissera du reste, si le plan passe par le point de la cubique dont le paramètre est infini; l'équation $m=0$, par exemple, où m désigne une constante, est l'équation du plan osculateur en ce point.

4. Étant donnés six points dans l'espace, on peut mener par ces six points une infinité de cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur une surface du quatrième ordre S. Les différentes génératrices de ces cônes forment un *complexe* de droites du sixième ordre; en effet, étant pris arbitrairement un point M de l'espace, pour qu'une droite passant par ce point soit une droite du complexe, il faut et il suffit que l'on puisse construire un cône du second ordre ayant son sommet sur cette droite, et passant par les six points donnés ainsi que par le point M.

Or, d'après un beau mémoire de M. Hesse (*Crelle*, t. 49), le lieu des sommets des cônes du second ordre que l'on peut mener par sept points donnés est une courbe gauche du sixième ordre Q; le cône du complexe, qui est le cône projectif de cette courbe, est donc aussi du sixième ordre.

(*) Voir, à ce sujet : HIERHOLZER, *Sur une surface du quatrième ordre;* Math. Ann., t. IV, p. 172.

5. La surface S est le lieu des courbes Q. On peut, par les six points donnés, mener une cubique gauche bien déterminée K; soit $V=0$ l'équation du sixième degré dont les racines sont les paramètres de ces points. Je ferai remarquer que le degré de cette équation peut s'abaisser au cinquième, si le système de coordonnées est tellement choisi que le paramètre d'un des points donnés soit égal à l'infini.

Considérons un des cônes du second ordre que l'on peut mener par les six points; son équation peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme $AC-B^2=0$, où $A=0$ et $C=0$ désignent les équations de deux plans tangents quelconques à ce cône, et $B=0$ l'équation du plan des génératrices de contact. Les paramètres des points de rencontre du cône avec la cubique sont évidemment les racines de l'équation $A'C'-B'^2=0$; on doit donc avoir $V=B'^2-A'C'$. Et réciproquement, si l'on met le polynôme du sixième degré V sous la forme précédente, on en déduira l'équation d'un cône du second ordre passant par les six points.

6. Étant donnée une droite quelconque du complexe, c'est-à-dire une génératrice d'un cône du second ordre passant par les six points, on peut la déterminer par l'équation $A=0$ du plan tangent au cône le long de cette droite, et par l'équation $B=0$ du plan mené par cette droite et par le point de la cubique dont le paramètre est l'infini.

De cette façon, on voit que le polynôme B' sera simplement du second ordre, et l'on devra avoir $V=B'^2-A'C'$. Soient p, q, r les racines de l'équation $A'=0$; pour chacune de ces racines, on aura $B'=\sqrt{V}$; et, le polynôme B' étant du second degré, on pourra le déterminer par la formule de Lagrange.

Si l'on pose pour un instant $A'=f(\lambda)=(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)$ et $B'=\varphi(\lambda)$, on aura

$$\varphi(\lambda)=\sqrt{V(p)}\,\frac{(x-q)(x-r)}{f'(p)}+\sqrt{V(q)}\,\frac{(x-p)(x-r)}{f'(q)}+\sqrt{V(r)}\,\frac{(x-p)(x-q)}{f'(r)}.$$

On déduirait facilement de là les équations $A=0$ et $B=0$ des plans qui déterminent la droite du complexe, et l'on voit que ses quatre coordonnées s'exprimeront au moyen des variables p, q, r; l'élimination de ces variables entre les équations qui donnent ces coordonnées fournira l'équation elle-même du complexe.

7. Un plan quelconque est tangent à quatre cônes du complexe.

En effet, $A=0$ étant l'équation de ce plan, si l'on pose

$$A'=(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r),$$

on voit, par ce qui précède, que les génératrices de contact sont déterminées par l'expression $\varphi(\lambda)=0$, expression qui, à cause des doubles signes, est susceptible de quatre valeurs.

Les équations de ces quatre droites (dans le plan donné) sont de la forme

$$M+N+P=0,\quad M+N-P=0,\quad M-N+P=0,\quad M-N-P=0,$$

$M=0$, $N=0$ et $P=0$ étant les équations des côtés du triangle formé par les trois points où le plan donné coupe la cubique gauche K.

D'où cette conclusion :

Un plan pris arbitrairement est tangent à quatre cônes du complexe ; les génératrices de contact forment un quadrilatère complet; les trois points de rencontre des diagonales de ce quadrilatère sont les points où le plan coupe la cubique gauche K.

8. Le lien intime qui existe, d'après les considérations précédentes, entre la décomposition en trois carrés d'un polynôme du sixième degré et le problème qui consiste à construire les différents cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace, nous indique naturellement le rôle que jouent ces cônes dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques du premier ordre.

Soit, en effet, $AC-B^2=0$ l'équation d'un de ces cônes; le plan mobile dont l'équation est $T=A\rho^2+2B\rho+C=0$, ρ désignant une variable arbitraire, enveloppe ce cône; et les paramètres de ses points de rencontre avec la cubique K sont donnés par l'équation

$$T'=A'\rho^2+2B'\rho+C'=0. \tag{1}$$

Le plan mobile se déplaçant, si l'on fait varier à la fois ρ et le paramètre λ, on aura par la différentiation

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda+2(A'\rho+B')\,d\rho=0,$$

ou, comme $A'\rho+B'=\sqrt{B'^2-A'C'}=\sqrt{V}$, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda+2\sqrt{V}\,d\rho=0,\quad \text{ou encore}\quad \frac{d\lambda}{\sqrt{V}}=-\frac{2d\rho}{\frac{dT'}{d\lambda}}.$$

En désignant par a et b deux constantes quelconques, on déduit de là

$$\frac{(a+b\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{V}}=-\frac{2(a+b\lambda)}{\frac{dT'}{d\lambda}}d\rho; \tag{2}$$

or $\frac{dT'}{d\lambda}$ est un polynôme du second degré en λ ; par suite, d'après un théorème d'Euler bien connu, si l'on fait la somme, pour toutes les racines de l'équation (1), des valeurs que prend alors le second membre de l'équation (2), le résultat est identiquement nul. On a donc aussi, quels que soient a et b,

$$\frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{V(x)}}+\frac{(a+by)\,dy}{\sqrt{V(y)}}+\frac{(a+bz)\,dz}{\sqrt{V(z)}}=0,$$

x, y et z désignant les paramètres des trois points où le plan qui enveloppe le cône coupe la cubique.

On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnés, sur une cubique gauche, six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V=0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux des plans tangents à ce cône, en désignant respectivement par* x_0, y_0 *et* z_0 *les paramètres des points où le premier de ces plans coupe la cubique, et par* x_1, y_1 *et* z_1 *les paramètres des points d'intersection relatifs au second plan, on a les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{V(x)}}+\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{V(y)}}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{V(z)}}=0$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}}+\int_{y_0}^{y_1}\frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}}=0.$$

9. Les équations transcendantes qui précèdent déterminent x_1 et y_1, quand x_0, y_0, z_0 et z_1 sont donnés ; on peut aussi, d'après les considérations qui précèdent, les déterminer géométriquement.

Qu'on imagine, en effet, le plan passant par les points (x_0), (y_0) et (z_0), et l'un quelconque des quatre cônes du complexe qui lui sont tangents. On pourra, par le point (z_1), mener le plan tangent à ce cône, et l'un quelconque de ces plans, par son intersection avec la cubique, donnera les points (x_1) et (y_1). Comme il y a lieu de considérer quatre cônes, on voit par suite qu'on trouvera quatre systèmes de solutions.

10. En terminant ces brèves indications sur le problème géométrique que je me proposais de traiter, je ferai remarquer l'analogie complète des résultats obtenus avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques.

Il obtient, comme on le sait, la construction géométrique de l'addition de ces fonctions, en faisant rouler une tangente sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes, dont la position détermine sur une conique un polynôme du quatrième degré. Pour effectuer géométriquement l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce, il suffit de faire rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points de l'espace dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynôme du sixième degré.