BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LANDAU

Sur quelques intégrales dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 229-241
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__229_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES INÉGALITÉS DANS LA THÉORIE DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN;

Par M. E. Landau.

I.

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, pour $R(s) > 1$, par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \tag{1}$$

on sait d'ailleurs que $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière de s.

D'après l'égalité (1), $\zeta(s)$ reste finie si, la partie réelle σ de $s = \sigma + ti$ étant fixe et supérieure à 1, la partie imaginaire t devient infinie; en effet, on a toujours, pour $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma).$$

Pour $0 < \sigma \leqq 1$, domaine où $\zeta(s)$ peut être représentée par la série

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\}, \tag{2}$$

M. Mellin [1] a démontré le théorème suivant :

Si σ reste fixe et si t va à l'infini positif [2], *on a*

$$(3) \qquad |\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{1-\sigma}) \ [3], \qquad \textit{pour} \quad 0<\sigma<1,$$

$$(4) \qquad |\zeta(\sigma+ti)| = O(\log t), \qquad \textit{pour} \quad \sigma=1.$$

Voici d'abord une démonstration simplifiée de la formule (3) de M. Mellin [4] :

Le terme général de la somme qui figure dans l'égalité (2) étant identique à

$$-s\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

cette égalité peut s'écrire

$$(5) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right\} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

m étant un entier arbitraire dont nous disposerons bientôt; (5) se réduit à

$$(6) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Donc

$$(7) \quad |\zeta(\sigma+ti)| \leqq \frac{1}{|\sigma-1+ti|}\,\frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^\sigma} + |\sigma+ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}.$$

---

(1) *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49).

(2) Il suffit, en vertu de $|\zeta(\sigma+ti)| = |\zeta(\sigma-ti)|$, de considérer les valeurs positives de t.

(3) J'entends par $O(g(t))$, comme d'habitude, une fonction de t telle que son quotient par $g(t)$ reste compris, pour $t=\infty$, entre deux limites finies.

(4) Quant à la formule (4) de M. Mellin, qui n'interviendra pas dans la suite, on en trouvera une démonstration analogue dans mes travaux : *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXV, 1903, p. 90) et *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* (*Mathematische Annalen*, t. LVI, 1903, p. 650-651).

En égalant m au plus grand nombre entier $\leqq t$,

$$m = [t],$$

le second membre de (7) est, pour $0 < \sigma < 1$, de la forme

$$O\left(\frac{1}{t}\right) \cdot O(t^{1-\sigma}) + O(t^{1-\sigma}) + O(t) . O\left(\frac{1}{t^{\sigma}}\right),$$

d'où, en vertu de (7),

$$(3) \qquad |\zeta(\sigma + ti)| = O(t^{1-\sigma}), \qquad \text{pour } 0 < \sigma < 1,$$

ce qui constitue le théorème de M. Mellin.

Pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, M. Mellin [1] a encore rendu plus précise l'inégalité concernant $|\zeta(\sigma + ti)|$ en tirant parti de la relation fonctionnelle de Riemann

$$(8) \qquad \zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s),$$

de l'inégalité

$$(9) \qquad \left|\cos\frac{\pi(\sigma + ti)}{2}\right| = \left|\frac{e^{\frac{\pi}{2}(-t+\sigma i)} + e^{\frac{\pi}{2}(t-\sigma i)}}{2}\right| \leqq \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t} + e^{\frac{\pi}{2}t}}{2}$$

et du fait connu que

$$(10) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{|\Gamma(\sigma + ti)| e^{\frac{\pi}{2}t}}{t^{\sigma - \frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = 1.$$

(8), (9) et (10) donnent, pour σ constant,

$$|\zeta(1 - \sigma - ti)| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{\sigma - \frac{1}{2}}\right) . O\left(e^{\frac{\pi}{2}t}\right) . |\zeta(\sigma + ti)|$$

$$(11) \qquad = O\left(t^{\sigma - \frac{1}{2}}\right) . |\zeta(\sigma + ti)|,$$

d'où, pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, en appliquant (3),

$$|\zeta(1 - \sigma - ti)| = O\left(t^{\sigma - \frac{1}{2}}\right) . O(t^{1-\sigma}) = O(\sqrt{t}),$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 49.

en d'autres termes (¹), pour $o < \sigma < \frac{1}{2}$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = O(\sqrt{t}),$$

ce qui est préférable à (3).

Le résultat complet de M. Mellin relatif à la bande $o < R(s) < 1$, le meilleur qu'on possède aujourd'hui, s'énonce donc de la façon suivante :

$$(12) \qquad |\zeta(s)| = O(\sqrt{t}), \qquad \text{pour} \quad o < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$(13) \qquad |\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}), \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1.$$

II.

L'objet principal du travail actuel est de prouver les relations

$$(14) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \quad o < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$(15) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1,$$

qui sont évidemment, pour toute valeur de σ en question, plus précises que (12) et (13).

J'y parviendrai en appliquant un théorème remarquable démontré récemment par M. Voronoï, dans un ordre d'idées tout différent.

Soient

$$T(n)$$

le nombre des diviseurs de n et

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} T(n)$$

la fonction sommatoire; en d'autres termes, le nombre des solu-

(¹) On n'a qu'à écrire $1 - \sigma$ au lieu de σ et qu'à observer que

$$|\zeta(\sigma + ti)| = |\zeta(\sigma - ti)|.$$

tions des inégalités

$$\varkappa\lambda \leqq x, \qquad \varkappa \geqq 1, \qquad \lambda \geqq 1,$$

ou encore

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right].$$

Dirichlet avait démontré que

$$(16) \qquad \tau(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

où C désigne la constante d'Euler.

Avant M. Voronoï, personne n'avait réussi à trouver une relation plus précise que (16). M. Voronoï (¹) est parvenu, même par une méthode élémentaire (n'appliquant pas la théorie des fonctions analytiques) à prouver que

$$(17) \qquad \tau(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x}\log x).$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s).$$

C'est une fonction entière, comme on sait. En effet, le seul point douteux serait $s = 1$, et les développements dans le voisinage de $s = 1$ sont

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= & &\frac{1}{s-1} + C & &+ C_1(s-1) + \ldots,\\
\zeta^2(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} & &+ \frac{2C}{s-1} & &+ (C^2 + 2C_1) + \ldots,\\
\zeta'(s) &= -\frac{1}{(s-1)^2} & & & &+ C_1 + \ldots,\\
-2C\zeta(s) &= & &-\frac{2C}{s-1} & &- 2C^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Pour $R(s) > 1$, on a

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

(¹) *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXVI, 1903, p. 241-282).

La fonction $F(s)$ est donc représentée, au moins pour $R(s) > 1$, par la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s};$$

en d'autres termes, on a, pour $R(s) > 1$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{18}$$

où

$$a_n = T(n) - \log n - 2C.$$

Cette équation (18) est, du reste, connue ([1]). On n'a pas manqué d'observer que, en vertu de (16),

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n = \sum_{n=1}^{x} \{T(n) - \log n - 2C\} &= \tau(x) - \sum_{n=1}^{x} \log n - 2Cx \\ &= x \log x + (2C - 1)x - x \log x + x - 2Cx + O(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence de la série (18) au moins pour $R(s) > \frac{1}{2}$, en vertu d'une propriété bien connue des séries de Dirichlet. Pareillement, le théorème (17) montre que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n = O(\sqrt[3]{x} \log x), \tag{19}$$

ce qui prouve la convergence de la série (18), au moins pour $R(s) > \frac{1}{3}$. L'égalité (18) est donc valable pour $R(s) > \frac{1}{3}$.

Examinons maintenant comment se comporte la série au second membre de (18) si, $R(s) = \sigma$ étant constant et compris entre $\frac{1}{3}$ et 1, la partie imaginaire t de s augmente indéfiniment. On a,

---

([1]) *Voir*, par exemple, FRANEL, *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. III, 1896, p. 103, ou KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, t. I, Leipzig, 1901, p. 349-351.

pour m quelconque,

$$F(s)=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{n^s}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{S(n)-S(n-1)}{n^s}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{T(n)-\log n-2C}{n^s}+\sum_{n=m+1}^{\infty}S(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)-\frac{S(m)}{(m+1)^s}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{T(n)}{n^s}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\log n}{n^s}-2C\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^s}+s\sum_{n=m+1}^{\infty}S(n)\int_0^1\frac{du}{(n+u)^{s+1}}-\frac{S(m)}{(m+1)^s},$$

$$|F(s)|\leqq\sum_{n=1}^{m}\frac{T(n)}{n^\sigma}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\log n}{n^\sigma}+2C\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^\sigma}+\sqrt{\sigma^2+t^2}\sum_{n=m+1}^{\infty}|S(n)|\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\frac{|S(m)|}{(m+1)^\sigma}.$$

Nous pouvons appliquer au second membre les relations

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{T(n)}{n^\sigma}=O(m^{1-\sigma}\log m)\quad (^1),$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\log n}{n^\sigma}=O(m^{1-\sigma}\log m),$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^\sigma}=O(m^{1-\sigma}),$$

$$|S(n)|<A\sqrt[3]{n}\log n\qquad(\text{pour } n\geqq 2)\quad(^2);$$

nous obtiendrons, en posant $m=\left[t^{\frac{3}{2}}\right]$,

$$|F(s)|=O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right)+O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right)+O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\right)$$
$$+O(t).O\sum_{n=\left[t^{\frac{3}{2}}\right]+1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{\frac{2}{3}+\sigma}}+O\left(\frac{\sqrt[3]{t^{\frac{3}{2}}}\log t}{t^{\frac{3}{2}\sigma}}\right)$$
$$=O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right)+O(t).O\left(t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sigma\right)}\log t\right)+O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sigma}\log t\right)$$
$$=O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right).$$

---

(1) *Voir*, par exemple, le Mémoire de M. Voronoï, p. 281.

(2) A désigne une constante absolue. Cette inégalité n'est autre chose que (19).

Or, on a

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s);$$

donc, pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$,

$$|\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right),$$

$$|\zeta^2(s)| = |-\zeta'(s) + 2C\zeta(s) + \{\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)\}|,$$

$$(20) \qquad \leqq |\zeta'(s)| + 2C|\zeta(s)| + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right).$$

Dans (20), le terme $2C|\zeta(s)|$ peut être négligé vis-à-vis du dernier terme $O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right)$, en vertu du théorème (3) de M. Mellin

$$|\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}).$$

Quant à $|\zeta'(s)|$, on peut traiter cette expression par la méthode appliquée plus haut à $|\zeta(s)|$. On a, en différentiant (6), pour $R(s) > 0$,

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s}$$
$$- \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)}{(n+u)^{s+1}} du,$$

$$|\zeta'(\sigma+ti)| \leqq \frac{1}{|\sigma - 1 + ti|^2} \frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \frac{1}{|\sigma - 1 + ti|} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\sigma-1}}$$
$$+ \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^\sigma} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} + |\sigma + ti| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n^{1+\sigma}},$$

d'où, pour $m = [t]$, en supposant $0 < \sigma < 1$ (¹),

$$|\zeta'(s)| = O\left(\frac{1}{t^2} t^{1-\sigma}\right) + O\left(\frac{1}{t} \log t . t^{1-\sigma}\right)$$
$$+ O(t^{1-\sigma} \log t) + O(t^{-\sigma}) + O(t \log t . t^{-\sigma}) = O(t^{1-\sigma} \log t),$$

quantité négligeable vis-à-vis du dernier terme de l'inégalité (20)

(¹) Pour notre objet, il s'agit seulement des valeurs de σ comprises entre $\frac{1}{3}$ et 1.

Cette inégalité se réduit donc à

$$|\zeta^2(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right),$$

(21) $$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right).$$

Cette relation (21) vient d'être démontrée pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$.

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$, on peut conclure de (20) et de

(11) $$|\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right).|\zeta(\sigma+ti)|$$

que

$$|\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right) = O\left(t^{\frac{1}{4}(1+\sigma)}\sqrt{\log t}\right);$$

donc, en remplaçant σ par $1-\sigma$, pour $0 < \sigma < \frac{2}{3}$,

$$|\zeta(\sigma-ti)| = |\zeta(\sigma+ti)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right),$$

(22) $$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right).$$

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{2}{3}$, les deux formules (21) et (22) sont valables; on voit aisément que, pour $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{3}$, la première est la plus précise et que, pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2}$, c'est la seconde.

J'arrive donc au résultat final

(14) $$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

(15) $$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1,$$

annoncé au commencement de ce paragraphe.

III.

Je viens de démontrer un nouveau théorème sur la fonction $\zeta(s)$, en appliquant un théorème de la théorie élémentaire des fonctions numériques. Dans un but inverse, je vais maintenant préciser une formule connue de la théorie élémentaire des fonctions numériques en me servant de certaines propriétés analytiques de la fonction $\zeta(s)$ trouvées il y a quelques années.

Voici la formule connue ([1]) dont il s'agit :

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}), \tag{23}$$

où $Q(x)$ désigne le nombre des nombres $\leqq x$ qui ne sont divisibles par aucun carré > 1, en d'autres termes, qui ne contiennent chacun de leurs facteurs premiers qu'à la première puissance. On peut aussi définir $Q(x)$ par la somme

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{x} \{\mu(n)\}^2,$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius. La relation (23) se démontre, comme on sait, facilement au moyen de l'identité connue

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]; \tag{24}$$

en effet, on tire de (24)

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n)\left(\frac{x}{n^2} - \theta_{n,x}\right),$$

où

$$0 \leqq \theta_{n,x} < 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} Q(x) &= x \cdot \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n)\,\theta_{n,x} \\ &= x \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x}) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x} \\ &= \frac{6}{\pi^2}x + O\left(x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

([1]) *Voir*, par exemple, GEGENBAUER, *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie* (*Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in*

Le quotient

$$(25)\qquad \frac{Q(x)-\frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}}$$

reste donc compris, pour tous les $x \geqq 1$, entre deux limites finies. Je prouverai dans ce qui suit que le quotient (25) tend, pour $x=\infty$, vers la limite o [1].

Pour cela, j'appliquerai le théorème suivant, que j'ai déduit [2], il y a quelques années, des recherches modernes sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann :

$$(26)\qquad M(x)=\sum_{n=1}^{x}\mu(n)=O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right).$$

On a [3]

$$(27)\quad Q(x)=\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]=\sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1}\mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]+\sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}}\mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right].$$

Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. XLIX, 1885, p. 47); et BERGER, *Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres* (*Nova Acta regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3e série, t. XIV, 1887, p. 110).

(1) J'ai déjà fait allusion à ce théorème, sans entrer dans les détails, dans mon Mémoire *Ueber die zahlentheoretische Function* $\mu(k)$ (*Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. CXII, IIa, 1903, p. 562, note 3).

(2) *Ueber die asymptotischen Werte einiger zahlentheoretischer Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. LIV, 1901, p. 585). Dans mon Mémoire cité dans la note précédente, j'ai démontré un théorème beaucoup plus précis; mais il me paraît intéressant de constater que la relation (26) suffit pour le but actuel. On peut aussi aborder le problème directement en appliquant à la fonction génératrice

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(n)-Q(n-1)}{n^s}=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

les théorèmes sur la fonction $\zeta(s)$.

(3) Pour simplifier, j'écris les limites de sommation sans le signe [ ]. Une somme étendue de a à b doit signifier que la variable parcourt les valeurs entières de $[a]$ à $[b]$.

Dans (27), on a d'abord

$$\sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \mu(n)\left(\frac{x}{n^2}-\theta_{n,x}\right) = x \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{M(n)-M(n-1)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} M(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$+ x\frac{M\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]-1\right)}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{n}{\log n \log\log n}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+ x\,O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x . \log x . \log\log x}\cdot\frac{(\log\log x)^2}{x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O\left(\frac{\log\log x}{\sqrt{x}.\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right). \tag{28}$$

La dernière somme qui figure dans l'équation (27) est

$$\sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \{M(n)-M(n-1)\}\left[\frac{x}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} M(n)\left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right)$$

$$- M\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]-1\right)\left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2}\right]$$

$$= O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \frac{n}{\log n \log\log n}\left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right)$$

$$+ O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x.\log x.\log\log x}(\log\log x)^2\right)$$

$$= O\frac{\sqrt{x}}{\log x \log\log x} \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= O\frac{\sqrt{x}}{\log x \log\log x}\cdot\left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2}\right] + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}\log\log x}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$(29) \qquad = O\left(\frac{\sqrt{x}\log\log x}{\log x}\right).$$

En combinant (27), (28) et (29), on obtient finalement

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right),$$

d'où

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)-\frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$
