

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. GOURSAT

## **Sur la théorie des fonctions implicites**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 31 (1903), p. 184-192

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1903\\_\\_31\\_\\_184\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__184_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS IMPLICITES ;**

Par M. E. GOURSAT.

On connaît les beaux résultats obtenus par M. E. Picard dans l'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, grâce à sa méthode des approximations successives. Cette méthode s'applique également avec une grande facilité à la théorie des fonctions implicites. Pour fixer les idées, je resterai d'abord dans le domaine réel, quoiqu'il soit bien aisé d'étendre les résultats aux fonctions définies par des équations dont le premier membre est analytique.

1. Soit  $f(x, y)$  une fonction des deux variables indépendantes réelles  $x$  et  $y$ , continue dans le voisinage d'un système de valeurs  $x_0, y_0$ , tel que  $f(x_0, y_0) = 0$ . Pour préciser, nous supposerons que cette fonction est continue dans un domaine D défini par les inégalités

$$(1) \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres positifs. Nous admettrons de plus que l'on peut choisir les nombres  $a$  et  $b$  assez petits pour que l'on ait

$$(2) \quad |f(x, y') - f(x, y'')| < K |y' - y''|,$$

$x$  étant une valeur quelconque comprise entre  $x_0 - a$  et  $x_0 + a$ ,  $y', y''$  étant de même deux valeurs quelconques de  $y$  comprises entre  $y_0 - b$  et  $y_0 + b$ , et  $K$  un nombre positif constant *plus petit que l'unité*. Cette dernière condition sera certainement vérifiée si la fonction  $f(x, y)$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  s'annulant pour  $x = x_0, y = y_0$ , et continue dans le voisinage.

Ces conditions étant supposées satisfaites, nous allons démontrer que l'équation

$$(3) \quad y - y_0 = f(x, y),$$

où l'on regarde  $x$  comme une variable indépendante et  $y$  comme l'inconnue admet une racine, et une seule, qui tend vers  $y_0$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

Il est clair que l'on peut, dans la démonstration, supposer  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . L'équation (3) prend la forme

$$(3') \quad y = f(x, y),$$

la fonction  $f(x, y)$  s'annulant pour  $x = y = 0$ , et restant continue lorsque  $x$  varie de  $-a$  à  $+a$ , et  $y$  de  $-b$  à  $+b$ . Posons

$$(4) \quad y_1 = f(x, 0), \quad y_2 = f(x, y_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x, y_{n-1}), \quad \dots;$$

il faut d'abord montrer qu'en prenant  $x$  assez petit,  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , restent inférieurs à  $b$  en valeur absolue. Par hypothèse, si  $|x| < a$  et  $|y| < b$ , on a

$$|f(x, y) - f(x, 0)| < K |y|,$$

$K$  étant plus petit que l'unité; on a donc *a fortiori*

$$|f(x, y)| < |y_1| + K |y|.$$

Comme  $y_1$  tend vers zéro avec  $x$ , nous pourrons prendre un nombre  $a' \leq a$  tel que,  $x$  restant compris entre  $-a'$  et  $+a'$ , on ait

$$|y_1| < b(1 - K).$$

Si  $|y|$  est inférieur à  $b$ , on aura donc

$$|f(x, y)| < b(1 - K) + Kb,$$

ou  $|f(x, y)| < b$ , pourvu que  $x$  soit compris entre  $-a'$  et  $+a'$ . Il s'ensuit que  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  seront tous inférieurs à  $b$  en valeur absolue, si la valeur absolue de  $x$  est moindre que  $a'$ .

Pour prouver que  $y_n$  tend vers une limite lorsque  $n$  croît indéfiniment, considérons la série

$$(5) \quad y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

Des relations

$$y_n = f(x, y_{n-1}), \quad y_{n-1} = f(x, y_{n-2})$$

on tire, d'après la condition (2),

$$|y_n - y_{n-1}| < K|y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

Les termes de la série (5) sont donc plus petits en valeur absolue que les termes d'une progression géométrique de raison  $K < 1$ . La somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes, ou  $y_n$ , tend par conséquent vers une limite  $Y$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Cette limite  $Y$  est une racine de l'équation (3), car, si l'on fait croître  $n$  indéfiniment, les deux membres de la relation

$$y_n = f(x, y_{n-1})$$

tendent respectivement vers  $Y$  et  $f(x, Y)$ , et l'on a à la limite

$$Y = f(x, Y).$$

Cette racine  $Y$  est une fonction de la variable  $x$ , définie dans l'intervalle  $(-a', +a')$ . C'est une fonction continue, car la série (5) est, d'après ce qui précède, uniformément convergente dans cet intervalle; et tous les termes sont aussi des fonctions continues. On a d'ailleurs

$$|Y| < \frac{|y_1|}{1 - K},$$

ce qui montre que la racine  $Y$  tend vers zéro en même temps que  $x$ .

L'équation (3) n'admet pas d'autre racine tendant vers zéro avec  $x$ . D'une façon plus précise, lorsque  $x$  est compris

entre  $-a'$  et  $+a'$ , il n'existe pas d'autre racine que  $Y$ , dont la valeur absolue soit inférieure à  $b$ . Soit en effet  $Z$  une racine, inférieure à  $b$  en valeur absolue, de l'équation (3'); des deux relations

$$Z = f(x, Z), \quad y_n = f(x, y_{n-1})$$

on déduit, en appliquant toujours la condition (2),

$$|Z - y_n| < K |Z - y_{n-1}|,$$

et par suite

$$|Z - y_n| < K^{n-1} |Z - y_1|.$$

La différence  $Z - y_n$  tend donc vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment, et  $Z$  est identique à  $Y$ .

2. Il est facile de passer de la proposition précédente au théorème d'existence des fonctions implicites, sous la forme qu'on lui donne ordinairement. Nous l'énoncerons de la façon suivante :

*Soit  $F(x, y)$  une fonction continue des deux variables  $x, y$ , dans le voisinage d'un système de valeurs  $x = x_0, y = y_0$ , pour lequel  $F(x_0, y_0) = 0$ , et admettant une dérivée partielle  $\frac{\partial F}{\partial y}$  continue dans le voisinage du même système de valeurs, mais différente de zéro pour  $x = x_0, y = y_0$ . L'équation*

$$(6) \quad F(x, y) = 0,$$

*admet une racine et une seule tendant vers  $y_0$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .*

Soit en effet  $m$  la valeur de la dérivée  $\frac{\partial F}{\partial y}$  pour  $x = x_0, y = y_0$ ;  $m$  est par hypothèse différent de zéro, et l'équation (6) est équivalente à l'équation

$$y - y_0 = y - y_0 - \frac{1}{m} F(x, y) = f(x, y).$$

Or la fonction  $f(x, y)$  du second membre est nulle, ainsi que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pour  $x = x_0, y = y_0$ , et ces deux fonctions sont continues dans le voisinage. On peut donc appliquer à cette équation le théorème démontré plus haut; ce qui conduit à la proposition énoncée.

*Remarque.* — La démonstration précédente ne suppose rien sur l'existence de la dérivée  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . On peut se rendre compte aisément que l'existence de cette dérivée n'est nullement nécessaire. Soit par exemple  $\varphi(x)$  une fonction continue sans dérivée, prenant une valeur positive  $b$  pour  $x = a$ . L'équation  $y^2 = \varphi(x)$  admet deux racines qui tendent respectivement vers  $\pm\sqrt{b}$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , et qui sont aussi des fonctions continues de  $x$  dans le voisinage.

3. Considérons maintenant le cas général d'un nombre quelconque d'équations. Soient

$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p)$ ,  
 $p$  fonctions des  $n + p$  variables  $x_i, y_k$ , continues et admettant des dérivées partielles continues  $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$  dans le voisinage des valeurs  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, \dots, y_p = 0$ . Si de plus les  $p$  fonctions  $f_i$ , ainsi que les  $p^2$  dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ , s'annulent pour ce système de valeurs, les  $p$  équations

$$(7) \quad y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \dots, \quad y_p = f_p$$

admettent un système de solutions et un seul de la forme

$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  
 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  étant des fonctions continues des  $n$  variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , qui tendent vers zéro lorsque toutes ces variables tendent vers zéro.

Supposons les fonctions  $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial y_k}$  continues pour les valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p$  satisfaisant aux inégalités

$$(8) \quad |x_1| \leq a_1, \quad |x_2| \leq a_2, \quad \dots, \quad |x_n| \leq a_n, \quad |y_1| \leq b_1, \quad \dots, \quad |y_p| \leq b_p.$$

Comme on peut toujours remplacer les nombres  $a_i, b_k$  par des nombres positifs plus petits, nous supposons que l'on a choisi ces nombres assez petits pour que la valeur absolue de l'une quelconque des dérivées  $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$  soit inférieure à  $\frac{K}{p}$  dans le domaine défini



L'inégalité (11) montre que l'on aura aussi  $|y_i^{(m)}| < b$ , et l'on démontrera ainsi de proche en proche que toutes les valeurs absolues  $|y_i^{(2)}|, |y_i^{(3)}|, \dots, |y_i^{(m)}|, \dots$  seront inférieures à  $b$ , pourvu que l'on ait

$$|x_1| \leq a_1, \quad |x_2| \leq a_2, \quad \dots, \quad |x_n| \leq a_n.$$

Des deux relations

$$\begin{aligned} y_i^{(m)} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \dots, y_p^{(m-1)}), \\ y_i^{(m-1)} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1^{(m-2)}, y_2^{(m-2)}, \dots, y_p^{(m-2)}), \end{aligned}$$

on déduit de même

$$\begin{aligned} |y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}| &< \frac{K}{p} |y_1^{(m-1)} - y_1^{(m-2)}| \\ &+ \frac{K}{p} |y_2^{(m-1)} - y_2^{(m-2)}| + \dots + \frac{K}{p} |y_p^{(m-1)} - y_p^{(m-2)}|. \end{aligned}$$

Soit  $M_{m-1}$  la valeur maximum des valeurs absolues des différences  $|y_i^{(m-1)} - y_i^{(m-2)}|$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$ ; l'inégalité précédente prouve que l'on aura

$$|y_i^{(m-1)} - y_i^{(m-2)}| < KM_{m-1}.$$

En particulier, si  $H$  est la valeur maximum de  $|y_1^{(1)}|, |y_2^{(1)}|, \dots, |y_p^{(1)}|$ , la valeur maximum des valeurs absolues  $|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}|, \dots, |y_p^{(2)} - y_p^{(1)}|$  sera moindre que  $KH$ , et, en continuant de la sorte, on voit que la valeur absolue de  $y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}$  sera inférieure à  $K^{m-1}H$ . La série

$$y_i^{(1)} + \{y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\} + \dots + \{y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}\} + \dots$$

a donc ses termes plus petits en valeur absolue que ceux d'une progression géométrique de raison  $K < 1$ . Il s'ensuit que  $y_i^{(m)}$  tend vers une limite  $Y_i$  lorsque  $m$  augmente indéfiniment. Soient  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  les limites vers lesquelles tendent respectivement  $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_p^{(m)}$  lorsque  $m$  croît indéfiniment. La relation

$$y_i^{(m)} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1^{(m-1)}, \dots, y_p^{(m-1)})$$

devient à la limite

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_p), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$



