## BULLETIN DE LA S. M. F.

## A. AURIC

## Sur une propriété très générale des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 177-179

<a href="http://www.numdam.org/item?id=BSMF\_1902\_30\_177\_1">http://www.numdam.org/item?id=BSMF\_1902\_30\_177\_1</a>

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

## SUR UNE PROPRIÉTÉ TRÈS GÉNÉRALE DES DÉTERMINANTS;

Par M. A. Auric.

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

(1) 
$$a_i^0 = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^p x_p + \ldots + a_i^n x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Appelons  $D_n^n$  le déterminant formé par les coefficients et  $D_n^0$  le déterminant obtenu en remplaçant les éléments de la dernière colonne

$$a_1^n \quad a_2^n \quad \dots \quad a_n^n$$

respectivement par

$$a_1^0$$
  $a_2^0$   $\ldots$   $a_n^0$ .

Appelons de même  $D_q^q$  le déterminant obtenu en ne considérant que les q premières inconnues et les q premières équations, et  $D_q^i$  le déterminant formé en remplaçant, dans  $D_q^q$ ,

 $a_1^q$   $a_1^q$  ...  $a_q^q$ 

respectivement par

$$a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_q^i$$

Soit  $D_n^n(a_\lambda^\mu)$  le déterminant obtenu en supprimant dans  $D_n^n$  la ligne  $\lambda$  et la colonne  $\mu$ .

**Posons** 

$$\theta_n^i = \frac{\mathbf{D}_n^i}{\mathbf{D}_n^u}, \qquad \theta_q^i = \frac{\mathbf{D}_q^i}{\mathbf{D}_q^u},$$

ce qui suppose

$$D_n^n \neq 0, \quad D_q^q \neq 0.$$

Dans notre Mémoire sur les équations linéaires, nous avons mis la solution du système (1) sous la forme générale

$$x_p = \sum_{k=0}^{n-p} \theta_{p+k}^0 \mathbf{T}_p^{p+k},$$

en posant

$$\mathbf{T}_{p}^{p+k} = \sum \left( -\mathbf{1} \right)^{\mathbf{y}} \theta_{p}^{p+\lambda_{1}} \quad \theta_{p+\lambda_{1}}^{p+\lambda_{1}+\lambda_{2}} \quad \dots \quad \theta_{p+k-\lambda_{\nu}}^{p+k},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_v = k \qquad (\lambda_i \neq 0).$$

Il est facile de montrer, en donnant à  $a_i^0$  des valeurs spéciales,

$$a_i^0 = 0$$
 si  $i \neq p + k$ ,  
 $a_i^0 = 1$  si  $i = p + k$ ,

que l'on a

$$\mathbf{T}_{p}^{p+k} = \frac{\mathbf{D}_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p})}{\mathbf{D}_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p+k})}.$$

On a dès lors la relation très générale que nous voulions établir

$$\frac{\mathbf{D}_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p})}{\mathbf{D}_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p+k})} = \sum (-1)^{\mathsf{v}} \frac{\mathbf{D}_{p}^{p+\lambda_{1}} \, \mathbf{D}_{p+\lambda_{1}}^{p+\lambda_{1}+\lambda_{2}} \, \dots \, \mathbf{D}_{p+k-\lambda_{\nu}}^{p+k}}{\mathbf{D}_{p}^{\nu} \, \mathbf{D}_{p+\lambda_{1}}^{p+\lambda_{1}} \, \dots \, \mathbf{D}_{p+k-\lambda_{\nu}}^{p+k-\lambda_{\nu}}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{\nu} = k \quad (\lambda_i \neq 0).$$

Les symboles  $\mathbf{T}_p^{p+k}$  et  $\theta_p^{p+k}$  sont tout à fait réciproques; on a en effet les relations suivantes :

$$\theta_p^{p+k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\nu} T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots T_{p+k-\lambda_n}^{p+k}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\nu} = k \quad (\lambda_i \neq 0),$$

avec

$$\sum_{k=0}^{k=j} \theta_p^{p+k} \cdot \mathbf{T}_{p+k}^{p+i} = \sum_{k=0}^{k=j} \mathbf{T}_p^{p+k} \, \theta_{p+k}^{p+i} = o.$$

On a de même

$$x_p = \sum_{0}^{n-p} \theta_{p+k}^0 \mathbf{T}_p^{p+k},$$
  $\theta_p^0 = \sum_{0}^{n-p} x_p \theta_p^{p+k}.$ 

Comme application prenons le cas simple de k = 2; on aura immédiatement

$$\frac{\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^p)}{\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+2})} = \frac{\mathbf{D}_{p}^{p+1}\,\mathbf{D}_{p+1}^{p+2}}{\mathbf{D}_{p}^{p}\,\mathbf{D}_{p+1}^{p+1}} - \frac{\mathbf{D}_{p}^{p+2}}{\mathbf{D}_{p}^{p}}$$

et en écrivant les déterminants du second membre, comme les mineurs de  $D_{p+2}^{p+2}$ , il vient

$$\begin{array}{l} \mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p})\,\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p+1}\,a_{p+2}^{p+2}) = \mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p}\,a_{p+2}^{p+2})\,\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p+1}) \\ \qquad \qquad -\,\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p}\,a_{p+2}^{p+1})\,\mathbf{D}_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+2}) \end{array}$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$\mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^p_{p+2})\,\mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^{p+1}_{p+1}\,a^{p+2}_{p+2}) = \left| \begin{array}{cc} \mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^p_{p+2}\,a^{p+2}_{p+1}) & \mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^p_{p+2}\,a^{p+1}_{p+1}) \\ \mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^{p+2}_{p+2}) & \mathbf{D}^{p+2}_{p+2}(a^p_{p+2}) \end{array} \right|.$$

On reconnaît alors une propriété bien connue des déterminants (voir p. 11 du Mémoire précité).