J. CLAIRIN

Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__37_0>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. Clairin.

Les équations linéaires aux dérivées partielles admettent une infinité de transformations infinitésimales de contact permutables : on n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance du moins, étudié la question inverse et recherché quelles sont les équations qui possèdent la même propriété; je me propose d'examiner un cas particulier de ce problème et de montrer que les équations linéaires et certaines équations très simples, auxquelles s'applique la méthode d'intégration de M. Darboux, sont les seules équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui jouissent de la propriété énoncée, à condition de regarder comme identiques deux équations qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact.

Dans ce qui suit, les lettres x, y, z, p, q, r, s, t ont leur signification ordinaire; nous supposons que r figure dans toutes les équations que nous considérerons; s'il en était autrement, il suffirait d'effectuer un changement de variables très simple. Pour abréger, nous désignerons une transformation infinitésimale de contact par sa fonction caractéristique.

Si une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes admet une transformation infinitésimale de contact, on peut, à l'aide d'une transformation de contact, remplacer cette équation par une équation qui ne contienne plus z,

$$r + f(x, y, p, q, s, t) = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire par une équation qui reste invariante pour la transformation infinitésimale 1. Les fonctions caractéristiques des transformations infinitésimales de contact permutables à la transformation 1 ne dépendent pas de z.

Imaginons qu'il existe deux telles transformations $g_1(x, y, p, q)$, $g_2(x, y, p, q)$ qui laissent (1) invariante. Si les fonctions g_1, g_2 ne sont pas distinctes, on peut, à l'aide d'une transformation en (x, p), remplacer (1) par une équation admettant les transformations $1, y, \sigma(y)$. Une telle équation est de la forme

$$(\alpha) \qquad r = \varphi(x, y, p, s)$$

et admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z + \mathrm{Y},$$

où Y désigne une fonction quelconque de y; deux transformations de ce groupe sont permutables.

Supposons maintenant que g_1 et g_2 soient distinctes; si les transformations correspondantes sont permutables, on a

$$(g_1, g_2) = 0;$$

une transformation de contact en (x, p) permet de remplacer l'équation (1) par une équation qui admet les transformations infinitésimales dont les fonctions caractéristiques sont $1, x, y$, c'est-à-dire par une équation dont le premier membre ne contient aucune des quantités z, p, q

$$(2) \qquad r + \varphi(x, y, s, t) = 0.$$

Cela posé, la fonction caractéristique d'une transformation infinitésimale de contact permutable aux transformations $1, x, y$ et distincte de ces transformations ne dépend que de x, y et n'est pas linéaire par rapport à ces quantités. Si l'équation (2) reste invariante pour une telle transformation définie par la fonction $\lambda(x, y)$, l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0$$

est vérifiée, quelles que soient les valeurs de s et t; on a donc

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \, \partial t} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \, \partial t} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0.$$

Il résulte de l'équation qui vient d'être écrite que φ est nécessairement de la forme

$$\varphi = ms + \psi(x, y, s + m_0 t),$$

m et m_0 représentant des fonctions de x, y. Si ψ est linéaire par rapport à $s + m_0 t$, l'équation considérée est une équation linéaire; supposons qu'il en soit autrement, l'équation (3) équivaut au système de deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + m \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + m_0 \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Un pareil système ne peut admettre plus de quatre solutions distinctes sans en admettre une infinité, par conséquent, une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ne peut admettre plus de quatre transformations infinitésimales de contact permutables sans en admettre une infinité. Ce dernier cas se présente si le système (4) est en involution, c'est-à-dire si l'on a

$$m = m_0, \qquad m \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0.$$

Il serait facile de trouver m, mais il vaut mieux remarquer que, si m satisfait à la condition précédente, on peut, par un changement de variables, mettre l'équation

$$r + ms + \psi(x, y, s + mt) = 0$$

sous la forme

$$(\beta)\qquad s(x + y) = q + \chi(x, y, r).$$

En dehors des équations linéaires, les équations (α) et (β) sont les seules équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent une infinité de transformations infinitésimales de contact permutables.

Pour l'un des systèmes de caractéristiques des équations (α) et (β), il existe un invariant du premier ordre, tandis que, pour le second système, il existe trois invariants du deuxième ordre.

Il faut encore remarquer qu'une équation telle que

$$r + ms + \psi(x, y, s + m_0 t) = 0$$

ne peut être une équation de Monge-Ampère que dans le cas où elle est linéaire. Par conséquent, une équation de Monge-Ampère qui admet plus de trois transformations infinitésimales de contact permutables en admet une infinité.