BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Propriété caractéristique du cylindroïde

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 261-265
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__261_1>

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU CYLINDROÏDE;

Par M. Paul Appell.

On sait que Sir Robert Ball a introduit, à propos de la composition des forces appliquées à un solide, un certain conoïde droit appelé *cylindroïde;* il a montré que cette surface réglée partage, avec les cylindres, la propriété que *le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane.* On trouvera un résumé des travaux de Sir Robert Ball à la fin du Mémoire intitulé : *The twelfth and concluding Memoir on the theory of screws,* by Sir Robert Ball (*Transactions of the Royal Irish Academy,* vol. XXXI, 1898).

Après avoir établi que le cylindroïde est le seul conoïde droit possédant cette propriété [1], j'ai été conduit à penser que c'est, en dehors des cylindres, la seule surface réglée qui la possède. Dans une lettre qu'il m'a adressée en 1899 Sir Robert Ball donne également cette propriété comme très vraisemblable. Je ne sais s'il en a publié une démonstration; en voici une d'un caractère tout à fait élémentaire :

---

[1] *Revue de Mathématiques spéciales,* juin 1895 (Nony).

1. Je m'appuierai d'abord sur la proposition suivante : Soient trois plans P_1, P_2, P_3 passant par une même droite D et une droite mobile G rencontrant ces plans respectivement en trois points M_1, M_2, M_3 tels que le rapport $\frac{M_1M_2}{M_1M_3}$ soit constant : alors, *si la droite ne rencontre pas* D (cas où le rapport est indéterminé), *elle reste parallèle à un plan fixe parallèle à* D.

En effet, on voit facilement par la Géométrie élémentaire que la projection de la droite G sur un plan perpendiculaire aux trois plans fixes se déplace parallèlement à elle-même.

2. Imaginons maintenant une surface réglée telle que le lieu des projections d'un point quelconque A de l'espace sur ses génératrices soit une courbe située dans un plan P; nous dirons, pour abréger, que ce plan P correspond au point A. Nous montrerons d'abord qu'il est absurde de supposer que les génératrices de la surface ne sont pas parallèles à un même plan. En effet, supposons une droite G qui se déplace *sans rester parallèle à un plan fixe :* soient G_1, G_2, G' trois positions déterminées de cette droite non parallèles à un même plan. Nous allons montrer que, si la surface possède la propriété indiquée, ses génératrices rencontrent toutes une droite fixe *quelconque* s'appuyant sur G_1 et G_2. Prenons sur G_1 et G_2 deux points fixes F_1 et F_2 choisis de telle façon que la droite F_1F_2 ne rencontre pas G'. Cela est évidemment possible, car les génératrices G_1, G_2, G', étant supposées non parallèles à un même plan, ne sont pas dans un même plan. Menons par les points F_1 et F_2 des plans perpendiculaires à G_1 et G_2; ces plans se coupent suivant une droite Δ. Prenons maintenant sur G' trois points fixes H_1, H_2, H_3 et menons par ces trois points des plans perpendiculaires à G'; ces plans couperont Δ en trois points A_1, A_2, A_3. Par hypothèse, le lieu des projections du point A_1 sur toutes les génératrices est situé dans un plan P_1; ce plan est le plan $F_1F_2H_1$, car F_1, F_2 et H_1 sont les projections de A_1 sur les génératrices spéciales G_1, G_2, G'. De même les plans P_2 et P_3 correspondant à A_2 et A_3 sont les plans $F_1F_2H_2$, $F_1F_2H_3$; ces trois plans *passent par une même droite* D, *la droite* F_1F_2.

Prenons maintenant une génératrice variable G se déplaçant d'une manière continue ; cette droite rencontre les plans P_1, P_2, P_3 en trois points M_1, M_2, M_3 qui, par hypothèse, sont les projections des points A_1, A_2, A_3 sur G; quand cette droite varie, le rapport

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 M_3}$$

reste constant comme égal à $\frac{A_1 A_2}{A_1 A_3}$, car les points A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite. Alors, d'après le lemme 1, ou bien la droite G rencontre la droite D $(F_1 F_2)$, ou bien elle est parallèle à un plan fixe. Mais comme nous écartons cette dernière hypothèse, la droite mobile G *rencontre la droite fixe* $F_1 F_2$.

Ainsi, en prenant deux génératrices G_1 et G_2, toute autre génératrice G devrait rencontrer toute droite $F_1 F_2$ s'appuyant sur G_1 et G_2; ceci est impossible si la surface ne se réduit pas à un plan.

3. D'après ce qui précède, les génératrices sont nécessairement parallèles à un plan directeur. Nous écartons le cas où elles seraient parallèles à une directrice fixe (cas du cylindre), et nous allons montrer que ces génératrices rencontrent nécessairement une droite fixe perpendiculaire au plan directeur, de façon à former un conoïde droit.

Soient G_1 et G_2 deux génératrices fixes non parallèles, $A_1 A_2$ la perpendiculaire commune à ces deux génératrices, droite qui est perpendiculaire au plan directeur. Nous allons montrer que les génératrices rencontrent toutes la droite $A_1 A_2$. Prenons, en effet, une génératrice variable G : cette droite, étant parallèle au plan directeur, se déplace en restant perpendiculaire à $A_1 A_2$. Soit A un point fixe pris sur la droite $A_1 A_2$: par hypothèse, le lieu de la projection M du point A sur la génératrice G est dans un plan P; mais les points A_1 et A_2 appartenant au lieu, le plan P passe par la droite $A_1 A_2$.

Dès lors, si le point M ne se trouve pas sur $A_1 A_2$, la droite G est perpendiculaire au plan fixe P, car elle est perpendiculaire aux deux droites AM et $A_1 A_2$ de ce plan : la droite G étant perpendiculaire à un plan fixe aurait une direction fixe, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que la génératrice G rencontre $A_1 A_2$, et la surface est un *conoïde droit*. Il est alors aisé de voir que c'est un cylindroïde; c'est ce que nous montrerons en reproduisant la démonstration que nous avons donnée dans la *Revue de Mathématiques spéciales* en juin 1895.

4. *Trouver un conoïde droit tel que le lieu des projections d'un point quelconque sur ses génératrices soit une courbe plane.*

Prenons pour axe Oz la directrice rectiligne du conoïde et pour plan xOy le plan directeur, supposé perpendiculaire à Oz. Les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$y = mx, \qquad z = \varphi(m),$$

ou encore, en désignant par $\psi(m)$ une fonction convenablement choisie,

$$(1) \qquad y = mx, \qquad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2},$$

Prenons un point quelconque (α, β, γ) de l'espace : le plan projetant ce point sur la génératrice est

$$(2) \qquad x - \alpha + m(y - \beta) = 0.$$

Les coordonnées de la projection du point α, β, γ sur la génératrice s'obtiennent en résolvant les équations (1) et (2)

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \qquad y = m\frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \qquad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2}.$$

Quel que soit m, ce point doit être dans un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions de α. β, γ. On a donc

$$(4) \qquad A + mB(\alpha + m\beta) + C\psi(m) + D(1+m^2) = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu *identiquement* quels que soient α, β, γ et m; donc, en donnant à α, β, γ des valeurs constantes, d'ailleurs arbitraires, on voit que $\psi(m)$ est nécessairement, d'après (4), une fonction du second degré de m,

$$\psi(m) = am^2 + bm + c,$$

a, b, c désignant des constantes. D'ailleurs cette forme nécessaire de $\psi(m)$ est suffisante, comme nous allons le vérifier en montrant que le conoïde défini par

$$y = mx, \qquad z = \frac{am^2 + bm + c}{1+m^2}$$

possède la propriété demandée. Ce conoïde a pour équation

$$z = \frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2 + y^2}.$$

On peut simplifier cette équation de la façon suivante : Transportons d'abord l'origine en un point O', $z = \lambda$, de l'axe des z. Nous aurons $z = \lambda + z'$ et la nouvelle équation sera

$$z' = \frac{(a-\lambda)y^2 + bxy + (c-\lambda)x^2}{x^2 + y^2}.$$

On peut déterminer λ de façon que la forme quadratique du numérateur, égalée à zéro, représente deux droites rectangulaires $O'x'$ et $O'y'$: il suffit de faire

$$a + c - 2\lambda = 0.$$

La constante λ étant ainsi déterminée, on peut prendre pour nouveaux axes des x' et des y' ces deux droites $O'x'$ et $O'y'$: l'équation prend alors la forme

$$z' = \frac{2kx'y'}{x'^2 + y'^2},$$

k désignant une constante. C'est là, sous sa forme la plus simple, l'équation du *cylindroïde*.

La propriété caractéristique est alors aisée à vérifier.

5. Quand on veut aborder le problème directement par voie analytique, les calculs paraissent compliqués. On pourrait, comme point de départ, étudier la surface suivante :

Étant donnés trois points fixes A_1, A_2, A_3 *et trois plans fixes* P_1, P_2, P_3, *trouver le lieu d'une droite* G *telle que les projections des points* A_1, A_2, A_3 *sur cette droite soient respectivement dans les plans* P_1, P_2, P_3.
