BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 263-282
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__263_0>

SUR LES VARIÉTÉS UNICURSALES A PLUSIEURS DIMENSIONS;

Par M. Léon Autonne.

INTRODUCTION.

Christoffel a inséré, au Tome XIX des *Mathematische Annalen* (pages 280 à 290), un très remarquable article, où, par une discussion strictement algébrique, il aborde et résout les deux problèmes suivants :

I. *Établir l'existence des invariants absolus (rationnels) projectifs, afférents à une forme d'ordre n à p variables;*

II. *Chercher dans quels cas l'égalité des invariants absolus correspondants assure l'équivalence de deux formes.*

Il m'a paru qu'il suffisait, dans l'analyse de Christoffel, de changer et de compléter fort peu de chose pour obtenir, sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions, plusieurs propositions nouvelles.

Tel est le principe de cette Note. Le fond des idées appartient à Christoffel; mon travail a consisté à généraliser un peu les théories et surtout à les interpréter géométriquement.

Voici les résultats saillants contenus dans les recherches ci-après.

Soient $Z_s [s = 1, 2, \ldots, m+n]$ les $m+n$ coordonnées rectilignes d'un point Z dans un espace $\mathfrak{E}$ à $m+n$ dimensions.

Soient $t_j [j = 1, 2, \ldots, m]$ les m coordonnées rectilignes d'un point T dans un espace $\mathfrak{T}$ à m dimensions. Introduisons $m+n$ polynômes $P_s(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\tau; t_1, t_2, \ldots, t_m) = P_s(\mathbf{a}; t)$ en t, avec les coefficients $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\tau$;

$$\tau = (m+n)\frac{(M+1)(M+2)\ldots(M+m)}{m!},$$

M étant le degré maximum des P et quelques-uns des $\mathbf{a}$ pouvant être nuls; définissons un point Z de $\mathfrak{E}$ par les relations

$$Z_s = P_s(\mathbf{a}; t). \tag{o}$$

Quand T parcourt $\mathfrak{T}$, quelle figure $\overline{Z}$ de $\mathfrak{E}$ est décrite par le point Z? Tel est notre premier problème.

Définition I. — Une variété E, située dans $\mathfrak{E}$, sera à m dimensions lorsque pour un point Z, assujetti à se trouver sur E, on peut prendre encore m et seulement m coordonnées arbitrairement

$$\zeta_1 = Z_1, \quad \zeta_2 = Z_2, \quad \ldots, \quad \zeta_m = Z_m,$$

tandis que les n dernières

$$z_1 = Z_{m+1}, \quad \ldots, \quad z_n = Z_{m+n}$$

sont définies par le système $\overline{\zeta}$ des ζ.

Définition II. — La variété E est *indécomposable* lorsque, pour $\overline{\zeta}$ quelconque, E ne peut avoir de point commun avec une variété E′, à m dimensions, sans être située tout entière sur E′.

La réponse à la question est alors la suivante :

Théorème I. — *Le lieu* $\overline{Z}$ *du point* Z, *défini par le système* (o), *est une variété indécomposable à m dimensions* E, *comptée une ou plusieurs fois. Les n équations de* E *peuvent s'écrire*

$$F_i = z_i^{\mu_i} + z_i^{\mu_i-1} C_i^{(1)} + z_i^{\mu_i-2} C_i^{(2)} + \ldots = 0,$$
$$[i = 1, 2, \ldots, n]$$

où les C_i *sont des polynômes par rapport aux* z_σ, $(\sigma \leqq i - 1)$, *à coefficients rationnels en* ζ. *A un système* $\overline{\zeta}$ *donné quelconque, correspondent sur* E, $\mu = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$ *points.* μ *est le* degré *de* E.

Ainsi les n équations de E peuvent être écrites et disposées de façon que, lorsqu'on passe de l'une à la suivante, on introduit chaque fois une seule coordonnée z nouvelle.

E est unicursale par définition.

Supposons maintenant que les τ coefficients **a** soient des polynômes, à coefficients numériques, par rapport aux coordonnées X_s d'un point X de $\mathfrak{E}$. Les équations (o), qui s'écrivent dans ce cas

$$Z_s = P_s(X; t), \tag{1}$$

définissent alors une variété E_X, de même nature que E.

Je cherche de quelle façon influe sur la nature de E la position du point X dans l'espace $\mathfrak{E}$. Voici ce que l'on constate.

THÉORÈME II. — *Plusieurs points* X, X′, X″, ... *peuvent fournir la même variété* $E_X = \mathfrak{e}$, *mais on a dans ce cas un certain nombre de relations telles que*

$$R(X') = R(X'') = \ldots = R(X),$$

où les R *sont des fonctions rationnelles des* $m+n$ *lettres.*

On peut nommer les R les *invariants absolus* de la variété $\mathfrak{e}$.

Il est à remarquer que le lieu $\overline{Z}$ de Z défini par le système (o) peut exceptionnellement avoir moins de m dimensions. Ce cas particulier est exclu par hypothèse.

Introduisons trois définitions suggérées par la théorie des formes, où les hypothèses faites se trouvent réalisées.

Définition III. — Un point Y est *équivalent* à un point X[Y ≡ X] quand il existe au moins un point T fournissant Y au moyen du système

$$Y_s = P_s(X;\, t).$$

Définition IV. — L'équivalence est une propriété réversible [Y ≡ X entraîne X ≡ Y et *vice versa*].

Définition V. — Pour que deux points soient équivalents ensemble [Y ≡ X] il faut et il suffit qu'ils soient équivalents à un troisième [X ≡ Z, Y ≡ Z].

Nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La variété* E_X, *aux* $n+r+\rho$ $(r \geqq 0,\ \rho \geqq 0)$ *invariants absolus* R (X), *est le lieu des points équivalents à un point donné* X *quelconque.*

Parmi les invariants absolus R on peut choisir :

1° n *fondamentaux* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ tels que tous les autres soient algébriquement exprimables avec ces n là ;

2° $n+r$ *semi-fondamentaux* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{P}_{n+r}$ tels que chaque R soit rationnellement exprimable avec les semi-fondamentaux, tandis qu'aucun semi-fondamental n'est rationnellement exprimable avec les semi-fondamentaux précédents.

THÉORÈME IV. — *Pour que deux points* X *et* Y *soient équivalents, il faut et il suffit que les semi-fondamentaux soient* *égaux :*

$$\mathfrak{p}_1(Y) = \mathfrak{p}_1(X), \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{n+r}(Y) = \mathfrak{p}_{n+r}(X).$$

Les n équations

$$\mathfrak{p}_1(Y) = \mathfrak{p}_1(X), \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_n(Y) = \mathfrak{p}_n(X)$$

fournissent pour le lieu $\overline{Y}$ de Y non seulement E_X mais encore une variété parasite $\mathcal{E}$, indécomposable ou non. Les r équations

$$\mathfrak{p}_{n+1}(Y) = \mathfrak{p}_{n+1}(X), \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{n+r}(Y) = \mathfrak{p}_{n+r}(X)$$

ont pour résultat d'écarter la variété parasite $\mathcal{E}$.

Il est facile de retrouver dans l'espace ordinaire l'analogue de quelques-uns des précédents résultats.

Prenons $m = 1$, $n = 2$; E devient une courbe gauche unicursale ordinaire, définie, si $\zeta_1 = x = Z_1$, $z_1 = y = Z_2$, $z_2 = z = Z_3$, par les deux équations

$$F_1 = A_0(x)y^{\mu_1} + A_1(x)y^{\mu_1-1} + \ldots = 0,$$
$$F_2 = B_0(x)z^{\mu_2} + B_1(x, y)z^{\mu_2-1} + B_2(x, y)z^{\mu_2-2} + \ldots = 0,$$

où les A et les B sont des polynômes. On sait que la courbe plane $F_1 = 0$ est la projection (conique, de sommet $0 = x = y$, $z = \infty$) de la courbe E et qu'en général $\mu_2 = 1$. On retombe sur la représentation des courbes gauches au moyen d'un cône et d'un monoïde. Pour plus de détails sur la question je renvoie à mon travail *Sur la représentation des courbes gauches algébriques,* inséré aux *Annales de l'Université de Lyon,* 1896.

Les n équations $F_i = 0$ de E sont la généralisation du procédé qui repose, dans l'espace ordinaire, sur l'emploi du cône et du monoïde.

J'espère revenir ultérieurement sur la matière dans un travail plus étendu, auquel la présente Note servirait de préliminaires.

DÉMONSTRATIONS.

1. Prenons, dans un espace $\mathfrak{E}$ à $m + n$ dimensions, un point Z déterminé par ses $m + n$ coordonnées rectilignes

$$Z_s \qquad [s = 1, 2, \ldots, m + n].$$

Effectuons sur les Z_s le changement de coordonnées le plus général. Alors le système de référence $[(m+n+1)-\text{èdre}]$ occupera une situation absolument quelconque tant dans $\mathfrak{E}$ que par rapport aux diverses figures (variétés) qu'on étudiera ci-après. Tous les Z_s joueront un rôle géométrique analogue et symétrique.

Soit de même, dans un second espace $\mathfrak{T}$ à m dimensions, un point T déterminé par ses m coordonnées rectilignes $t_j\,[j=1, 2, \ldots, m]$.

On admettra, comme pour les Z_s, que tous les t jouent un rôle géométrique analogue.

2. Je dirai qu'une variété E, située dans $\mathfrak{E}$, est à m dimensions dans le cas suivant : pour un point Z, assujetti à être sur E, on peut prendre arbitrairement m et seulement m des $m+n$ coordonnées; en vertu du § 1 les m coordonnées à prendre arbitrairement peuvent être choisies *ad libitum*. Les n coordonnées restantes sont fonctions de ces m là et E est définie par n équations *distinctes* entre les Z_s. Si ces n équations sont algébriques, E sera une *variété algébrique* et n coordonnées Z_s quelconques sont fonctions algébriques des m autres.

3. Répartissons les Z_s en deux catégories de m et de n lettres respectivement, en posant

$$\begin{array}{llll} Z_1 = \zeta_1, & Z_2 = \zeta_1, & \ldots, & Z_m = \zeta_m; \\ Z_{m+1} = z_1, & Z_{m+2} = z_2, & \ldots, & Z_{m+n} = z_n. \end{array}$$

Cette répartition peut se faire (§ 1) d'une façon quelconque sans nuire à la généralité géométrique.

Établissons maintenant, entre les points Z de l'espace $\mathfrak{E}$ et T de l'espace $\mathfrak{T}$ (§ 1), une correspondance résultant des relations

$$\zeta_1 = P_1\ (t), \quad \ldots, \quad \zeta_m = P_m\ (t), \tag{0}$$

$$z_1 = P_{m+1}(t), \quad \ldots, \quad z_n = P_{m+n}(t), \tag{1}$$

où $P_s(t) = P_s(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ est un polynôme.

Quand T parcourt $\mathfrak{T}$, le point correspondant Z, dont les coordonnées sont fournies par les systèmes (0) et (1), parcourt dans $\mathfrak{E}$ une variété E à σ dimensions. Quel est le nombre σ?

$\mathfrak{T}$ comprend ∞^m points T dont chacun fournit un point de E; donc σ ne peut dépasser m. Le cas $\sigma < m$ peut parfaitement se présenter, mais *je l'écarte par hypothèse*. Alors $\sigma = m$.

Les équations (o) *et* (1) *définissent une variété* E *à m dimensions,* unicursale par définition.

Je me propose de construire les n équations de E.

4. Rappelons ce que Christoffel nomme *l'élimination systématique* d'une variable x entre p équations algébriques

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p(x) = 0.$$

Annulons le résultant $R(\varphi_1, \varphi_2)$ des deux premières équations et le plus grand commun diviseur $\varphi_2'(x)$, qui existe en vertu de $R = 0$, des deux polynômes φ_1 et φ_2. Les deux équations $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sont remplacées par deux équivalentes, $R(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ et $\varphi_2'(x) = 0$, dont une ne contient plus x. On n'a plus en x que $p - 1$ équations

$$\varphi_2'(x) = \varphi_3(x) = \ldots = \varphi_p(x) = 0.$$

On annulera encore le résultant $R(\varphi_2', \varphi_3)$ et le plus grand commun diviseur φ_3' des polynômes φ_2' et φ_3. On aura une seconde équation sans x et $p - 2$ équations en x

$$\varphi_3'(x) = \varphi_4(x) = \ldots = \varphi_p(x) = 0.$$

Procédant de proche en proche, on aura :

1° $p - 1$ équations d'où la variable à éliminer x a disparu ;

2° *une* équation en x, qui fournit les racines communes aux p équations $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0$, qui les fournit toutes et qui ne fournit que celles-là.

Ce calcul se nomme, d'après Christoffel, *l'élimination systématique* de x entre les p équations.

5. Rangeons les t dans un ordre quelconque, ce qui est indifférent au point de vue géométrique (§ 1), par exemple, dans l'ordre décroissant des indices. Reprenons les $m + n$ équations (o) et (1) du § 3; appliquons à t_m le procédé de l'élimination systématique.

Il viendra une équation en t_m

$$0 = Q(t_m, t_{m-1}, \ldots; \ \zeta_1, \zeta_2, \ldots; \ z_1, z_2, \ldots),$$

où Q désigne un polynôme, et $m + n - 1$ équations [système (3)] d'où t_m a disparu. Il peut se faire que $t_{m-1}, t_{m-2}, \ldots, t_{m-\rho+1}$ aient disparu avec t_m, mais non $t_{m-\rho}$. On appliquera dans le système (3), à $t_{m-\rho}$, l'élimination systématique. On aura une équation avec $t_{m-\rho}$ et $m+n-2$ équations [système (4)] où l'indice maximum des t qui y figurent sera $m-\rho-\rho'$.

Continuant l'élimination systématique des t_j, successivement rencontrés dans l'ordre décroissant des indices, on construira finalement N équations, où figureront les ζ, les z, les t [système (5)] et $m+n-\mathrm{N}$ équations, où les ζ et les z figureront seuls [système (6)].

Par la loi même de construction $\mathrm{N} \leqq m$. Je dis que $\mathrm{N}=m$.

Si $\mathrm{N}<m$, plaçons Z sur E et d'ailleurs en une situation quelconque. Le système (6), dont les $m+n-\mathrm{N}$ équations sont une conséquence des n équations de E, sera satisfait; le système (5) fournira au plus N des coordonnées t_j de T, les $m-\mathrm{N}$ autres restant arbitraires. La position du point Z sur E dépendra seulement de N variables au plus et il ne pourra y avoir sur E plus de ∞^{N} points. E aura moins de m dimensions, cas exclu par hypothèse (§ 3). Ainsi $\mathrm{N}=m$. Les entiers $\rho, \rho', \ldots$ sont tous égaux à 1. Les n équations du système (6) sont celles de la variété E.

6. En résumé : *les* $m+n$ *équations* (0) *et* (1) *du* § 3 *peuvent se mettre sous la forme suivante :*

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{Q}_j(\zeta;\, z;\, t_1, t_2, \ldots, t_j) \qquad [j=1, 2, \ldots, m],\\
0 &= \mathrm{S}_i\,(\zeta;\, z) \qquad\qquad\qquad\;\; [i=1, 2, \ldots, n],
\end{aligned}
$$

où l'on a écrit, pour les polynômes Q *et* S, $\mathrm{Q}(\zeta;\, z;\, \ldots)$ *et* $\mathrm{S}(\zeta;\, z)$ *au lieu de*

$$\mathrm{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m;\, z_1, \ldots, z_n;\, \ldots), \quad \mathrm{S}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m;\, z_1, \ldots, z_n)$$

et où t_j *figure* effectivement *dans le polynôme* Q_j.

On peut aussi, dans les n équations $\mathrm{S}_i=0$, ranger les z dans l'ordre décroissant des indices; puis éliminer systématiquement les z dans l'ordre indiqué. Raisonnant sur les z comme on vient de le faire sur les t, *on remplacera les n équations* $\mathrm{S}_i=0$ *par n équations équivalentes*

$$[i=1, 2, \ldots, n] \qquad \mathrm{F}_i(\zeta;\, z_1, z_2, \ldots, z_i)=0$$

où z_i *figure effectivement dans le polynôme* F_i.

Les $m+n$ équations

$$Q_j(\zeta;\, z;\, t_1, t_2, \ldots, t_j) = 0, \qquad F_i(\zeta;\, z_1, z_2, \ldots, z_i) = 0,$$

assurent la représentation de la variété E.

Prenons arbitrairement les ζ; les égalités $F_i = 0$ achèveront de fournir les coordonnées du point Z de E. $F_1 = 0$ donnera la seule inconnue z_1. $F_2 = 0$, z_1 étant calculée, donnera z_2, etc.

$Q_1 = 0$ donnera en fonction des ζ et z la seule inconnue t_1. Cette dernière calculée, $Q_2 = 0$ donnera t_2, etc., etc,

7. Le but des recherches qui vont suivre est de discuter et d'approfondir la nature des n équations $F_i = 0$ de E.

Je supposerai, jusqu'à nouvel ordre, qu'on a attribué aux ζ des valeurs constantes *quelconques* et ne ferai plus mention des *variables* ζ.

Les propriétés de l'équation algébrique $F_i(z_i) = 0$ en z_i seront toujours supposées *sous le bénéfice des relations antérieures*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_{i-1} = 0$$

entre $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$.

Enfin si l'on avait $F_i = \mathfrak{F}_i^q$, où q est un entier positif et $\mathfrak{F}_i$ un polynôme, c'est l'équation $\mathfrak{F}_i = 0$ que l'on écrirait aux lieu et place de $F_i = 0$ (*voir* § 16).

8. Si, F_i étant divisible par le polynôme $\mathfrak{P}(\zeta;\, z_1, \ldots, z_{i-1})$, on a

$$F_i = \mathfrak{P}\Phi_i(\zeta;\, z_1, \ldots, z_i),$$

il est licite de remplacer l'équation $F_i = 0$ par $\Phi_i = 0$.

Il faut montrer qu'en biffant $\mathfrak{P}$ on ne néglige aucune portion de la variété E.

Formons, en effet, le résultant $\Delta(\zeta)$ des i équations

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{i-1} = \mathfrak{P} = 0$$

aux $i-1$ inconnues $z_1, \ldots, z_{i-1}$. Δ sera un polynôme en $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Si $\Delta(\zeta) \equiv 0$, la relation $\mathfrak{P} = 0$, c'est-à-dire $F_i = 0$, n'ajoute rien aux relations $F_1 = \ldots = F_{i-1} = 0$, ce qui est absurde, car il n'y aurait plus n équations pour E. Si $\Delta(\zeta) \not\equiv 0$, les ζ ne peuvent plus être simultanément quelconques.

Bref, pour des ζ quelconques, il est licite de supprimer dans F_i le facteur $\mathfrak{P}$. C. Q. F. D.

9. L'équation $F_i(z_i) = 0$ en z_i ne pourra avoir toutes ses racines égales, car F_i serait la puissance exacte d'un polynôme, cas déjà exclu par hypothèse (§ 7).

Soient alors z_i et z'_i deux racines différentes quelconques. Je dis que *lorsque les quantités complexes* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m, z_1, \ldots, z_{i-1}$ *décriront, chacune dans son plan, des circuits fermés convenables,* z_i *sera remplacée par* z'_i.

En effet z_i et z'_i conduiront par l'intermédiaire des équations

$$F_{i+1} = 0, \ldots, F_n = 0, \qquad Q_j = 0, \qquad [j = 1, 2, \ldots, m]$$

du § 6, à deux points différents

$$\begin{array}{llllllll} Z_0 & \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, & z_1, & \ldots, & z_{i-1}, & z_i, & z_{i+1}, \ldots, & z_n, \\ Z'_0 & \zeta_1, \ldots, \quad \zeta_m, & z_1, & \ldots, & z_{i-1}, & z'_i, & \ldots, & z'_n, \end{array}$$

de la variété E et à deux points différents T_0 et T'_0 de l'espace $\mathfrak{T}$. T_0 et T'_0 fourniront respectivement Z_0 et Z'_0 au moyen des équations (0) et (1) du § 3. Joignons T_0 à T'_0 par un itinéraire $\mathfrak{W}$ situé dans l'espace $\mathfrak{T}$. Quand T parcourt $\mathfrak{W}$, Z marche sur E de Z_0 à Z'_0. z_i se change en z'_i, les ζ et les $z_1, \ldots, z_{i-1}$ décrivent des circuits fermés $(\zeta), (z_1), \ldots, (z_{i-1})$ chacune dans son plan.

Réciproquement, si les $\zeta, \ldots, z_{i-1}$ décrivent ces mêmes circuits, z_i se change en z'_i.

10. Si, comme toujours (§ 7), les ζ sont quelconques et les $z_1, \ldots, z_{i-1}$ liées par

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{i-1} = 0,$$

l'équation $F_i(z_i) = 0$ *en* z_i *est irréductible.*

En effet, si $F_i = 0$ n'est pas irréductible, on a

$$F_i = s^{\alpha} s'^{\alpha'} \ldots,$$

les équations $s(z_i) = 0$, $s'(z_i) = 0, \ldots,$ étant irréductibles et les s

étant des polynômes en z_i à coefficients rationnels en $\zeta, z_1, \ldots, z_{i-1}$. On ne peut avoir un seul facteur s (§ 7). Soient alors s et s' deux facteurs différents de F_i, z_i une racine de $s = 0$, z'_i une racine de $s' = 0$. Quand $\zeta_1, \ldots, \zeta_m, z_1, \ldots, z_{i-1}$ décrivent (§ 9) des circuits convenables, les coefficients de s et de s' ne changent pas ; il en est de même de s et de s'. Mais z_i se change en z'_i ; $s = 0$ et $s' = 0$ ont donc une racine commune et, en vertu de l'irréductibité, les deux facteurs s et s' ne sont pas distincts, ce qui est absurde.

Bref $F_i(z_i) = 0$ est irréductible. C. Q. F. D.

11. Explicitons $F_i = 0$,

$$F_i = A_i z_i^{\mu_i} + B_i z_i^{\mu_i - 1} + \ldots = 0,$$

$A_i, B_i, \ldots$ = polynômes en $\zeta_1, \ldots, \zeta_m, z_1, \ldots, z_{i-1}$.

On ne peut avoir $A_i \equiv 0$, pour ζ quelconques et $F_1 = \ldots = F_{i-1} = 0$, car alors on aurait pris l'exposant μ_i trop fort. Enfin les A_i, $B_i, \ldots$ n'ont aucun facteur commun (§ 8).

Soit z_ρ, $(\rho \leqq i - 1)$, le z d'indice maximum qui figure *effectivement* dans A_i. Les deux équations $A_i(z_\rho) = 0$, $F_\rho(z_\rho) = 0$ n'ont aucune racine commune, car, en vertu de l'irréductibilité (§ 10) de $F_\rho = 0$, A_i serait $\equiv 0$.

Alors il existera deux polynômes $L(\zeta; z_1, \ldots, z_\rho)$ et $M(\zeta; z_1, \ldots, z_\rho)$ et un polynôme $A'_i(\zeta; z_1, \ldots, z_\sigma)$ $\sigma < \rho$, tels que

$$LA_i + MF_\rho \equiv A'_i;$$

cela résulte d'un théorème bien connu d'Algèbre élémentaire.

Si l'on multiplie F_i par L, on n'introduit pas dans E de portions parasites, car on peut raisonner sur L comme au § 8 sur $\mathfrak{P}$; sous le bénéfice de $F_\rho = 0$, $LA_i = A'_i$. Cela revient à écrire dans F_i, A'_i pour A_i, etc.

A'_i contient, comme z d'indice maximum, z_σ, $(\sigma < \rho)$. On abaissera ainsi de proche en proche l'indice maximum des z qui figurent dans le coefficient de $z_i^{\mu_i}$. Finalement *on mettra* F_i *sous la forme*

$$F_i = z_i^{\mu_i} A_i(\zeta) + z_i^{\mu_i - 1} B_i(\zeta; z_1, \ldots, z_{i-1}) + \ldots,$$

A_i, B_i, ... *étant des polynômes, ou sous la forme*

$$z_i^{\mu_i} + z_i^{\mu_i-1} C_i(\zeta;\ z_1, \ldots, z_{i-1}) + \ldots,$$

les C *étant des polynômes en* z *à coefficients* rationnels *en* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Une conséquence à signaler de la proposition est que *le maximum de l'exposant de* z_i *dans un polynôme est* $\mu_i - 1$, *quel que soit ce polynôme.*

12. En résumé, *le système des* $m+n$ *équations* (0) *et* (1) *du* § 3, *qui représentent la variété unicursale* E *à* n *dimensions peut être remplacé par le système équivalent*

$$\begin{aligned} &Q_j(\zeta;\ z;\ t_1, t_2, \ldots\ t_j) = 0, \qquad [j = 1, 2, \ldots, m] \\ &0 = F_i = z_i^{\mu_i} A_i(\zeta) + z_i^{\mu_i-1} B_i(\zeta;\ z_1, \ldots\ z_{i-1}) + \ldots, \end{aligned}$$

où les Q, *les* A, *les* B, ..., *sont des polynômes.* t_j *figure effectivement dans le polynôme* Q_j. $A_i \not\equiv 0$. *L'équation* $F_i(z_i) = 0$ *est irréductible.* F_i *n'est divisible par aucun polynôme en* $\zeta_1, \ldots, z_{i-1}$. *Les* n *équations* $F_i = 0$ *sont les* n *équations de* E. *Les* m *équations* $Q_j = 0\ [j = 1, \ldots, m]$ *fournissent la correspondance entre les points* Z *de* E *et les points* T *l'espace* $\mathfrak{E}$, le tout, bien entendu, sous les réserves du § 7. C'est le théorème I de l'Introduction.

13. Soient

$$\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{A}(\zeta)\, z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n},$$

$$\mathfrak{M}' = \Sigma\, \mathfrak{A}'(\zeta)\, z_1^{\alpha'_1} z_2^{\alpha'_2} \ldots z_n^{\alpha'_n},$$

deux polynômes en z, à coefficients rationnels en ζ. *Si* $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ *en un point quelconque de* E, *les deux polynômes peuvent être écrits identiques coefficient à coefficient.*

Ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de z_n; sous le bénéfice du § 11 (*in fine*), il viendra (§ 12)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= z_n^{\mu_n-1} M_1 + z_n^{\mu_n-2} M_2 + \ldots \\ \mathfrak{M}' &= z_n^{\mu_n-1} M'_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad F_n = z_n^{\mu_n} + C_1 z_n^{\mu_n-1} + \ldots = 0,$$

les M et M′ étant des polynômes en $z_1, \ldots, z_{n-1}$ à coefficients rationnels en ζ. Alors

$$\mathfrak{N}(z_n) = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M} = z_n^{\mu_n - 1}(M'_1 - M_1) + z_n^{\mu_n - 2}(M'_2 - M_2) + \ldots = 0$$

en un point quelconque de E. Les deux équations en z_n, $\mathfrak{N} = 0$ et $F_n = 0$, l'une de degré $\mu_n - 1$, l'autre irréductible et de degré μ_n, ont une racine commune. Donc, partout sur E,

$$M'_1 = M_1, \qquad M'_2 = M_2, \qquad \ldots, \qquad \ldots.$$

Les M et M' se comportent comme $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ mais ont un z, savoir z_n, de moins. On continuera le raisonnement et l'on parviendra à des relations telles que

$$0 = z_1^{\mu_1 - 1}[\mathfrak{L}_1(\zeta) - \mathfrak{L}'_1(\zeta)] + z_1^{\mu_1 - 2}[\mathfrak{L}_2(\zeta) - \mathfrak{L}'_2(\zeta)] + \ldots$$

qui ont encore lieu partout sur E. Par suite, partout sur E,

$$\mathfrak{L}_1(\zeta) = \mathfrak{L}'_1(\zeta), \qquad \mathfrak{L}_2(\zeta) = \mathfrak{L}'_2(\zeta), \ldots.$$

Les ζ doivent être traitées comme des variables indépendantes; si $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}'_1$ sont des polynômes, l'égalité

$$\mathfrak{L}'_1 = \mathfrak{L}_1$$

entraîne l'identité $\mathfrak{L}'_1 \equiv \mathfrak{L}_1$.

Supposons $\mathfrak{L}'_1$ et $\mathfrak{L}_1$ fractions irréductibles

$$\mathfrak{L}_1(\zeta) = \frac{S(\zeta)}{R(\zeta)}, \qquad \mathfrak{L}'_1(\zeta) = \frac{S'(\zeta)}{R'(\zeta)},$$

S, S', R, R' = polynômes. On aura

$$SR' - RS' = 0, \qquad SR' = RS'$$

pour tout système des ζ.

S divise RS' et est premier avec R; donc

$$S'(\zeta) \equiv K(\zeta)S(\zeta), \qquad R'(\zeta) = K(\zeta)R(\zeta);$$

enfin

$$\mathfrak{L}_1 \equiv SR^{-1} \equiv S'R'^{-1} \equiv \mathfrak{L}'_1.$$

Ainsi quand, dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, on a ramené, au moyen des équations $F_i = 0$, l'exposant de chaque z_i à ne pas dépasser $\mu_i - 1$, les deux polynômes en z ainsi *réduits* sont identiques coefficient à coefficient. C. Q. F. D.

14. La proposition subsiste quand $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont, par rapport aux z, non plus des polynômes, mais des fractions rationnelles.

Soit en effet

$$\mathfrak{M} = \frac{Q(\zeta; z)}{P(\zeta; z)},$$

P, Q = polynômes en z à coefficients rationnels en ζ. Supposons que le z d'indice maximum, qui figure effectivement dans le dénominateur P, soit z_ρ. En vertu de l'irréductibilité de $F_\rho(z_\rho) = 0$, les deux équations $F_\rho(z_\rho) = 0$ et $P(z_\rho) = 0$ n'ont pas de racine commune, et il existe deux polynômes (§ **11**)

$$L(\zeta; z_1, \ldots, z_\rho), \qquad M(\zeta; z_1, \ldots, z_\rho),$$

et un troisième

$$P'(\zeta; z_1, \ldots, z_\sigma), \qquad (\sigma < \rho),$$

tels que

$$LP + MF_\rho = P',$$

d'où, avec $F_\rho = 0$,

$$\mathfrak{M} = \frac{LQ}{P'},$$

et le dénominateur ne contient plus que $z_1, \ldots, z_\sigma$. Continuant de proche en proche, on réduira $\mathfrak{M}$ à être, par rapport aux z, un polynôme à coefficients rationnels en ζ. On est ainsi ramené au cas du § **13**.

15. Désignons, pour abréger le langage, par $\bar{\zeta}$ le système des m coordonnées $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ et envisageons dans le même espace $\mathfrak{E}$ deux variétés à n dimensions E et E' définies respectivement par les équations

$$F_i = z_i^{\mu_i} + z_i^{\mu_i - 1} C_i(\zeta; z_1, \ldots, z_{i-1}) + \ldots = 0,$$
$$F'_i = z_i^{\mu'_i} + z_i^{\mu'_i - 1} C'_i(\zeta; z_1, \ldots, z_{i-1}) + \ldots = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si, pour $\bar{\zeta}$ quelconque, E *et* E' *ont un point* Z *commun,* E *et* E' *coïncident.*

En effet, les deux équations

$$F_1(z_1) = z_1^{\mu_1} + C_1(\zeta) z_1^{\mu_1 - 1} + \ldots = 0,$$
$$F'_1(z_1) = z_1^{\mu'_1} + C'_1(\zeta) z_1^{\mu'_1 - 1} + \ldots = 0,$$

ont par hypothèse une racine commune; or, elles sont, l'une et l'autre, irréductibles; donc $\mu'_1 = \mu_1$, $C'_1 \equiv C_1$, ...

En se reportant au § 13, *in fine,* on constate en effet que, si $C'_1(\zeta) = C_1(\zeta)$, pour $\overline{\zeta}$ quelconque, $C'_1 \equiv C_1$. Bref, $F'_1 \equiv F_1$.

Je dis que, si $F'_1 \equiv F_1$, $F'_2 \equiv F_2$, ..., $F'_{i-1} \equiv F_{i-1}$, on a aussi $F'_i \equiv F_i$.

$F'_i(z_i) = 0$, $F_i(z_i) = 0$ ont une racine commune et, en vertu de leur irréductibilité commune,

$$\mu'_i = \mu_i, \qquad C'_i(\zeta; z_1, \ldots, z_{i-1}) = C_i(\zeta; z_1, \ldots, z_{i-1}), \qquad \ldots.$$

Réduisons au moyen des équations $F_1 = 0$, ..., $F_{i-1} = 0$, les exposants de z_1, ..., z_{i-1} dans C'_i et C_i à ne pas dépasser respectivement

$$\mu_1 - 1, \quad \mu_2 - 1, \quad \ldots, \quad \mu_{i-1} - 1.$$

Les polynômes C'_i et C_i en z_1, ..., z_{i-1}, à coefficients rationnels en ζ, ainsi *réduits,* doivent être identiques (§ 13, *in fine*). F'_i et F_i ont, en z_i, même degré μ_i et mêmes coefficients; donc $F'_i \equiv F_i$.

La conclusion est que les variétés E et E′ coïncident, comme définies par les mêmes équations.

On peut dire que *la variété* E *est indécomposable,* en ce sens qu'une autre variété E′ ne peut avoir de portion commune avec E, sans coïncider entièrement.

16. Nommons *degré* de E le nombre de points Z qui correspondent à un $\overline{\zeta}$ donné quelconque. Ce degré est évidemment

$$\mu = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n.$$

Au § 7, *in fine,* nous sommes convenu que, quand on rencontre, par le procédé de l'élimination systématique, l'équation $F_i = \mathcal{F}_i^{q_i}$, on fait abstraction, dans la représentation de E, de l'exposant q_i.

Si l'on avait conservé les exposants q_i, au lieu d'obtenir la variété E de degré μ

$$F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aurait eu la variété $\overline{E}$, définie par les équations $F_i^{q_i} = 0$, dont le degré est μq $(q = q_1 q_2 \ldots q_n)$.

$\overline{E}$ contient seulement des points de E et les contient tous; chaque point de E est compté q fois sur $\overline{E}$. On peut dire que $\overline{E}$ *est la variété indécomposable* E *comptée* q *fois*.

Ainsi, *les équations* (o) *et* (1) *du* § 3 *définissent une variété unicursale, à* m *dimensions* E, *indécomposable, comptée une ou plusieurs fois*. C'est le théorème II de l'Introduction,

17. Reprenons les polynômes $P_s(t)$ du § 3, aux m variables indépendantes t_j ($j = 1, 2, \ldots, m$). On peut (§ 1), sans restreindre la généralité, attribuer aux $m + n$ polynômes P_s le même degré M. Il y aura τ coefficients $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_\tau$, où

$$\tau = (m+n)\frac{(M+1)(M+2)\ldots(M+m)}{m!}.$$

Les expressions F_i sont, par rapport aux $\mathbf{a}$, des fractions rationnelles.

Attribuons aux $\mathbf{a}$ deux systèmes différents $\overline{\mathbf{a}}$ et $\overline{\mathbf{a}'}$ de valeurs, qui conduisent à deux variétés unicursales à m dimensions E, E' définies respectivement par les deux systèmes

$$F_i = z_i^{\mu_i} + z_i^{\mu_i - 1} C_i(\mathbf{a};\ \zeta:\ z_1, \ldots, z_{i-1}) + \ldots = 0,$$

$$F_i = z_i^{\mu'_i} + z_i^{\mu'_i - 1} C'_i + \ldots = 0,$$

où

$$C'_i = C_i(\mathbf{a}';\ \zeta;\ z_1, \ldots, z_{i-1}), \quad \ldots.$$

En vertu des explications qui précèdent (§ 15), comme les deux variétés sont indécomposables, il faut et il suffit, pour que les deux variétés coïncident, que

$$\mu'_i = \mu_i, \qquad F'_i \equiv F_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Pour assurer ces identités il faut, dans les polynômes C_i et C'_i, en z, poursuivre l'identification des coefficients. Ces derniers sont des fonctions rationnelles des ζ, à coefficients rationnels par rapport aux $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ respectivement.

En dernière analyse, *la coïncidence des variétés* E *et* E' *sera assurée par un certain nombre de relations de la forme*

$$\mathfrak{R}(\mathbf{a}) = \mathfrak{R}(\mathbf{a}'), \tag{o}$$

où $\mathfrak{R}$ *désigne une fonction rationnelle des* τ *arguments* $\mathbf{a}$ *ou* $\mathbf{a}'$.

Les formations $\mathfrak{R}$ qui ne changent point de valeur quand on ne change pas de variété E, peuvent s'appeler les *invariants absolus* rationnels de la variété unicursale à m dimensions E, située dans l'espace $\mathfrak{E}$ à $m+n$ dimensions.

18. Admettons : 1° que les τ coefficients $\mathbf{a}$ des $m+n$ polynômes $P_s(t)$ soient des fonctions entières à coefficients numériques des $m+n$ coordonnées X_s d'un point X de l'espace $\mathfrak{E}$; 2° que les $\mathbf{a}'$ soient construits, avec les coordonnées Y_s d'un point Y de $\mathfrak{E}$, *de la même façon* que les $\mathbf{a}'$ sont construits avec les X_s.

On peut alors parler des deux variétés E_X et E_Y. Si l'on veut que E_Y coïncide avec E_X, on aura à écrire plusieurs égalités

$$R(X) = R(Y),$$

où R est une fraction rationnelle de $m+n$ lettres X_s ou Y_s. C'est le théorème II de l'Introduction.

Quand X parcourt l'espace $\mathfrak{E}$, E_X coïncide successivement avec les ∞^{m+n} variétés d'un système $\mathcal{C}$ de variétés. Si l'on a fixé la variété E_{X_0} de $\mathcal{C}$, le point X est assujetti à parcourir une variété $\mathbf{e}_{X_0}$ algébrique, représentée par les équations

$$R(X) = R(X_0),$$

où les X_s désignent les coordonnées courantes sur $\mathbf{e}_{X_0}$.

19. Mettons en évidence, dans les polynômes $P_s(t)$ du § 3, les variables X_s. On pourra écrire $P_s(X;\,t)$, P_s étant un polynôme par rapport aux X_s et aux t_j, *à coefficients numériques.*

Si l'on a $Y_s = P_s(X;\,t)$, où les t_j sont un système convenablement choisi de m paramètres, je dirai que *le point* Y *est équivalent au point* X.

On exprimera le fait par la notation

$$Y \equiv X.$$

Je ferai deux hypothèses :

I. L'équivalence est une propriété réversible, c'est-à-dire que $Y \equiv X$ entraîne $X \equiv Y$ et $X_s = P_s(Y;\,t')$.

II. Pour que $X \equiv Y$, la condition nécessaire et suffisante est qu'il existe un troisième point Z tel que

$$X \equiv Z, \qquad Y \equiv Z.$$

La proposition suivante est évidente : *la variété* E_X (§ 18) *est le lieu des points* Y *équivalents à* X. C'est le théorème III de l'Introduction.

De même : *pour que deux points* X *et* Y *soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils soient sur une même variété* E_Z.

L'équivalence $X \equiv Y$ est exprimée par les relations du § 18

$$R(X) = R(Y).$$

Si l'on posait

$$R(Y) = \eta = \text{const.},$$

les équations

$$R(Z) = R(\zeta, z) = \eta,$$

où les Z sont les coordonnées courantes, représentent la variété E_Y.

Il convient de discuter ces relations.

20. Considérons les $n + r + \rho$ équations ($r \geqq 0$, $\rho \geqq 0$),

$$\varpi_l = \text{fraction rationnelle},$$

$$(o) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varpi_l(Z) = \varpi_l(\zeta, z) = p_l, \qquad p_l = \text{const.} \\ \qquad (l = 1, 2, \ldots, n + r + \rho), \end{array} \right.$$

et admettons par hypothèse qu'elles représentent en coordonnées courantes Z (ou ζ et z) la variété E à m dimensions étudiée au cours du présent Mémoire. En d'autres termes, toutes les équations (o) sont satisfaites pour les différents points de E et exclusivement pour ces points-là.

Donnons-nous arbitrairement le système $\bar{\zeta}$ des ζ et envisageons les $n + r + \rho$ équations à n inconnues z

$$\varpi_l(\zeta, z) = p_l.$$

On peut évidemment (et même de plusieurs façons quelquefois) en choisir n

$$(1) \qquad \varpi_i = \mathfrak{P}_i(\zeta, z) = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont aucune ne soit conséquence algébrique des autres. Si, en effet, il en était autrement, les Z_s seraient effectivement liées par moins de n équations et E aurait plus de m dimensions.

Nos ϖ actuels sont les invariants absolus du § 17. Les n invariants $\mathfrak{P}$ peuvent prendre le nom de *fondamentaux*.

Adjoignons au système (1) l'équation $\varpi_{n+1} = p_{n+1}$. Les $n+1$ équations ont des solutions communes; le résultant $\Delta(\zeta, p)$, polynôme en ζ et $p_1, \ldots, p_{n+1}$, est nul. Mais les ζ sont des variables indépendantes; Δ doit s'évanouir indépendamment des ζ et il existe au moins une relation

$$\Phi(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}) = 0, \qquad \Phi = \text{polynôme.}$$

Aussi *les $n+r+\rho$ invariants absolus ϖ_l sont fonctions algébriques des n fondamentaux $\mathfrak{P}_i$.*

21. Supposons d'abord que $\mathfrak{P}_{n+1} = \varpi_{n+1}$ ne soit pas une fonction rationnelle des $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et l'équation algébrique $\Phi(p_{n+1}) = 0$ a plusieurs racines différentes.

Que représentent les n équations $\mathfrak{P}_i = p_i$? Évidemment une variété à m dimensions $\mathbf{e}$. $\mathbf{e}$ comprend E. Je dis que $\mathbf{e}$ *comprend aussi une variété parasite $\mathcal{E}$, distincte de* E.

En effet, quand le point Z parcourt $\mathbf{e}$, les $\mathfrak{P}_i$ ou les p_i restent invariables et $\mathfrak{P}_{n+1}$ peut devenir égal aux diverses racines de l'équation $\Phi(p_{n+1}) = 0$.

Une seule convient à E, c'est la valeur de p_{n+1} qui figure dans le système (o) du § 20. Les autres racines conviennent à la variété $\mathcal{E}$. D'ailleurs la racine qui convient à E peut convenir aussi à une portion ε de $\mathcal{E}$, mais non à la portion restante ε'.

Ainsi, *l'adjonction aux n équations fondamentales $\mathfrak{P}_i = p_i$ de l'équation surabondante $\varpi_{n+1} = \mathfrak{P}_{n+1} = p_{n+1}$ a eu pour effet de diminuer, par la suppression de la portion ε', la variété parasite $\mathcal{E}$ et cela dès que $\mathfrak{P}_{n+1}$ n'est pas une fonction rationnelle des fondamentaux $\mathfrak{P}_i$.*

Au contraire, si $\mathfrak{P}_{n+1}$ est une fonction rationnelle des fondamentaux, l'adjonction, aux équations fondamentales, de l'équation $\mathfrak{P}_{n+1} = p_{n+1}$ ne modifie en rien la variété parasite $\mathcal{E}$. Cette équation n'exprime rien de plus que les n fondamentales et devient *superflue*.

Écartons cette dernière hypothèse.

Prenons maintenant

$$\varpi_{n+2} = \mathfrak{P}_{n+2} = p_{n+2}.$$

Si $\mathfrak{P}_{n+2}$ n'est pas rationnelle en $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n+1}$, alors l'adjonction de $\mathfrak{P}_{n+2} = p_{n+2}$ supprime encore une portion nouvelle de la variété parasite $\mathcal{E}$. Si $\mathfrak{P}_{n+2}$ est rationnelle en $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{n+1}$, l'équation nouvelle est *superflue.*

22. On procédera ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on ait supprimé toute la variété parasite $\mathcal{E}$. Cela arrivera sûrement, au plus tard sur le dernier invariant absolu ϖ, car, *par hypothèse,* les $n+r+\rho$ équations (o) du § 20 représentent *exclusivement* la variété E.

Supposons qu'aucun des invariants absolus, au nombre de $n+r$,

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_n, \quad \varpi_{n+1} = \mathfrak{P}_{n+1}, \quad \ldots, \quad \varpi_{n+r} = \mathfrak{P}_{n+r},$$

ne soit exprimable rationnellement au moyen des précédents, tandis que les ρ invariants ϖ restants soient rationnellement exprimables au moyen de ces $n+r$ premiers-là, que je nommerai *semi-fondamentaux.*

Les $n+r$ équations *semi-fondamentales*

$$\mathfrak{P}_1 = p_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_{n+r} = p_{n+r}$$

représentent la variété E tout entière et sans portions parasites. Les autres équations

$$\varpi_{n+r+1} = p_{n+r+1}, \quad \ldots, \quad \varpi_{n+r+\rho} = p_{n+r+\rho}$$

sont superflues.

23. Revenons au problème du § 19 et à l'équivalence $X \equiv Y$ des deux points X et Y.

Introduisons les $n+r+\rho$ invariants absolus $\varpi_l(Z)$ d'une variété E_Z; construisons les n fondamentaux ($r \geqq 0$, $\rho \geqq 0$)

$$\mathfrak{P}_i(Z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \ l = 1, 2, \ldots, n+r+\rho),$$

et les $n+r$ semi-fondamentaux

$$\mathfrak{p}_{K}(Z) \qquad (K = 1, 2, \ldots, n+r).$$

Les conditions d'équivalence $X \equiv Y$ *nécessaires et suffisantes sont*

$$\mathfrak{p}_{K}(X) = \mathfrak{p}_{K}(Y).$$

Il y en a $n+r$. C'est le théorème IV de l'Introduction.