BULLETIN DE LA S. M. F.

H. PICQUET

Sur une surface remarquable du huitième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 45-59
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__45_0>

Sur une surface remarquable du huitième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 15 décembre 1875.)

1. Afin de pouvoir donner la définition de cette surface, nous commencerons par rappeler les théorèmes fondamentaux de la théorie des systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second degré.

Une conique est dite *harmoniquement circonscrite* à une autre lorsqu'on peut lui inscrire un triangle conjugué à la seconde. Le problème est alors possible d'une infinité de manières, et la polaire, par rapport à la seconde, d'un point quelconque de la première, coupe les deux courbes en quatre points conjugués harmoniques.

La seconde conique est *harmoniquement inscrite* à la première, c'est-à-dire qu'on peut lui circonscrire un triangle conjugué de la première. Le problème, lorsqu'il est possible d'une façon, admet aussi une infinité de solutions, et les tangentes menées aux deux courbes du pôle par rapport à la première d'une tangente quelconque de la seconde forment un faisceau harmonique.

On dit encore que ces deux courbes *se partagent harmoniquement* ou forment un *système harmonique*.

Relativement à deux surfaces du second degré, les définitions sont les mêmes; il suffit de remplacer le triangle conjugué par le tétraèdre conjugué. Lorsque deux surfaces du second degré se partagent harmoniquement, le plan polaire d'un point quelconque de celle qui est harmoniquement circonscrite par rapport à l'autre coupe les deux surfaces suivant deux coniques formant un système harmonique, et il en est de même des cônes circonscrits aux deux surfaces, ayant pour sommet commun le pôle par rapport à la première d'un plan tangent quelconque de la seconde, c'est-à-dire qu'un plan quelconque coupe ces cônes suivant deux coniques formant système harmonique.

Si

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad \ldots, \quad S_p = 0$$

sont les équations cartésiennes de p coniques, ou de p surfaces du second degré, elles définissent un *système linéaire ponctuel* d'ordre

$p - 1$ dont l'équation générale cartésienne est

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p = 0,$$

p étant inférieur ou égal à 5 pour les coniques, et à 9 pour les surfaces. Ces courbes ou surfaces satisfont à $5 - p + 1$ ou à $9 - p + 1$ conditions, qui sont d'être harmoniquement circonscrites à $5 - p + 1$ coniques ou à $9 - p + 1$ surfaces.

Un système linéaire *tangentiel* est défini de même par des équations tangentielles. Ses courbes ou surfaces satisfont à $5 - p + 1$ ou à $9 - p + 1$ conditions, qui sont d'être harmoniquement inscrites à $5 - p + 1$ coniques ou à $9 - p + 1$ surfaces.

A un système de l'une des deux espèces correspond un système de l'autre qui est dit son système *contrevariant :* les deux systèmes sont tels que toutes les courbes ou surfaces du système ponctuel sont harmoniquement circonscrites aux courbes ou surfaces du système tangentiel, lesquelles sont, par conséquent, harmoniquement inscrites aux premières. La somme des ordres des deux systèmes est égale à 4 dans le cas des courbes, et à 8 dans le cas des surfaces.

Étant donnés une conique et un point, il existe toujours un cercle et un seul ayant pour centre le point et harmoniquement inscrit à la conique. Si

$$f(x - y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est l'équation cartésienne de la conique, et si α, β sont les coordonnées du point, le carré du rayon est égal à $\frac{f(\alpha, \beta)}{A + C}$. Le rayon du cercle est dit la *puissance* du point par rapport à la conique. Si la conique est une hyperbole équilatère, la puissance d'un point quelconque du plan est infinie, à moins que le point soit sur la courbe, auquel cas elle est indéterminée.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques est l'hyperbole équilatère qui passe par leurs points communs. Tous les points de cette courbe jouissent de la même propriété par rapport à toutes les coniques du système ponctuel du premier ordre ou *faisceau ponctuel* défini par les deux premières coniques, système de coniques ayant quatre points communs. Chaque point de la courbe étant le centre d'un cercle harmoniquement inscrit à toutes les courbes du système, on voit que cette hyperbole équilatère est le lieu des centres des cercles du système contrevariant.

Lorsque deux surfaces forment un système harmonique, celle des deux surfaces qui est harmoniquement inscrite peut se réduire à une conique; alors cette conique est harmoniquement inscrite à la conique, section de l'autre surface par son plan.

2. Cela posé, considérons le faisceau ponctuel de surfaces

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0,$$

système de surfaces ayant une biquadratique gauche commune et défini par les deux surfaces S_1 et S_2. Un plan quelconque les coupe suivant un faisceau ponctuel de coniques, et il résulte de ce qui vient d'être dit que toutes les courbes du système plan contrevariant de ce faisceau peuvent être considérées comme surfaces harmoniquement inscrites à toutes celles du faisceau, et font conséquemment partie, à titre de surfaces, du système tangentiel du septième ordre contrevariant du faisceau considéré. En particulier, on voit qu'il y a dans chaque plan de l'espace une infinité de cercles faisant partie du système contrevariant, cercles dont le lieu des centres est une hyperbole équilatère.

Proposons-nous d'étudier les cercles de ce système qui ont pour centre un point donné de l'espace. Le plan d'un de ces cercles coupera le faisceau de surfaces suivant un faisceau de coniques, sur l'hyperbole équilatère duquel sera situé son centre qui est le point donné; mais la courbe du faisceau qui passe par le point donné correspond à la surface du faisceau qui passe par ce point. Supposons que ce soit la surface S_1; le plan considéré coupera donc la surface S_1 suivant une hyperbole équilatère, d'où il résulte que les plans des cercles considérés ne sont autres que les plans des sections équilatères de la surface S_1, et enveloppent conséquemment un cône du second degré.

Théorème I. — *Les cercles, ayant pour centre un point donné de l'espace et appartenant à un système tangentiel du septième ordre, sont situés dans des plans qui enveloppent un cône du second degré, enveloppe des sections équilatères de la surface qui passe par le point donné et qui appartient au faisceau ponctuel contrevariant.*

3. Dans chacun de ces plans est situé un cercle du système; il engendre donc une surface que nous allons étudier.

Des considérations analytiques et géométriques nous serviront dans cette recherche. Pour nous servir d'abord des premières, nous prendrons pour origine le point considéré et des axes rectangulaires parallèles aux axes de la surface du faisceau passant par ce point. Le cône enveloppe des plans des cercles a alors pour équation

$$\frac{x^2}{b_1+c_1}+\frac{y^2}{c_1+a_1}+\frac{z^2}{a_1+b_1}=0,$$

en supposant que l'équation de la surface soit

$$S_1=a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2+2p_1x+2q_1y+2r_1z+d_1=0.$$

Les plans des cercles seront alors tous les plans tangents à ce cône, c'est-à-dire tous les plans

$$(1)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

pour lesquels α, β et γ satisferont à la relation

$$(2)\qquad \alpha^2(b_1+c_1)+\beta^2(c_1+a_1)+\gamma^2(a_1+b_1)=0;$$

et chaque cercle sera donné par l'intersection du plan (1) avec une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon la puissance de l'origine par rapport à toutes les sections du plan par les surfaces du faisceau. Cette puissance est la même, puisque l'origine est sur l'hyperbole équilatère du faisceau plan, et peut se définir par celle de l'origine par rapport à la section du plan par la surface S_2 qui, avec la surface S_1, définit le faisceau. Soit

$$\begin{aligned}S_2=a_2x^2+b_2y^2+c_2z^2+2l_2yz+2m_2zx\\ +2n_2xy+2p_2x+2q_2y+2r_2z+1=0\end{aligned}$$

l'équation de cette surface; la puissance ρ de l'origine par rapport à la section de cette surface par le plan (1) est facile à calculer par les formules d'Euler, et est donnée par la formule

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\rho^2[a_2(\beta^2+\gamma^2)+b_2(\gamma^2+\alpha^2)+c_2(\alpha^2+\beta^2)\\ +2l_2\beta\gamma+2m_2\gamma\alpha+2n_2\alpha\beta]=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2;\end{aligned}\right.$$

la sphère cherchée aura alors pour équation l'équation précédente où l'on supposera que ρ^2 est égal à $x^2+y^2+z^2$, et le lieu cherché s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre les équations (1), (2) et (3). Les règles de l'élimination font voir que le résultant sera du quatrième degré en x, y, z, qui sont les coefficients de (1) et du second degré en ρ^2 qui entre au premier dans les coefficients de (3); en somme, l'équation résultante sera du huitième degré, homogène et du quatrième degré en x, y, z; mais elle renfermera des termes de degrés 0, 1 et 2 en ρ^2, puisque les coefficients de (3) ne sont pas homogènes en ρ^2.

4. Avant de pousser plus loin l'étude de notre surface, remarquons la forme de l'équation (3). Si l'on vient à y supposer que ρ ait une valeur constante, on voit que les coefficients α, β, γ du plan (1) seront liés par cette relation (3) qui est du second degré; d'où il résulte que ce plan enveloppera un cône de seconde classe dont l'équation tangentielle est précisément l'équation (3). Nous connaissions déjà la propriété pour le cas où, ρ étant infini, la section de la surface S_2 par le plan (1) devient une hyperbole équilatère; elle se généralise pour une valeur quelconque de ρ, et l'on voit que :

Théorème II. — *Les plans, passant par un point donné, qui coupent une surface du second degré suivant des courbes par rapport auxquelles ce point a une puissance donnée, enveloppent un cône du second degré.*

Si maintenant, dans l'équation (3), on attribue successivement à ρ toutes les valeurs possibles, cette équation tangentielle représentera une série de cônes ayant quatre plans tangents communs, puisqu'elle ne renferme qu'un paramètre variable ρ^2, au premier degré : ce sont les plans tangents communs aux deux cônes

$$a_2(\beta^2+\gamma^2)+b_2(\gamma^2+\alpha^2)+c_2(\alpha^2+\beta^2)+2l_2\beta\gamma+2m_2\gamma\alpha+2n_2\alpha\beta=0,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$$

Le premier est le cône enveloppe des sections équilatères de S_2, puisqu'il correspond à $\rho^2=\infty$, et l'on reconnaît dans le second l'équation tangentielle du cercle de l'infini, lequel correspond par conséquent à $\rho^2=0$; d'où il suit immédiatement que les quatre plans tangents communs sont imaginaires et que les cônes ont mêmes lignes focales.

Théorème III. — *Lorsque la puissance prend toutes les valeurs possibles, les cônes enveloppes, correspondant à chaque valeur de la puissance, ont les mêmes lignes focales.*

Les lignes focales communes ne sont autres que les six droites d'intersection deux à deux des quatre plans tangents communs; il y en a quatre imaginaires, et les deux autres sont réelles si les cônes sont réels, ce qui peut ne pas arriver. Quoi qu'il en soit, chaque couple de lignes focales est un cône du système, et les plans enveloppes correspondants sont ceux qui passent par l'une ou par l'autre ligne focale du couple. On arrive donc à cette conséquence remarquable :

Théorème IV. — *Par chaque point de l'espace, on peut mener trois couples de droites de directions constantes, dont un seul peut être réel, et tels que, dans chaque couple, tous les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites du couple coupent une surface du second degré donnée suivant des coniques par rapport auxquelles le point considéré a une puissance constante. Ces six droites sont les lignes focales du cône enveloppe des sections équilatères dont les plans passent par le point.*

5. Nous allons maintenant chercher géométriquement les propriétés de notre surface que nous désignerons par S_8 : 1° par rapport au plan de l'infini; 2° par rapport à une sphère arbitraire ayant son centre à l'origine; 3° par rapport au plan du cercle générateur; 4° par rapport au cône C, enveloppe de ce plan.

Par chaque point π du cercle de l'infini on peut mener deux plans tangents au cône C : dans chacun d'eux, tous les cercles possibles passant par le point π, il en résulte que le cercle générateur de la surface passe deux fois par le point π : le cercle de l'infini est donc une ligne double de la surface. C'est aussi ce que fait voir l'équation de la surface, puisque les termes du degré le plus élevé sont le produit de ρ^4 ou $(x^2+y^2+z^2)^2$ par une fonction f_4 homogène et du quatrième degré en x, y, z : ρ^4 donne deux fois le cercle de l'infini; de plus, les deux nappes de la surface qui se croisent suivant cette courbe sont circonscrites l'une à l'autre, et chaque point est un point de rebroussement, car l'équation ne renferme pas de termes de degré impair; si donc on coupe la surface par le plan des xy, par exemple, l'expression $(x^2+y^2)^2$ donnera non-seulement quatre directions asymptotiques, mais aussi les quatre asymptotes correspondantes de la section. Chaque point du cercle de l'infini est donc un point double pour lequel les deux plans tangents coïncident, c'est-à-dire un point de rebroussement.

Il est facile de voir géométriquement que la fonction f_4 doit se décomposer en quatre facteurs réels ou imaginaires. Abstraction faite du cercle de l'infini qui est fourni par les ombilics du cercle générateur, la surface ne peut, en effet, avoir de points à l'infini qu'autant que le rayon variable du cercle générateur devient infini lui-même. Il faut donc chercher, parmi toutes les sections équilatères de la surface S_1, sections passant par l'origine, quelles sont celles qui coupent la surface S_2 suivant des courbes pour lesquelles la puissance de l'origine est infinie. Or la puissance d'un point situé à distance finie ne saurait être infinie que si la courbe est une hyperbole équilatère; les plans cherchés sont donc parallèles aux directions de sections équilatères communes aux deux surfaces.

Ces plans P sont réels ou imaginaires, et chacun d'eux fournit un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine, c'est-à-dire une droite à l'infini. La section complète de la surface par le plan de l'infini se compose donc de deux fois le cercle de l'infini et de quatre droites. Ainsi :

THÉORÈME V. — *La surface engendrée par les cercles d'un système tangentiel du septième ordre, qui ont pour centre un point donné de l'espace, est une surface du huitième degré, admettant le cercle de l'infini pour courbe de rebroussement, et ayant dans le plan de l'infini quatre droites, correspondant respectivement aux quatre directions de sections équilatères communes aux surfaces du faisceau ponctuel contrevariant.*

Ces quatre directions de plans peuvent encore être définies par la propriété dont jouit un plan parallèle quelconque de couper la biquadratique commune aux surfaces du faisceau suivant quatre points dont l'un quelconque est le point de rencontre des hauteurs du triangle des trois autres.

6. Une sphère quelconque doit couper la surface suivant une courbe du seizième degré, comprenant deux fois le cercle de l'infini ; il restera donc une courbe du douzième degré à distance finie. Si elle a pour centre l'origine, elle sera tangente aux deux nappes

de la surface tout le long du cercle de l'infini qui comptera alors quatre fois, et il restera une courbe du huitième degré à distance finie. Cette courbe se compose de quatre grands cercles. En effet, les équations (2) et (3) fournissent, pour une valeur donnée de ρ, quatre valeurs proportionnelles de α, β, γ, lesquelles substituées dans (1) donnent quatre plans. La puissance ρ dans toute l'étendue de sa variation passe donc quatre fois par une valeur donnée, et les quatre cercles correspondants sont à la fois sur la surface et sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Leurs plans sont les quatre plans tangents communs au cône C, enveloppe du plan du cercle générateur, et au cône représenté par l'équation tangentielle (3) dans laquelle on a substitué à ρ la valeur considérée.

Théorème VI. — *L'intersection de la surface avec une sphère concentrique se compose de quatre fois le cercle de l'infini et de quatre grands cercles de la sphère.*

En particulier, la puissance ρ devient quatre fois infinie, ce que nous savons déjà, et passe quatre fois par la valeur zéro; mais les plans correspondant à ce dernier cas sont imaginaires, puisque, pour cette valeur particulière de ρ, l'équation tangentielle (3) représente le cercle de l'infini : ce sont les quatre plans tangents communs au cône C et au cercle de l'infini; d'où il résulte que :

Théorème VII. — *Le centre de la surface est un point singulier isolé, pour lequel le cône tangent se compose de quatre plans imaginaires.*

7. Examinons maintenant la section de la surface par le plan d'un cercle générateur. La section étant du huitième degré et le cercle en faisant partie, le reste de la courbe sera une courbe du sixième degré, lieu des points d'intersection avec le plan considéré de tous les autres cercles générateurs, et ayant un point isolé quadruple à l'origine. Il est facile de trouver ses points d'intersection avec le cercle générateur; car, si un autre cercle générateur rencontre le premier en un point, comme ils ont même centre, ils auront même rayon et seront tous les deux sur la sphère correspondant à cette valeur de ρ. On aura donc les points cherchés, en

prenant les points d'intersection du cercle considéré avec les droites suivant lesquelles son plan coupe les plans des cercles générateurs de même rayon. Ces plans sont au nombre de quatre : trois d'entre eux fourniront trois droites et six points d'intersection; le quatrième est le plan considéré qui, pris avec lui-même, se coupe suivant sa droite de contact avec son cône enveloppe, c'est-à-dire la génératrice suivant laquelle il touche le cône C. On aura donc ainsi huit points d'intersection à distance finie : la courbe du sixième degré étant doublement tangente au cercle générateur aux points circulaires de l'infini de son plan, les quatre autres points sont deux fois les ombilics du plan.

Théorème VIII. — *Le plan d'un cercle générateur coupe la surface suivant ce cercle et suivant une courbe du sixième degré ayant un point quadruple isolé à l'origine, doublement tangente au cercle générateur à l'infini, et dont les huit autres points d'intersection avec ce cercle sont : deux sur la génératrice de contact du plan du cercle avec le cône* C, *et les six autres sur les trois droites suivant lesquelles le plan du cercle coupe les plans des trois cercles générateurs de même rayon.*

Si le plan du cercle est un des quatre plans P (5), les points à distance finie s'en vont à l'infini sur les quatre droites correspondantes qui deviennent asymptotes à la courbe du sixième degré; quant au cercle, il est tout entier à l'infini.

8. La surface ne peut avoir d'autres points communs avec le cône C que ceux qui, dans le plan du cercle générateur, sont à l'intersection du cercle avec la génératrice de contact. La courbe commune est donc le lieu obtenu en portant sur chaque génératrice du cône, à partir du sommet, une longueur égale à la puissance correspondante. La surface ne pénétrant pas à l'intérieur du cône, cette courbe ne peut être qu'une courbe de contact ou une courbe de rebroussement. C'est une courbe de contact, car, si c'était une courbe de rebroussement, dans le plan du cercle générateur, ce cercle serait doublement tangent à la courbe du sixième degré sur la génératrice de contact, ce qui n'a pas lieu. On voit, au contraire, que ce sont deux points d'intersection simples qui sont alors deux points de contact du plan avec la surface. Le cône C étant du second degré, sa courbe de contact avec une surface du huitième degré est

du huitième degré : la courbe a d'ailleurs quatre points à l'infini, respectivement sur les génératrices de contact des plans de sections équilatères de la surface S_2, lesquels comptent chacun pour deux, parce que l'origine est au centre ; elle passe quatre fois à l'origine, mais d'une façon imaginaire, les quatre génératrices correspondantes étant celles pour lesquelles la puissance ρ devient nulle. Nous verrons aussi plus loin que la longueur ρ admet six maxima ou minima.

THÉORÈME IX. — *La surface est tangente au cône* C *tout le long d'une courbe du huitième degré, symétrique par rapport au sommet du cône, asymptote à quatre génératrices réelles ou imaginaires du cône, et admettant le sommet pour point multiple du quatrième ordre à tangentes imaginaires.*

9. Le plan du cercle générateur étant bitangent à la surface aux deux extrémités du diamètre de contact, tous les autres points doubles de sa courbe d'intersection avec la surface sont fournis par une courbe double. Négligeant les points à l'infini qui proviennent du cercle de l'infini, il reste à distance finie six points d'intersection de la courbe du sixième degré et du cercle, plus un point quadruple à l'origine qui compte pour six points doubles, en tout douze points doubles.

THÉORÈME X. — *La surface possède une courbe double du douzième degré, dont six branches imaginaires se croisent à l'origine.*

10. Nous allons étudier maintenant la section de la surface par un plan quelconque P. Pour cela, nous remarquerons que la surface peut être définie de la façon suivante : on considère les plans tangents communs au cône fixe C et au cône variable dont l'équation (3) est l'équation tangentielle. Une valeur de ρ détermine ce cône variable, puisque ρ est le paramètre variable de son équation, et détermine aussi une sphère $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, dont les cercles d'intersection avec les quatre plans tangents communs engendrent la surface. Dans le plan P, nous aurons pour la section de la surface la définition suivante : on a une conique fixe C_1 et une conique variable d'un faisceau tangentiel dont le paramètre variable est ρ^2 ; la courbe est engendrée par les points d'intersection

des tangentes communes à ces deux coniques avec le cercle de rayon $\sqrt{\rho^2-p^2}$ suivant lequel la sphère $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ coupe le plan considéré qui est à une distance p de l'origine.

Les valeurs remarquables de ρ^2 sont les suivantes :

1° $\rho^2=0$ à laquelle correspond le cercle imaginaire Σ_1, suivant lequel le plan P coupe le cône $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$, et qui fournit quatre tangentes communes imaginaires;

2° $\rho^2=\infty$ à laquelle correspond la conique Σ_2, suivant laquelle le plan P coupe le cône enveloppe des sections équilatères de la surface S_2, et qui fournit quatre tangentes qui peuvent être réelles;

3° Enfin, les trois coniques du faisceau réduites à deux points, lesquelles sont les intersections du plan P avec les lignes focales communes des cônes et dont une seule peut être réelle, correspondent à des valeurs de ρ^2 faciles à déterminer. En effet, d'une part la puissance de l'origine par rapport à toutes les sections de S_2 passant par une de ces droites est constante; d'autre part cette droite est parallèle à l'un des plans principaux de S_2; si donc on considère le plan mené par cette droite parallèlement à ce plan principal, il coupe S_2 suivant une courbe par rapport à laquelle la puissance de l'origine est la puissance cherchée. On a donc trois valeurs de ρ, qui sont les puissances de l'origine par rapport aux trois sections parallèles aux plans principaux, à chacune desquelles correspondent, comme à toutes les autres, quatre plans tangents au cône C; mais alors ces quatre plans tangents sont menés par un couple de lignes focales communes aux autres cônes.

Il y a encore les valeurs maxima et minima de ρ correspondant aux maxima et aux minima, par rapport au sommet du cône C, de la courbe de contact de ce cône et de la surface S_8 : nous allons les déterminer en même temps que les points doubles de la section plane. Remarquons pour cela que, pour qu'un point de cette courbe soit double, il faut que les deux tangentes menées de ce point à la conique C_1 correspondent à la même valeur de ρ^2; en d'autres termes, une valeur de ρ^2 donnera un point double lorsqu'un des six points d'intersection deux à deux des quatre tangentes correspondantes sera un point de la courbe. Il suffit donc, pour avoir les points doubles, de chercher le lieu de ces points d'intersection, et les points communs à ce lieu et à la courbe; mais le lieu des ombilics communs à la conique C_1 et à toutes les coniques du faisceau tangentiel $\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 = 0$ n'est autre que la hessienne du réseau tangentiel déterminé par les trois coniques C_1, Σ_1 et Σ_2, et dont l'équation générale tangentielle serait

$$\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 + \lambda \Sigma_3 = 0,$$

$\Sigma_3 = 0$ étant l'équation tangentielle de C_1. Or on sait que cette courbe est du troisième degré, que, par exemple, les trois points où elle coupe une droite quelconque sont les trois points d'intersection de cette droite avec les trois autres tangentes communes à toutes les courbes du réseau tangentes à la première droite; il en résulte qu'elle coupe la section de S_8 en vingt-quatre points, qui se réduisent à douze, puisque ce sont des points doubles.

11. Le cône ayant pour sommet l'origine et pour base cette courbe du troisième degré est le cône hessien du réseau tangentiel de cônes défini par le cône C et le faisceau tangentiel (3) : c'est lui qui, par son intersection avec S_8, détermine la ligne double de cette surface, laquelle se trouve bien être du douzième degré comme nous l'avons déjà vu, indépendamment du cercle de l'infini, tout le long duquel deux nappes de la surface sont circonscrites l'une à l'autre.

Désignons par H le cône hessien dont nous allons faire une étude spéciale. On voit d'abord qu'il coupe le cône C suivant six génératrices, qui sont, comme l'apprend l'étude des réseaux plans, les génératrices de contact avec ce cône des six cônes du faisceau tangentiel (3) qui lui sont tangents. Pour un de ces six cônes, les quatre plans tangents qu'il a de communs avec le cône C se réduisent à trois, deux d'entre eux étant venus se confondre avec le plan tangent le long de la génératrice de contact; donc, sur les quatre cercles d'intersection de la surface S_8 avec la sphère correspondante, deux sont confondus, et la sphère est circonscrite tout le long d'un grand cercle. De plus, si l'on considère la génératrice de contact, on voit que la génératrice infiniment voisine demeure dans le plan tangent commun aux deux cônes et fournit la même valeur de ρ^2, puisqu'elle fournit le même cône dans le faisceau tangentiel; donc elle correspond à un maximum ou à un minimum de ρ^2. Ainsi :

Théorème XI. — *La courbe de contact de la surface* S_8 *avec le* *cône* C *admet six maxima ou minima, par rapport au sommet du cône. Les valeurs de* ρ^2 *correspondantes fournissent des sphères tangentes à la surface le long du cercle générateur correspondant, et les six génératrices du cône* C *qui en résultent sont les droites d'intersection de ce cône avec le cône hessien* H.

Le réseau de coniques $\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 + \lambda \Sigma_3 = 0$ donne lieu à un réseau ponctuel contrevariant; de même, le réseau des cônes qui ont pour sommet l'origine et ces coniques pour base donne lieu à un réseau contrevariant, formé par les cônes perspectifs du réseau ponctuel. Pour étudier ces deux réseaux de cônes, remarquons que dans le réseau tangentiel se trouve le cône $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, qui a pour base le cercle de l'infini; tous les cônes du réseau ponctuel, étant harmoniquement circonscrits à ceux du réseau tangentiel, seront harmoniquement circonscrits à celui d'entre eux qui a pour base le cercle de l'infini, et ne pourront être conséquemment que des cônes équilatères (¹). En particulier, les couples de plans qui font partie du réseau ponctuel ne pourront être que des couples de plans rectangulaires; considérons donc un de ces couples de plans, lequel étant harmoniquement circonscrit à tous les cônes du réseau tangentiel forme couple de plans conjugués par rapport à ces cônes (²); il est donc conjugué par rapport au cône C de base Σ_3 et par rapport au cône C_2 de base Σ_2, respectivement enveloppes des sections équilatères des surfaces S_1 et S_2 qui définissent le faisceau. Il en résulte que la droite commune à ces deux plans doit être une ligne focale d'un des cônes du faisceau tangentiel défini par les cônes C_1 et C_2, car les couples de plans tangents menés par cette droite aux cônes de ce faisceau étant conjugués harmoniques par rapport aux deux plans rectangulaires, il y a un de ces couples formé par les plans tangents menés par la droite au cercle de l'infini, d'où il suit que le cône correspondant admet la droite pour ligne focale. Le cône hessien lieu de ces droites ne diffère donc pas du lieu des lignes focales des cônes du faisceau tangentiel (C_1, C_2). On voit qu'ici les surfaces S_1 et S_2, qui déterminent le faisceau ponctuel $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$, jouent absolument le même rôle,

---

(¹) *Voir* notre Mémoire *Sur les invariants communs à deux fonctions quadratiques* (*Comptes rendus du Congrès de Lille*, 1874, p. 1234).

(²) *Ibid.*, p. 1224.

et l'on doit s'attendre à ce qu'il en soit de même de toutes les autres surfaces du faisceau : c'est en effet ce qui a lieu. L'équation tangentielle du cône C enveloppe des sections équilatères de la surface S_1 étant

$$a_1(\beta^2+\gamma^2)+b_1(\gamma^2+\alpha^2)+c_1(\alpha^2+\beta^2)+2l_1\beta\gamma+2m_1\gamma\alpha+2n_1\alpha\beta=0,$$

on voit qu'elle est du premier degré par rapport aux coefficients de la surface S_1 ; si donc on y remplace $a_1, b_1, c_1, \ldots$, par $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2$, $\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2$, $\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2, \ldots$, elle sera du premier degré en λ_1 et λ_2 et deviendra l'équation tangentielle générale des cônes d'un faisceau tangentiel. Donc :

THÉORÈME XII. — *Tous les cônes du second degré, enveloppes respectives des sections équilatères passant par un point donné de toutes les surfaces du second degré d'un faisceau ponctuel, ont quatre plans tangents communs.*

C'est précisément le faisceau tangentiel déterminé par les cônes C_1 et C_2 qui correspondent respectivement aux surfaces S_1 et S_2. Le cône hessien n'est donc autre que le lieu des lignes focales des cônes enveloppes des sections équilatères de toutes les surfaces du faisceau ponctuel. Ainsi :

THÉORÈME XIII. — *Le cône, lieu des lignes focales des cônes enveloppes respectives des sections équilatères, passant par un point donné, de toutes les surfaces d'un faisceau ponctuel, est un cône du troisième degré qui passe par la ligne double de la surface* S_8, *lieu des cercles ayant pour centre le point donné, et faisant partie du système tangentiel contrevariant du faisceau ponctuel.*

Il résulte encore de ce qui précède que :

THÉORÈME XIV. — *Dans un faisceau ponctuel de surfaces du second degré, il y a trois surfaces pour lesquelles le cône enveloppe des sections équilatères se réduit à deux droites.*

Le cône H jouit encore d'une foule de propriétés qui se déduisent trop facilement de celles de la cubique plane lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites pour que nous insistions davantage. Nous ne citerons que la suivante :

THÉORÈME XV. — *D'une génératrice fixe du cône* H, *on voit* *les deux lignes focales d'un cône quelconque du faisceau* $[C_1, C_2]$ *sous deux plans formant un angle variable, mais dont les plans bissecteurs restent les mêmes.*

Si la génératrice fixe décrit le cône H, les plans bissecteurs enveloppent un cône de troisième classe ayant, avec le premier, neuf contacts, dont six au moins sont imaginaires, et qui est le cône cayleyen du système.