

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BROCARD

Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 42-44

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__42_0

© Bulletin de la S. M. F., 1875-1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur la détermination d'une courbe par une propriété
de ses tangentes; par M. H. BROCARD.*

(Séance du 15 décembre 1875.)

Voici un exemple très-simple d'une détermination de ce genre, qui offre un certain intérêt.

Soient YOX ⁽¹⁾ un système d'axes de coordonnées rectangulaires, MT une tangente en un point M d'une courbe MC, A, A' deux points de OX symétriques par rapport à l'origine et à une distance a , B, B' leurs projections sur MT; DM l'ordonnée de M, OD son abscisse.

1. On donne, en premier lieu, la condition

$$(1) \quad AB - A'B' = DM.$$

L'équation de la tangente MT étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

la condition (1) devient, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$\frac{y}{p} \sqrt{1 + p^2} = 2a,$$

qui exprime que la tangente MT a une longueur constante $2a$. La courbe cherchée est donc une *tractrice* ou *courbe aux tangentes égales*.

Cette courbe est également :

1° La développante de la *chaînette*

$$y = a \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \right);$$

2° La trajectoire orthogonale des circonférences

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$;

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

3° La trajectoire du point M entraîné par un fil inextensible MT, dont l'extrémité T décrit OX.

Ainsi, dans une tractrice, la différence des distances, à une tangente, des points de OX situés à une distance de l'origine égale à la moitié du paramètre de la courbe, est égale à l'ordonnée du point de contact.

C'est, au reste, ce que l'on peut démontrer aisément par de simples considérations géométriques.

Soit E la projection de A' sur AB. On a

$$EA = AB - A'B'.$$

Les deux triangles rectangles MDT, AA'E sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, $MT = 2a = AA'$, et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MTD}$. Ainsi $EA = MD$.

Remarque. — Soient I le milieu de MD, C sa projection sur MT. Le point E est évidemment sur la ligne EC parallèle à AA'.

De ce qui précède, on déduit une construction de la tangente à la tractrice en un point donné M. Pour l'obtenir, on décrit une circonférence A'EA, ayant O pour centre et la moitié du paramètre pour rayon. Du point A, on mène la corde $AE = MD$. La tangente MT est perpendiculaire à la corde EA, prolongée s'il est nécessaire. Comme vérification, on doit avoir

$$MT = AA' = 2a.$$

2. On donne, en second lieu, la condition

$$A'B' - AB = OD$$

ou

$$\frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}} = x,$$

équation différentielle d'une circonférence

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$, sur le diamètre XOX' de laquelle on a pris deux points A, A', à une distance a de l'origine, moitié du rayon.

Ainsi, dans une circonférence de cercle, la différence des dis-

tances, à une tangente, des points du diamètre situés à une distance du centre égale à la moitié du rayon du cercle, est égale à l'abscisse du point de contact.

Il est encore très-facile d'établir cette propriété de la circonférence.

Conservant les mêmes notations, les deux triangles MOD, AEA' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, OM = 2a = AA' et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MOD}$. Ainsi A'E = OD.

3. On peut rapprocher de cet exemple la propriété suivante de la parabole, dont OX est l'axe et O le foyer :

$$\overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2 = \text{const.},$$

qui fait l'objet de la question 1165, que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et qui a été résolue p. 285, année 1875, de ce même Recueil.

4. La condition

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \text{const.} = 2b^2$$

aurait donné

$$\frac{(px - y)^2 + p^2 a^2}{1 + p^2} = b^2$$

ou

$$p^2(x^2 + a^2 - b^2) - 2pxy + y^2 - b^2 = 0;$$

d'où l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2 - a^2} = -1,$$

enveloppe de la droite

$$y = px \pm \sqrt{b^2(1 + p^2) - a^2 p^2}.$$

Cette hyperbole a ses foyers sur XOX'.