BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Métrique aninvolutive

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 176-194
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__176_1>

MÉTRIQUE ANINVOLUTIVE;

Par M. G. Fontené.

§ I.

1. Soit, dans un plan o, une corrélation générale : à un point *primitif* M correspond une droite *transformée* $\overline{\mu}$, à une droite primitive μ correspond un point transformé $\overline{M}$, et, si le point M est sur la droite μ, la droite $\overline{\mu}$ passe par le point $\overline{M}$; une droite μ a un point primitif $\underline{M}$, et un point transformé $\overline{M}$; .... Deux points M et M′ sont *conjugués dans l'ordre* MM′ lorsque, en considérant la suite

$$\underline{\mu}', \ M, \ M', \ \overline{\mu},$$

M′ est sur $\overline{\mu}$, auquel cas M est sur $\underline{\mu}'$; on a un fait analogue pour deux droites μ et μ'.

2. Les points autoconjugués sont à une conique F, les droites autoconjuguées sont tangentes à une conique φ; ces deux coniques sont doublement tangentes. Le système des coniques F et φ détermine la corrélation, et l'on construit facilement $\overline{\mu}$ d'après M :

en prenant pour F une ellipse, pour φ une ellipse intérieure à la première, ellipse que l'on dirige, on mène de M des tangentes à φ, on prend sur F les transformés de ces tangentes en se guidant sur le sens, et l'on joint; on a $\underleftarrow{\mu}$ d'une manière analogue.

3. Sur la droite qui joint deux points A et B sont deux points F′ et F″ donnés par la conique F; par le point d'intersection de deux droites α et β passent deux droites autoconjuguées φ' et φ'' tangentes à la conique φ; en désignant par R et ρ les rapports anharmoniques (A, B, F', F''), $(\alpha, \beta, \varphi', \varphi'')$, et en considérant des logarithmes népériens, nous poserons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{1}{2i}\log R,\\ \overline{\alpha\beta} &= \frac{1}{2i}\log \rho,\end{aligned}\right.$$

et nous dirons que $\overline{AB}$ est la *pseudo-distance* des points A et B, que $\overline{\alpha\beta}$ est le *pseudo-angle* des droites α et β; nous supposerons que F et φ sont deux ellipses imaginaires, dont les équations ont des coefficients réels, auquel cas R et ρ sont des imaginaires de module 1, et nous aurons par exemple, avec $\overline{AB}$ réel,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\overline{AB} + i\sin\overline{AB} &= e^{i\overline{AB}} = \sqrt{R},\\ \cos\overline{AB} - i\sin\overline{AB} &= e^{-i\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{R}},\end{aligned}\right.$$

ou

$$(3)\qquad \frac{i\sin\overline{AB}}{R-1} = \frac{\cos\overline{AB}}{R+1} = \frac{1}{2\sqrt{R}};$$

on a, pour trois points en ligne droite,

$$(4)\qquad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

La première idée de formules telles que les formules (1) appartient à Chasles (*Géom. sup.*, 1852) et à Laguerre (*Nouv. Ann. de Mathém.*, février 1853). La métrique actuelle est à celle que M. Cayley (1859) et M. Klein ont étudiée ce que l'homographie est à l'involution : *le caractère essentiel de cette métrique aninvolutive est de considérer des figures en position;* les formules principales ont été données, pour un espace analytique à $n - 1$ dimensions, dans un Ouvrage publié en 1892 : *L'hyperespace, Propriétés métriques d'une corrélation générale.*

4. Soit une droite μ : à tout point M de cette droite répond sur la droite un point conjugué $\overline{M}$, et ainsi s'établit sur la droite une homographie, non une involution : la constante de cette homographie est la valeur du rapport anharmonique $(M, \overline{M}, F', F'')$, et la pseudo-distance constante relative aux points M et $\overline{M}$ sera le *paramètre* T de la droite μ. On définit d'une manière analogue le paramètre θ d'un point M, considéré dans le plan o; au point de vue de la Géométrie dans l'espace, θ serait le paramètre du système formé par le point M et le plan o.

Pour deux points A et B situés sur une droite dont le paramètre est T, pour deux droites α et β se coupant en un point dont le paramètre est θ, nous poserons

$$\sigma(A, B) = \frac{\sin \overline{AB}}{\sin T}, \quad \sigma(\alpha, \beta) = \frac{\sin \overline{\alpha\beta}}{\sin \theta}; \tag{5}$$

dans l'espace, on aurait pour deux plans a et b une quantité $\sigma(a, b)$, pour laquelle interviendrait le paramètre t de la droite d'intersection, considérée, non plus comme rayon ou lieu de points, mais comme axe ou enveloppe de plans. On a

$$\sigma(A, \overline{A}) = 1, \qquad \ldots$$

Le théorème des transversales, tel qu'il existe en Géométrie sphérique, est exact avec des σ.

5. Sur une droite μ, étant donnés deux points A et B, considérons les suites

$$\underline{B}, A, B, \overline{A}; \quad \underline{A}, B, A, \overline{B};$$

nous définirons deux quantités distinctes par les formules

$$\begin{cases} \gamma(A, B) = \sigma(B, \overline{A}) = \dfrac{\sin(T - \overline{AB})}{\sin T}, \\ \gamma(B, A) = \sigma(\underline{A}, B) = \dfrac{\sin(T + \overline{AB})}{\sin T}; \end{cases} \tag{6}$$

on a

$$\gamma(A, A) = 1, \qquad \gamma(A, \overline{A}) = 0,$$

On a facilement

$$(7)\qquad \begin{cases} \gamma(A, B) + \gamma(B, A) = 2\cos\overline{AB}, \\ \gamma(A, B) \times \gamma(B, A) = 1 - \sigma^2(A, B). \end{cases}$$

On définit de même $\gamma(\alpha, \beta)$ et $\gamma(\beta, \alpha)$.

Par analogie avec la cotangente, on posera encore

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(A, B) = \dfrac{\gamma(A, B)}{\sigma(A, B)} = \dfrac{\sin(T - \overline{AB})}{\sin\overline{AB}}, \\[2ex] \dfrac{1}{\tau}(B, A) = \dfrac{\gamma(B, A)}{\sigma(B, A)} = \dfrac{\sin(T + \overline{AB})}{-\sin\overline{AB}}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\frac{1}{\tau}(A, B) + \frac{1}{\tau}(B, A) = -2\cos T;$$

on a

$$\frac{1}{\tau}(A, \overline{A}) = 0.$$

Sur une droite donnée, la quantité $\frac{1}{\tau}(A, B)$ est liée au rapport anharmonique $R = (A, B, F', F'')$ par une relation doublement linéaire, puisqu'elle est liée ainsi à la quantité $\cot\overline{AB}$ donnée par les formules (3); cette remarque servira au nº 10.

6. Si A ou B est sur la conique F, R est nul ou infini, $\sin\overline{AB}$ et $\cos\overline{AB}$ sont infinis, et $\sigma(A, B)$, $\gamma(A, B)$, $\gamma(B, A)$ le sont en général. Si la droite AB est tangente à la conique φ, le conjugué d'un point de cette droite sur la droite est F' ou F'', le sinus et le cosinus du paramètre sont infinis, et l'on a en général

$$\sigma(A, B) = 0, \qquad \frac{1}{\tau}(A, B) = \infty.$$

Si A ou B est sur F, la droite AB étant de plus tangente à φ, le σ est indéterminé; A et B sont d'ailleurs conjugués. On a des faits corrélatifs. La conique F a deux propriétés : le σ d'un point quelconque et d'un point de cette conique est infini, et le σ de deux droites se coupant sur cette conique est nul, parce que le sinus du paramètre est infini; la conique φ a deux propriétés analogues. L'indétermination n'est qu'apparente pour le σ de deux points dont la droite de jonction est tangente à F, ...

Les droites qui passent par le point P, pôle de la corde de contact de F et φ, ont pour paramètre $\frac{\pi}{2}$; les points de la droite π qui joint les points de contact H et K ont pour paramètre $\frac{\pi}{2}$.

7. Le Δ, ou le *moment,* d'un point M et d'une droite μ se définit ainsi en écartant toute idée de minimum : on mène par M la droite conjuguée de μ, c'est-à-dire que l'on joint M au point $\overline{M}$ transformé de μ, et le Δ est $\sigma(A, M)$, A étant le point d'intersection des deux droites ; si l'on emploie la droite menée par M et dont μ est conjuguée, si l'on joint M au point $\underline{M}$ primitif de μ, on a une quantité $\sigma(M, B)$ égale à la précédente, comme on le voit en appliquant le théorème des transversales au triangle $M\overline{M}\underline{M}$ et à la sécante μ. On peut aussi bien prendre sur μ le point conjugué de M ou le point dont M est le conjugué, et joindre M à ce point par une droite α ou β : les quantités $\sigma(\alpha, \mu)$ et $\sigma(\mu, \beta)$ sont égales aux précédentes, d'après ce qu'on verra au n° 13. Nous écrirons

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta(M, \mu) = \sigma(A, M) = \sigma(M, B), \\ \Delta(M, \mu) = \sigma(\alpha, \mu) \ = \sigma(\mu, \beta), \end{cases}$$

sauf à préciser la question de signe au n° 13. Le Δ d'un point et de la droite transformée, ou primitive, est égal à 1.

Un Δ est infini quand M est sur F, ou quand μ est tangente à φ ; si, de plus, M est sur μ, le Δ est indéterminé : c'est ce qui arrive par exemple pour un point M de F et la droite transformée $\overline{\mu}$, laquelle est tangente à φ.

En considérant les suites

$$\underline{\mu}, \mu, M, \overline{M} \quad \text{et} \quad \underline{M}, M, \mu, \overline{\mu},$$

on a facilement

$$(10)\qquad \begin{cases} \gamma(\underline{\mu}, \mu) = \Delta(\mu, M) = \gamma(M, \overline{M}), \\ \gamma(\underline{M}, M) = \Delta(M, \mu) = \gamma(\mu, \overline{\mu}); \end{cases}$$

nous dirons qu'un γ est un *comoment.*

8. Si F et φ sont deux cercles concentriques, on a autour du centre des figures égales, ayant mêmes éléments métriques anin-

volutifs; en général, il existe *en nombre simplement infini* des figures ayant mêmes éléments métriques relativement à F et φ, et ces figures sont liées par l'intermédiaire du point P et de la droite π.

La distribution des paramètres est liée à ce qui précède : si C est une conique doublement tangente à F et φ en H et K, les droites μ tangentes à C ont même paramètre T, les points M de C ont même paramètre θ. On verra (§ III) que, $\mathfrak{C}$ étant une constante que l'on doit regarder comme le paramètre du plan o, on a pour une droite μ, pour un point M,

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos T = \cos\mathfrak{C} \times \Delta(P, \mu) = \cos\mathfrak{C}\cos\overline{\mu\pi}, \\ \cos\theta = \cos\mathfrak{C} \times \Delta(\pi, M) = \cos\mathfrak{C}\cos\overline{MP}; \end{cases}$$

$\mathfrak{C}$ est le paramètre de la droite π ou HK, par suite le paramètre d'une droite passant par H ou K; c'est encore le paramètre du point P, par suite le paramètre d'un point situé sur PH ou PK. On verra encore que, pour une même conique C, le paramètre T des droites tangentes à cette conique et le paramètre θ des points de cette conique sont liés par la relation

$$(12)\qquad \sin T \sin\theta = \sin\mathfrak{C}.$$

§ II.

9. L'identité connue

$$\sin(d-a)\sin(b-c) + \ldots + \ldots = 0$$

donne pour quatre points en ligne droite

$$(13)\qquad \sigma(D, A)\,\sigma(B, C) + \sigma(D, B)\,\sigma(C, A) + \ldots = 0$$

et l'on peut écrire

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \sigma(A, C) & \sigma(A, D) \\ \sigma(B, C) & \sigma(B, D) \end{vmatrix} = \sigma(A, B)\,\sigma(C, D);$$

on déduit de (13), au moyen de (6),

$$(15)\qquad \begin{cases} \sigma(B, C)\,\gamma(O, A) + \sigma(C, A)\,\gamma(O, B) + \ldots = 0, \\ \sigma(B, C)\,\gamma(A, O) + \sigma(C, A)\,\gamma(B, O) + \ldots = 0, \end{cases}$$

et, si o est en C, l'on obtient, par exemple,

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma(A, B) = \sigma(C, B)\gamma(C, A) - \sigma(C, A)\gamma(C, B),\\ &\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.\end{aligned}\right.$$

Si, dans le déterminant, on remplace $\sigma(A, C)$ par $\sigma(C, A)$, ..., et si l'on remplace A et B par leurs conjugués $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on a

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \gamma(A, C) & \gamma(A, D) \\ \gamma(B, C) & \gamma(B, D) \end{vmatrix} = \sigma(A, B)\,\sigma(C, D);$$

si l'on met D en B, et si l'on échange ensuite C et B, on a

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma(A, B) = \gamma(A, C)\gamma(C, B) - \sigma(A, C)\sigma(C, B),\\ &\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB};\end{aligned}\right.$$

si, dans (17), D est en B, C en A, on retrouve la formule

$$1 - \gamma(A, B)\gamma(B, A) = \sigma^2(A, B).$$

On a encore, en divisant (18) par (16),

$$(19)\qquad \frac{1}{\tau}(A, B) = \frac{\frac{1}{\tau}(A, C)\,\frac{1}{\tau}(C, B) - 1}{\frac{1}{\tau}(C, B) - \frac{1}{\tau}(C, A)}.$$

10. Nous donnerons ici une formule relative aux triangles, celle qui est analogue à la formule de Trigonométrie sphérique

$$\sin b \cot a - \sin C \cot A = \cos b \cos C;$$

le triangle sera donné *en position*. Soit d'abord un triangle ABC dans lequel le pseudo-angle $\overline{\beta\gamma}$ est égal au paramètre $\theta(A)$ du point A, le côté AB ou γ passant par le point $\overline{B}$ transformé de β; si γ tourne autour de B, on a (fin du n° 5)

$$\frac{1}{\tau}(C, B) = \frac{1}{\tau}(C, A)\,\varphi(\beta, \alpha);$$

on détermine la fonction φ en faisant tourner α autour de C, et l'on trouve

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}(C, B) = \frac{1}{\tau}(C, A)\,\gamma(\beta, \alpha),\\ &\overline{\beta\gamma} = \theta(A).\end{aligned}\right.$$

Corrélativement, pour un triangle dans lequel $\overline{CB}$ est égal au paramètre de la droite α, on a

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(\beta, \gamma) = \dfrac{1}{\tau}(\beta, \alpha)\gamma(C, A), \\ \overline{CB} = T(\alpha). \end{cases}$$

Pour un triangle quelconque ABC, en faisant tourner AB autour de A, et en tenant compte de (20) et (21), on a

$$(22)\qquad \sigma(C, A)\frac{1}{\tau}(C, B) + \sigma(\beta, \alpha)\frac{1}{\tau}(\beta, \gamma) = \gamma(C, A)\gamma(\beta, \alpha);$$

on aurait encore

$$(23)\qquad \sigma(A, C)\frac{1}{\tau}(B, C) + \sigma(\alpha, \beta)\frac{1}{\tau}(\gamma, \beta) = \gamma(A, C)\gamma(\alpha, \beta),$$

en tout douze formules. Dans un triangle sphérique, si l'on dirige par exemple CA et CB de C vers A, de C vers B, et si l'on oriente la sphère de β vers α, on a

$$(C, A) = b, \qquad (C, B) = a, \qquad (\beta, \alpha) = C,$$

mais on a

$$(\beta, \gamma) = -A + 2k\pi,$$

d'où la formule écrite au début de ce numéro.

11. Nous écrirons sans démonstration la formule

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} \Delta(A, \gamma) & \Delta(A, \delta) \\ \Delta(B, \gamma) & \Delta(B, \delta) \end{vmatrix} = \sigma(A, B)\sigma(\gamma, \delta) \times \Delta(\omega, O),$$

ω étant la droite AB, O étant le point d'intersection des droites γ et δ. Au moyen de (10), on en déduit

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \gamma(A, C) & \gamma(A, D) \\ \gamma(B, C) & \gamma(B, D) \end{vmatrix} = \sigma(A, B)\sigma(C, D) \times \gamma(AB, CD),$$

et l'on a une formule corrélative pour quatre droites ; si l'on met D en B dans (25), ou δ en β dans la formule corrélative, on a pour un triangle

$$(26)\qquad \gamma(A, C) = \gamma(A, B)\gamma(B, C) - \sigma(A, B)\sigma(B, C) \times \gamma(\gamma, \alpha),$$

$$(27)\qquad \gamma(\alpha, \gamma) = \gamma(\alpha, \beta)\gamma(\beta, \gamma) - \sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \gamma) \times \gamma(C, A),$$

en tout douze formules. Si, de la formule (26), et de celle qui contient (α, γ), on déduit l'expression de la quantité

$$1 - \gamma(\gamma, \alpha)\gamma(\alpha, \gamma) \qquad \text{ou} \qquad \sigma^2(\alpha, \gamma),$$

on obtient, aux signes près,

$$\frac{\sigma(B, C)}{\sigma(\beta, \gamma)} = \frac{\sigma(C, A)}{\sigma(\gamma, \alpha)} = \frac{\sigma(A, B)}{\sigma(\alpha, \beta)}, \tag{28}$$

chacun de ces rapports ayant pour valeur

$$\frac{\sigma(B, C)\,\sigma(C, A)\,\sigma(A, B)}{\begin{vmatrix} 1 & \gamma(A, B) & \gamma(A, C) \\ \gamma(B, A) & 1 & \gamma(B, C) \\ \gamma(C, A) & \gamma(C, B) & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}; \tag{29}$$

on aurait pour les rapports inverses une expression corrélative.

12. Les six formules (27) sont équivalentes aux six formules (26) ; les formules (26) donnent encore les six formules (22) dont la démonstration a été indiquée, et les six formules (23). On a, en somme, six formules distinctes relatives aux douze éléments d'un triangle, qui sont trois pseudo-distances, trois pseudo-angles, six paramètres, ou encore six comoments tels que $\gamma(A, B)$ et $\gamma(B, A)$, six autres tels que $\gamma(\alpha, \beta)$ et $\gamma(\beta, \alpha)$: comme cinq éléments métriques d'un triangle doivent déterminer les sept autres (n° 8), il manque une relation ; en désignant par α, β, γ les paramètres des sommets, par A, B, C ceux des droites qui portent les côtés, on a, par exemple (n° 8),

$$\frac{\cos\alpha\cos B \pm \cot\mathfrak{G}\sqrt{\sin^2\mathfrak{G} - \sin^2\alpha\sin^2 B}}{\cos A\cos\beta \pm \cot\mathfrak{G}\sqrt{\sin^2\mathfrak{G} - \sin^2 A\sin^2\beta}} \times \ldots = 1; \tag{30}$$

on trouvera plus loin une relation rationnelle équivalente (39).

13. Dans le cas particulier où l'on a $\overline{\beta\gamma} = \theta(A)$, celles des vingt-six relations qui renferment $\overline{\beta\gamma}$ se simplifient ; on a les dix formules suivantes, dont cinq sont distinctes, et il en faudrait six :

$$\begin{array}{c} (31) \\ \overline{\beta\gamma} = \theta(A) \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(C, A) = \sigma(C, B)\,\sigma(\alpha, \gamma), & \tau(C, A) = \tau(C, B)\,\gamma(\beta, \alpha), \\ \sigma(A, B) = \sigma(C, B)\,\sigma(\beta, \alpha), & \tau(A, B) = \tau(C, B)\,\gamma(\alpha, \gamma), \\ \gamma(\alpha, \gamma) = \gamma(C, A)\,\sigma(\beta, \alpha), & \tau(C, A) = \sigma(C, A)\,\tau(\alpha, \gamma), \\ \gamma(\beta, \alpha) = \gamma(A, B)\,\sigma(\alpha, \gamma), & \tau(A, B) = \sigma(A, B)\,\tau(\beta, \alpha), \\ \gamma(C, B) = \gamma(C, A)\,\gamma(A, B), & \gamma(C, B) = \frac{1}{\tau}(\beta, \alpha)\frac{1}{\tau}(\alpha, \gamma). \end{array} \right.$$

Relativement au signe du Δ d'un point A et d'une droite β, si l'on prend sur β deux points B et B′, et si l'on désigne par α et α' les droites AB et AB′, toutes les droites étant dirigées, il résulte de (28) que le produit $\sigma(A, B)\,\sigma(\alpha, \beta)$ est le même pour B et B′, et nous écrirons

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta(A, \beta) = \sigma(A, B)\,\sigma(\alpha, \beta), \\ &\Delta(\beta, A) = \sigma(\beta, \alpha)\,\sigma(B, A) = \Delta(A, \beta). \end{aligned} \right.$$

La transformée $\overline{\mu}$ d'un point M, le transformé $\overline{M}$ d'une droite μ doivent être tels que l'on ait

$$\Delta(M, \overline{\mu}) = +1, \qquad \Delta(\mu, \overline{M}) = +1;$$

on dirige la droite $\overline{\mu}$, ou l'on choisit le point $\overline{M}$ (comme l'on choisit sur une sphère entre deux points diamétralement opposés), de façon qu'il en soit ainsi; pour la droite $\underline{\mu}$, qui est la primitive d'un point M, on aura donc

$$\Delta(\underline{\mu}, M) = 1,$$

ce qui donne

$$\Delta(M, \underline{\mu}) = 1.$$

D'après (32), les rapports des Δ de plusieurs points et d'une même droite ne dépendent que de la conique F, et l'on a un fait corrélatif.

14. Pour un triangle ABC, dont les côtés sont portés par les droites α, β, γ, on définira la *fonction ponctuelle* et la *fonction tangentielle* par les formules

$$(33)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sigma(A, B, C) = \sigma(B, C) \times \Delta(A, \alpha) = \ldots, \\ &\sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma(\beta, \gamma) \times \Delta(\alpha, A) = \ldots. \end{aligned} \right.$$

Pour trois points A, B, C et trois droites λ, μ, ν, on a

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \Delta(A, \lambda) & \Delta(A, \mu) & \Delta(A, \nu) \\ \Delta(B, \lambda) & \ldots & \ldots \\ \Delta(C, \lambda) & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \sigma(A, B, C)\,\sigma(\lambda, \mu, \nu);$$

au moyen des formules (10), on a une formule concernant A, B, C et L, M, N, ou α, β, γ et λ, μ, ν; le dénominateur de la fraction

(29) est alors $\sigma(A, B, C)$, comme on le voit, d'ailleurs, directement.

15. Étant donnés deux points A et B, affectés des coefficients a et b, on définira sur la droite AB le *point résultant* C, et son coefficient c, par les formules

$$\frac{\sigma(B, C)}{a} = \frac{\sigma(C, A)}{b} = \frac{\sigma(A, B)}{c}, \tag{35}$$

où n'intervient que la conique F; au moyen de (13) et (32), on aura pour toute droite ω du plan

$$a\,\Delta(A, \omega) + b\,\Delta(B, \omega) = c\,\Delta(C, \omega), \tag{36}$$

et, par suite, pour tout point O du plan

$$\left\{\begin{aligned} a\,\gamma(O, A) + b\,\gamma(O, B) &= c\,\gamma(O, C),\\ a\,\gamma(A, O) + b\,\gamma(B, O) &= c\,\gamma(C, O). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

On a une théorie corrélative pour des droites.

Étant donnés un point M et une droite μ rapportés (avec des Δ) à un triangle de référence ABC, on regarde le point M de coefficient 1 comme le point résultant des points A, B, C, affectés des coefficients $\dfrac{\Delta(M, \alpha)}{\Delta(A, \alpha)}, \ldots,$ et, en prenant les moments par rapport à la droite μ, on a

$$\Delta(M, \mu) = \frac{\Delta(M, \alpha)\,\Delta(A, \mu)}{\Delta(A, \alpha)} + \ldots + \ldots. \tag{38}$$

Si M et μ sont le point P et la droite π, et si l'on tient compte de (11), on a, avec les notations du n° 12,

$$\cos^2 \mathfrak{C} = \frac{\cos\alpha \cos A}{\Delta(A, \alpha)} + \ldots + \ldots. \tag{39}$$

Cette relation peut remplacer la relation (30).

§ III.

16. Voici une interprétation *sensible* de la métrique aninvolutive. Considérons un cône isotrope de sommet O, et un cône imaginaire de révolution d'axe Oz, savoir

$$\left\{\begin{array}{l} u^2+v^2+w^2=0, \\ x^2+y^2+\dfrac{z^2}{\sin^2\varpi}=0, \qquad 0<\varpi<\dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right.$$

x, y, z étant des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs d'une droite issue de O ; ces deux cônes sont doublement tangents, les génératrices de contact étant les isotropes de O dans le plan xOy ; ils définissent une corrélation générale autour de O, le cône isotrope étant l'enveloppe des plans autoconjugués, le cône de révolution étant le lieu des droites autoconjuguées, de sorte que le pseudo-angle de deux plans est l'angle véritable, et que le pseudo-angle de deux droites est relatif au cône de révolution ; les coordonnées du plan transformé d'une droite sont données par les formules

$$(40) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{u}{x\sin\varpi+y\cos\varpi}=\dfrac{v}{-x\cos\varpi+y\sin\varpi}=\dfrac{w\sin\varpi}{z} \\ \text{ou} \\ \dfrac{u}{X}=\dfrac{v}{Y}=\dfrac{w\sin\varpi}{z}, \end{array}\right.$$

l'axe OX faisant avec Ox l'angle $\frac{\pi}{2}-\varpi$; pour le plan primitif, on change ϖ en $-\varpi$. Faisons maintenant correspondre à toute droite OM issue de O une droite OM′ dont les coordonnées homogènes seront $x'=x$, $y'=y$, $z'=\frac{z}{\sin\varpi}$, de manière à faire correspondre au cône de révolution le cône isotrope $x'^2+y'^2+z'^2=0$: le pseudo-angle de deux droites α et β relativement au cône de révolution sera égal à l'angle véritable des droites correspondantes α' et β' ; dès lors, étant donnée une figure conique F, on considérera en même temps la figure correspondante F′, et l'*on prendra les angles des plans sur la figure* F, *les angles des droites sur la figure* F′ ; on peut observer que la figure F′ est, au point de vue de la Géométrie conique, homologique de la figure F, l'axe d'homologie étant Oz, le plan d'homologie étant xOy. Pour plus de clarté, on considérera les choses sur une sphère de centre O, de rayon 1, dont les points M et les grands cercles μ correspondront aux droites (dirigées) et aux plans qui passent par O ; on regardera cette sphère comme une surface de révolution d'axe Oz, les points P et P_1 sur zz' seront les pôles, les grands cercles passant par ces points seront les méridiens ; on aura l'équateur π, et nous aurons à considérer les parallèles. A tout point M correspondra un *point auxiliaire* M' situé sur le même méridien, et, au point de vue de la Géométrie sphérique, la figure F' déduite d'une figure F est homologique de celle-ci, avec P comme centre d'homologie et π comme axe d'homologie ; on prendra les angles véritables des grands cercles μ, et la pseudo-distance de deux points A et B sera donnée par la distance sphérique A'B' ; sur l'équateur, la pseudo-distance sera la vraie distance ; nous écrirons

$$\overline{\alpha\beta} = (\alpha, \beta), \qquad \overline{AB} = A'B'.$$

La droite $Y = 0$, $z = 0$, ou OX, ou OR sur la figure, ayant pour transformé le plan zOy, on voit que ϖ est le paramètre de l'équateur π dirigé de Ox vers Oy ; c'est aussi le paramètre du point P.

17. En Géométrie conique, l'espace est orienté, les plans sont orientés, les droites sont dirigées : dans un plan orienté, l'angle de deux droites dirigées a un signe, et corrélativement, autour d'une droite dirigée, l'angle de deux plans orientés a un signe ; ces questions sont étudiées dans un Opuscule ayant pour titre : *Géométrie dirigée*. Sur la sphère, qui est orientée, les grands cercles sont dirigés, et l'on distingue deux points diamétralement opposés, M et M_1, le point M correspondant à la droite OM dirigée de O vers M : sur un grand cercle dirigé, la distance entre deux points a un signe, et, corrélativement, autour d'un point qui n'est pas indifféremment M ou M_1, l'angle de deux grands cercles dirigés a un signe. Relativement à l'orientation de l'espace, nous disposerons les axes Ox, Oy, Oz comme sur la figure, Ox et Oy étant placés comme en Géométrie plane : l'espace est orienté de droite à gauche pour tout observateur, de Oy vers Oz pour l'observateur Ox, ... ; sur la sphère, les angles autour d'un point sont alors positifs de droite à gauche. En raison de ce qui a été dit au n° 13, le grand cercle transformé et le grand cercle primitif d'un point sont dirigés de droite à gauche autour de ce

point, de sorte que le point primitif et le point transformé d'un grand cercle dirigé sont dans le même des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle : pour le point P sur Oz, le grand cercle transformé et le grand cercle primitif sont l'équateur π dirigé de Ox vers Oy, et ils sont de même sens parce qu'il s'agit de métrique à deux dimensions; pour P_1, on a π dirigé en sens contraire, soit π_1. Les paramètres sont tous positifs, compris entre deux limites ϖ et $\pi - \varpi$ d'après les formules (11); en Géométrie conique, les paramètres seraient désignés par τ pour une droite ou axe, par θ pour un plan, mais, sur la sphère, nous avons désigné par θ le paramètre autour d'un point, par T le paramètre sur un grand cercle, par analogie avec la Géométrie plane; T se change en $\pi - T$ quand on change le sens du grand cercle, et les paramètres de deux points opposés M et M_1 sont θ et $\pi - \theta$; avec ces paramètres positifs, $\sigma(A, B)$ change de signe quand on change le sens du grand cercle AB, et $\sigma(\alpha, \beta)$ dépend pour le signe du point M ou M_1 autour duquel on le considère; avec T et $\pi - T$, on a le conjugué d'un point M sur un grand cercle dirigé ρ en portant le paramètre T à partir du point M' dans le sens positif sur ρ', et en prenant le point N qui correspond au point N' obtenu : on a un exemple sur la figure, ρ étant un méridien, auquel cas ρ' se confond avec ρ, le paramètre est $\frac{\pi}{2}$, et l'on prend $M'N' = \frac{\pi}{2}$; si l'on change le sens du grand cercle, il faut porter $\pi - T$ dans le sens contraire au premier, et l'on a le point opposé; le conjugué d'un grand cercle dirigé, autour d'un point, est de la même façon un grand cercle dirigé. Le paramètre d'un point de l'équateur étant $\frac{\pi}{2}$, on aura $\theta < \frac{\pi}{2}$ pour les points situés du même côté que P par rapport à l'équateur; le paramètre d'un méridien étant $\frac{\pi}{2}$, on aura $T < \frac{\pi}{2}$ quand le grand cercle tourne de droite à gauche autour de P; le point P, l'équateur π dirigé de Ox vers Oy, ont pour paramètre $\varpi < \frac{\pi}{2}$.

18. Sur la *fig.* 1 on a

$$\text{Un méridien } \rho \left\{ \begin{array}{l} \text{P et son conjugué R,} \\ \text{M et son conjugué N,} \end{array} \right.$$

et, en prenant les éléments transformés,

$$\text{Le point } \overline{R} \left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ et son conjugué } \overline{\rho}, \\ \overline{\mu} \text{ et son conjugué } \overline{\nu}; \end{array} \right.$$

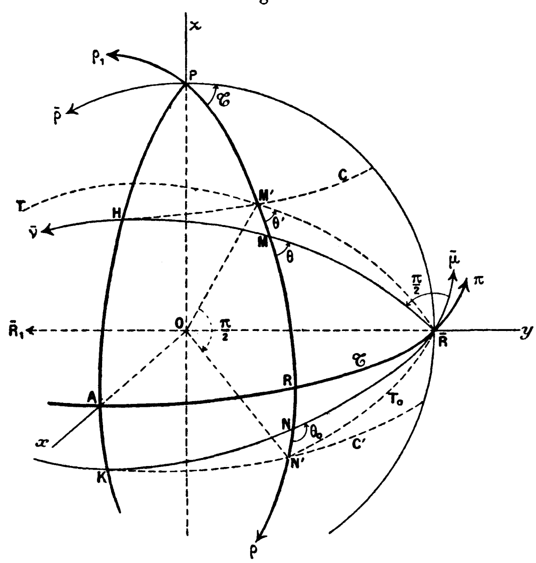
les paramètres sur ρ et en $\overline{R}$ étant $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a

$$M'N' = \frac{\pi}{2}, \tag{41}$$

$$(\overline{\mu}, \overline{\nu}) = \frac{\pi}{2}, \tag{42}$$

si l'on considère ρ changé de sens, soit ρ_1, et aussi $\overline{R_1}$ opposé à $\overline{R}$, N a pour conjugué M sur ρ_1, $\overline{\nu}$ a pour conjugué $\overline{\mu}$ autour de $\overline{R_1}$,

Fig. 1.



et, par suite, M et N étant conjugués sur ρ, N et M l'étant sur ρ_1, $\overline{\mu}$ passe en N, et $\overline{\nu}$ passe en M. En R, le conjugué de ρ est π; sur $\overline{\rho}$, le conjugué de $\overline{R}$ est P. Enfin :

Sur π, le conjugué de	R est $\overline{R}$,		$\mathcal{C} = R\overline{R}$,
Sur $\overline{\mu}$,	»	N est $\overline{R}$,	$T_0 = N'\overline{R}$,
Sur $\overline{\nu}$,	»	M est $\overline{R_1}$,	$T = M'\overline{R_1}$;

en même temps :

En P, $\bar{\rho}$ est le conjugué de	ρ_1,	$-\mathfrak{T} = (\bar{\rho}, \rho_1)$,	$\mathfrak{T} = (\rho_1, \bar{\rho})$,
En M, $\bar{\nu}$ »	ρ_1,	$-\theta = (\bar{\nu}, \rho_1)$,	$\theta = (\rho_1, \bar{\nu})$,
En N, $\bar{\mu}$ »	ρ,	$-\theta_0 = (\bar{\mu}, \rho)$,	$\theta_0 = (\rho, \bar{\mu})$,

puisque, par exemple, le conjugué de $\bar{\rho}$ serait le transformé de $\bar{R}$; on a mis T et θ pour $\bar{\nu}$ et M que l'on étudiera, et d'ailleurs on a $T_0 = \theta$, $\theta_0 = T$.

Pour avoir $\bar{\mu}$ d'après M, ou inversement, on appliquera la propriété $R\bar{R} = \mathfrak{T}$, et l'une ou l'autre des propriétés (41), (42) : la seconde montre que, si M décrit le méridien PR, le plan de $\bar{\mu}$ tourne autour de $O\bar{R}$ en restant perpendiculaire au plan $MO\bar{R}$; le primitif $\underline{\mu}$ de M serait symétrique de $\bar{\mu}$ par rapport au méridien ρ du point M, sauf le sens ; si l'on se donne $\bar{\mu}$, son primitif est M, et son transformé serait le symétrique de M par rapport au plan zOA perpendiculaire au plan de $\bar{\mu}$.

19. On a, par la définition de M', et en prenant des valeurs absolues,

$$\text{tang}\,RM' = \frac{\text{tang}\,RM}{\sin \mathfrak{T}}, \tag{43}$$

$$RM' = AH, \tag{44}$$

cette dernière relation résultant de ce que l'on a

$$\text{tang}\,RM' = \frac{\text{tang}\,RM}{\sin R\bar{R}} = \text{tang}\,A\bar{R}H = \text{tang}\,AH ;$$

cela détermine M' d'après M sur la sphère elle-même, indépendamment de l'homologie déjà signalée ; comme on a aussi $RN' = AK$, on vérifie l'accord des formules (41) et (42).

20. Le triangle rectangle $MR\bar{R}$, et le triangle $\bar{\nu}'\rho\bar{\rho}$ ou $PM'\bar{R}_1$ qui a un côté égal à $\frac{\pi}{2}$, donnent, au moyen de la formule

$$\cos B = \cos b \sin C$$

et de la formule corrélative, en tenant d'ailleurs compte de (44),

$$\cos M = \cos R\overline{R} \sin A\overline{R}H = \cos R\overline{R} \cos PM',$$
$$\cos M'\overline{R_1} = \cos P \quad \sin PM' = \cos P \cos A\overline{R}H,$$

et l'on a, pour le point M et le grand cercle ν,

$$(45) \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\mathfrak{T} \cos PM' = \cos\mathfrak{T} \cos\overline{PM}, \\ \cos T = \cos\mathfrak{T} \cos(\pi, \bar{\nu}), \end{cases}$$

c'est-à-dire les formules (11); on vérifierait au moyen de ces formules les relations $T_0 = \theta$, $\theta_0 = T$.

Pour la formule (12), si l'on reprend les deux cônes considérés au début, un cône C qui leur est doublement tangent dans des conditions analogues à celles du n° 8 est un cône de révolution d'axe Oz, et la trace de ce cône sur la sphère est un parallèle C : un grand cercle $\bar{\nu}$ tangent à ce parallèle et un point M' du parallèle (M' étant ici un point considéré en lui-même, et non plus le point auxiliaire de M) doivent avoir leurs paramètres liés par la formule (12); on doit avoir

$$\sin T \sin\theta' = \sin\mathfrak{T},$$

et on le voit par le triangle $M'R\overline{R}$. Si M' va de R en P, son paramètre θ' décroît de $\frac{\pi}{2}$ à $\mathfrak{T}$, et en même temps le paramètre $M'\overline{R}$ du grand cercle $\overline{\nu_1}$ croît de $\mathfrak{T}$ à $\frac{\pi}{2}$.

§ IV.

21. Dans l'espace, on partira d'une corrélation générale entre des points M et des plans m. Les éléments autoconjugués donneront une quadrique F, un complexe φ, une quadrique f, et les deux quadriques F et f auront en commun quatre droites AD, DB, BC, CA : si l'on se donne F et f, il reste un paramètre pour la corrélation générale; avec un tétraèdre de référence dont les arêtes autres que AB et CD forment le quadrilatère gauche ADBC ci-dessus, on partira des formules

$$(46) \qquad \frac{u}{ay} = \frac{v}{a'x} = \frac{w}{\alpha t} = \frac{r}{\alpha' z}.$$

On définira $\overline{AB}$ par rapport à F, $\overline{\alpha\beta}$ par rapport à φ, et $\overline{ab}$ par rapport à f. On aura $\Delta(A, a) = -\Delta(a, A)$. Le moment de deux droites α et β sera défini au moyen des deux droites qui rencontrent α, β et leurs transformées (ou leurs primitives) : on aura $\mathfrak{M}(\alpha, \beta) = \mathfrak{M}(\beta, \alpha)$; on définira $\gamma(\alpha, \beta)$. Pour deux droites qui se coupent, on appellera *moment réduit* la quantité $\sigma(\alpha, \beta)$ définie précédemment.

Avec un tétraèdre de référence, on aura pour un point et un plan une formule analogue à la formule (38). Pour deux droites dirigées, on aura

$$\mathfrak{M}(\mu, \nu) = \frac{\mathfrak{M}(\mu, \alpha)\,\mathfrak{M}(\alpha', \nu)}{\mathfrak{M}(\alpha', \alpha)} + \ldots, \tag{47}$$

les arêtes dirigées du tétraèdre étant α, β, γ, α', β', γ'. La formule qui donnera le comoment de deux droites, si l'on suppose ces deux droites confondues, donnera la relation entre les coordonnées normales d'une droite : en définissant alors une droite par deux points A et B, ou par deux plans a et b, on aura les expressions des quantités $\sigma(A, B)$ et $\sigma(a, b)$; cette idée peut donner d'autres formules.

Étant donnés un point A et un plan b, menons par A une droite α, par α un plan a, et soient B et β les traces de la droite α et du plan a sur le plan b; tous les éléments étant dirigés, on définit le signe d'un Δ en écrivant

$$\begin{cases} \Delta(A, b) = \sigma(A, B)\,\sigma(\alpha, \beta)\,\sigma(a, b), \\ \Delta(b, A) = \sigma(b, a)\,\sigma(\beta, \alpha)\,\sigma(B, A), \end{cases} \tag{48}$$

ce qui donne $\Delta(A, b) = -\Delta(b, A)$. Pour deux droites β et α, si l'on mène par α un plan a coupant β en B, le *théorème des quatre éléments*, démontré dans l'Ouvrage cité, donne la formule

$$\mathfrak{M}(\beta, \alpha) = \Delta(\beta, a) \times \Delta(B, \alpha). \tag{49}$$

22. Si, dans le quadrilatère gauche ADBC dont on a parlé, C et D sont les points cycliques d'un plan perpendiculaire à la droite AB, les deux quadriques F et f sont de révolution; en prenant pour origine le milieu O de AB, pour axe des z la

droite OB, ..., et en mettant l'équation d'un plan sous la forme $ux + vy + wz - 1 = 0$, on aura les formules de transformation

$$(50) \qquad \frac{u}{x\sin\varphi + y\cos\varphi} = \frac{v}{-x\cos\varphi + y\sin\varphi} = \frac{w}{mz + n} = \frac{1}{nz + p};$$

dans ces conditions, si l'on fait tourner une figure autour de Oz, ses éléments métriques aninvolutifs restent invariables; il en résulte que, d'une manière générale, il existe en nombre simplement infini des figures ayant mêmes éléments métriques relativement aux deux quadriques F, f et au complexe φ, qui naissent d'une corrélation donnée.

23. Les paramètres seront: T sur un rayon, θ autour d'un point dans un plan, t autour d'un axe. On aura de plus pour chaque plan O un paramètre $\mathfrak{G}$, pour chaque point O un paramètre τ; l'espace aura un paramètre Θ. Dans un plan, par exemple, les quantités $\sigma(A, B, C)$ et $\sigma(\alpha, \beta, \gamma)$ sont définies par les formules (33); or, en prenant la quantité $s(A, B, C)$ dans la correspondance par polaires réciproques que définit la conique directrice F, et la quantité $s(\alpha, \beta, \gamma)$ dans la correspondance que définit la conique φ, on a

$$(51) \qquad \frac{\sigma(A, B, C)}{s(A, B, C)} = \frac{\sigma(\alpha, \beta, \gamma)}{s(\alpha, \beta, \gamma)} = \text{const.} = \frac{1}{\sin\mathfrak{G}},$$

comme on peut le vérifier dans un cas particulier sur le triangle $\overline{MNR}$ ou $\overline{\mu\nu\rho}$ de la figure ci-dessus; on a déjà écrit

$$\sigma(A, B) = \frac{\sin\overline{AB}}{\sin T},$$

et l'analogie conduit à dire que $\mathfrak{G}$ est le paramètre du plan.