BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur la stabilité de l'équilibre

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__163_0>

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE;

Par M. L. Lecornu.

On sait depuis longtemps que l'introduction de liaisons nouvelles est susceptible de détruire la stabilité de certains mouvements. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les mouvements gyroscopiques. Dans une Note communiquée le 3 mars 1897 à la Société mathématique, M. Andrade a fait remarquer que la même chose peut arriver pour l'équilibre statique d'un point sollicité par des forces qui n'admettent pas de potentiel. Mais il n'a pas établi la vérité de son assertion. Il s'est borné, en effet, à montrer, par un exemple d'ailleurs intéressant, que deux forces agissant séparément sur un même point matériel, peuvent laisser chacune ce point dans un état d'équilibre stable sans que leur résultante jouisse de la même propriété. Les forces considérées dans cet exemple sont des fonctions de point, indépendantes l'une de l'autre : on ne peut rien en conclure pour le cas, tout différent, où l'une des deux forces résulte de l'introduction d'une liaison.

Je me propose de prouver ici qu'effectivement, lorsqu'un point est en équilibre statique sous l'action de forces qui n'admettent pas de potentiel, l'introduction de liaisons nouvelles peut détruire la stabilité, bien loin de la renforcer. Mais avant d'en arriver là, je dois étudier avec quelque détail les conditions de stabilité d'un point entièrement libre, sollicité par des forces sans potentiel.

Considérons un point matériel de masse égale à l'unité, et supposons que la force agissant sur ce point ait pour composantes, parallèlement à trois axes rectangulaires, les quantités

$$(1)\qquad \begin{cases} X = mx + ny + pz, \\ Y = m'x + n'y + p'z, \\ Z = m''x + n''y + p''z. \end{cases}$$

L'origine est une position d'équilibre; quelles relations doivent exister entre les neuf coefficients constants $m, n, p, \ldots$ pour que l'équilibre soit stable? Remarquons dès à présent que le problème ainsi posé présente un assez haut degré de généralité, car, quelle que soit la force agissante, ses composantes, dans le voisinage de la position d'équilibre, peuvent, au point de vue de la recherche de la stabilité, être considérées comme des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées, ces coordonnées pouvant être rendues aussi petites qu'on le veut.

Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = mx + ny + pz,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On satisfait à ces équations en posant

$$x = C_1 e^{\omega t}, \qquad y = C_2 e^{\omega t}, \qquad z = C_3 e^{\omega t},$$

et assujettissant les quatre constantes C_1, C_2, C_3, ω à vérifier les trois relations

$$\begin{aligned} (m-\omega^2)C_1 + \quad nC_2 \quad + \quad pC_3 \quad &= 0. \\ m'C_1 + (n'-\omega^2)C_2 + \quad p'C_3 \quad &= 0, \\ m''C_1 + \quad n''C_2 \quad + (p''-\omega^2)C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que C_1, C_2, C_3 ne soient pas simultanément nuls, ce qui supprimerait tout mouvement, il faut que l'inconnue ω vérifie l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} m-\omega^2 & n & p \\ m' & n'-\omega^2 & p' \\ m'' & n'' & p''-\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donne pour ω six valeurs, deux à deux égales et de signes contraires. Pour chaque valeur de ω^2, les rapports $\frac{C_2}{C_1}$ et $\frac{C_3}{C_1}$ prennent des valeurs déterminées $\varphi(\omega^2)$, $\psi(\omega^2)$, et le mouvement le plus général est fourni par la composition géométrique de trois mouvements rectilignes dont chacun est représenté par des équations de la forme

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_1' e^{-\omega t}, \qquad y = x\,\varphi(\omega^2), \qquad z = x\,\psi(\omega^2).$$

D'après cela, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre est que les trois valeurs de ω^2 soient réelles et négatives : si donc l'on remplace ω^2 par $-u$, les trois valeurs de u doivent être positives.

Ce résultat analytique est susceptible d'une interprétation bien simple. Cherchons s'il existe, à partir de l'origine O, une direction OA telle que la force appliquée en A soit dirigée de A vers O. Il faut pour cela que l'on ait au point A

$$(3) \qquad \frac{mx+ny+pz}{x} = \frac{m'x+n'y+p'z}{y} = \frac{m''x+n''y+p''z}{z} = -u,$$

u désignant une quantité positive. L'élimination des coordonnées x, y, z ramène à l'équation (2) modifiée par la substitution de u à la place de $-\omega^2$. La quantité u est le rapport entre la force attractive dirigée de A vers O et la distance AO. On voit en outre que, pour chaque valeur de u, les projections x, y, z du déplacement rectiligne considéré dans le premier problème sont proportionnelles aux coordonnées x, y, z du point A. On peut alors énoncer ce théorème :

L'équilibre est stable quand il existe à partir de la position d'équilibre O *trois directions réelles telles que, pour chacune d'elles, la force soit dirigée vers le point* O. *On peut appeler ces trois droites les* lignes centrales. *Quand cette condition nécessaire et suffisante est remplie, le mouvement le plus général résulte de la composition de trois vibrations pendulaires exécutées suivant les lignes centrales sous l'action des forces correspondantes.*

Quand les lignes centrales sont orthogonales, les forces admettent évidemment un potentiel. C'est d'ailleurs le seul cas où l'existence du potentiel soit possible, car il faut pour cela que le déterminant figurant dans l'équation (2) soit symétrique, et l'équation en u se réduit alors à l'équation classique en s, servant à déterminer les directions principales d'une quadrique.

Cherchons le lieu des points pour lesquels la force est perpendiculaire au rayon vecteur. Nous sommes conduits à l'équation

$$(mx+ny+pz)x+(m'x+n'y+p'z)y+(m''x+n''y+p''z)z = 0,$$

qui représente un cône du second degré.

Nous profiterons de l'indétermination laissée jusqu'ici dans le choix des axes pour les faire coïncider avec les directions principales de ce cône. Nous aurons alors les relations

$$p'+n'' = 0, \qquad m''+p = 0, \qquad n+m' = 0.$$

Posons, d'autre part,

$$p' = -n'' = \alpha, \qquad m'' = -p = \beta, \qquad n = -m' = \gamma$$

et

$$m = -A, \qquad n' = -B, \qquad p'' = -C.$$

Les équations (1) deviennent

$$(4) \qquad \begin{cases} X = -Ax + (\gamma y - \beta z), \\ Y = -By + (\alpha z - \gamma x), \\ Z = -Cz + (\beta x - \alpha y). \end{cases}$$

Les termes renfermant A, B, C correspondent à une force qui dérive du potentiel

$$\frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Pour abréger, nous appellerons cette force *la force potentielle*. Les termes entre parenthèses représentent les composantes d'une force perpendiculaire au vecteur dont les composantes sont α, β, γ, et égale à la vitesse que ce vecteur, considéré comme une rotation, imprimerait au point considéré. Nous appellerons cette force *la force tourbillonnaire* et nous désignerons par *tourbillon* le vecteur (α, β, γ).

Nous sommes alors conduits à chercher quelles relations doivent exister entre le potentiel et le tourbillon pour que l'équilibre soit stable. D'après ce qui précède, il faut et il suffit que les racines de l'équation

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} u-A & \gamma & -\beta \\ -\gamma & u-B & \alpha \\ \beta & -\alpha & u-C \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(6) \quad (u-A)(u-B)(u-C) + \alpha^2(u-A) + \beta^2(u-B) + \gamma^2(u-C) = 0$$

soient toutes les trois réelles et positives. En exprimant que cette équation, ordonnée par rapport à u, ne présente que des variations, on trouve

$$\Sigma A > 0, \qquad \Sigma AB + \Sigma \alpha^2 > 0, \qquad ABC + \Sigma A\alpha^2 > 0.$$

Il faut ensuite écrire que l'équation dérivée a ses racines réelles, ce qui fournit la nouvelle condition

$$(\Sigma A)^2 - 3\Sigma AB - 3\Sigma \alpha^2 > 0.$$

On a enfin à faire en sorte que les deux racines de l'équation dérivée, substituées dans le premier membre de l'équation (6), donnent des résultats de signes contraires. Cela donne une dernière inégalité, assez compliquée, que nous nous dispenserons d'écrire. Nous obtiendrons une discussion plus claire en nous aidant de la méthode graphique.

Soient a, b, c les cosinus directeurs du tourbillon (α, β, γ) et ρ la longueur de ce vecteur. Posons en outre

$$D = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2.$$

L'équation (6) devient

$$(u - A)(u - B)(u - C) = \rho^2(D - u). \tag{7}$$

Les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la cubique

$$v = (u - A)(u - B)(u - C)$$

avec la droite $v = \rho^2(D - u)$.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$A > B > C.$$

L'inégalité $A + B + C > 0$ montre que A est nécessairement positif. D'autre part, la constante D est toujours comprise entre A et C; car, d'après sa définition, on a

$$\begin{aligned} A - D &= (A - B)b^2 + (A - C)c^2, \\ D - C &= (A - C)a^2 + (B - C)b^2. \end{aligned}$$

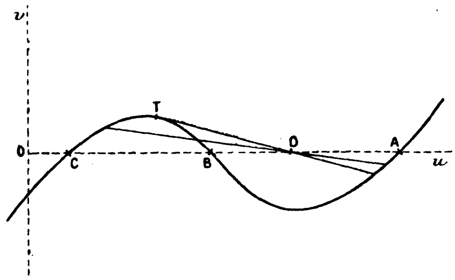
Ceci posé, nous avons trois cas à considérer :

Premier cas. — A, B et C positifs.

La cubique coupe l'axe des u (*fig.* 1) en trois points A, B, C situés sur la partie positive de cet axe. Le point D, dont l'abscisse figure la longueur D, est quelque part entre A et C. Faisons varier ρ^2, les autres éléments demeurant constants.

Si $\rho^2 = 0$, les trois racines sont réelles, positives et égales à

Fig. 1.

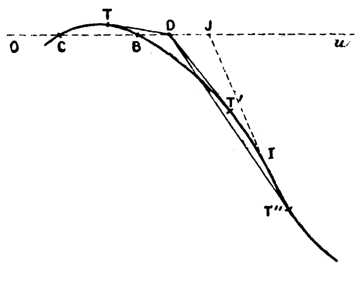


OA, OB, OC. Quand ρ^2 va en croissant, la droite $v = \rho^2(D - u)$ tourne autour du point D avec un coefficient angulaire négatif. Il est clair que les trois racines continuent à remplir les conditions de stabilité jusqu'à ce que la droite prenne la position DT, tangente à la cubique. D'après cela :

Quand les constantes A, B, C *sont positives, c'est-à-dire quand les surfaces de niveau de la force potentielle sont des ellipsoïdes, la stabilité est compatible avec une direction quelconque du tourbillon, il suffit que la grandeur de ce tourbillon soit inférieure à une limite déterminée, facile à calculer.*

Le phénomène est parfois un peu plus compliqué. Menons

Fig. 2.



(*fig.* 2) au point d'inflexion I la tangente IJ, qui coupe au point J l'axe des u. Si le point D se trouve compris entre B et J, on peut mener trois tangentes DT, DT′, DT″ à la cubique, et ces trois tangentes ont un coefficient angulaire négatif. Quand la sécante, après avoir pris la position DT, continue à s'écarter de l'axe des u, les conditions de stabilité cessent momentanément d'être remplies. Puis, quand la sécante atteint et dépasse la position DT′, on obtient de nouveau trois points d'intersection à abscisses positives, et, par conséquent, on se retrouve dans les conditions de stabilité jusqu'à ce que l'on arrive à la position DT″, tangente au delà du point d'inflexion. Le théorème précédent doit donc être complété ainsi :

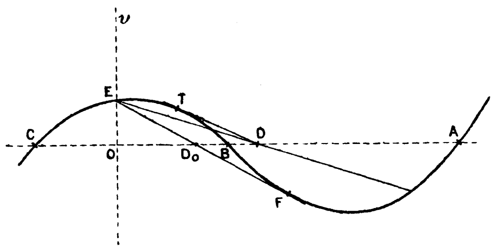
Si la direction du tourbillon est suffisamment rapprochée de celle de l'axe moyen des surfaces de niveau, il peut arriver que dans l'allongement progressif de ce vecteur la stabilité, après avoir un instant disparu, reparaisse de nouveau dans un certain intervalle.

On remarque que dans le cas où A, B, C sont de même signe, le cône asymptote des surfaces de niveau est imaginaire, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune direction réelle pour laquelle la force résultante soit perpendiculaire au rayon vecteur.

Deuxième cas. — A et B positifs. C négatif.

Le point C se trouve à gauche de l'origine (*fig.* 3). Pour que

Fig. 3.



la droite menée par le point D coupe la cubique en trois points dont les abscisses soient positives, il faut avant tout que D soit à droite de l'origine. Mais cela ne suffit pas. On aura la limite inférieure de l'abscisse de D en menant par le point E, intersection de la cubique avec l'axe des v, une tangente EF à la cubique.

Cette tangente rencontre l'axe des u en un point D_0, et le point D doit se trouver à droite de D_0. Cette condition étant supposée remplie, il reste à choisir convenablement la direction de la sécante. On reconnaît immédiatement que son coefficient angulaire, pris en valeur absolue, a, comme dans le cas précédent, une limite supérieure, correspondant à la tangente DT menée de D à la cubique, mais qu'il a, en outre, une limite inférieure, correspondant à la position DE. Par conséquent :

Quand l'une des constantes A, B, C *est négative, c'est-à-dire quand l'une des composantes orthogonales de la force potentielle est répulsive, la stabilité peut encore subsister, bien que la force potentielle et la force tourbillonnaire produisent séparément un équilibre instable; il faut, dans ce cas, que la direction de la force tourbillonnaire soit convenablement choisie et que sa grandeur soit comprise entre deux limites déterminées.*

Ici, comme dans le cas précédent, une complication peut surgir, relativement à la limite supérieure, si le point D est suffisamment rapproché de B. Je n'insiste pas sur ce détail.

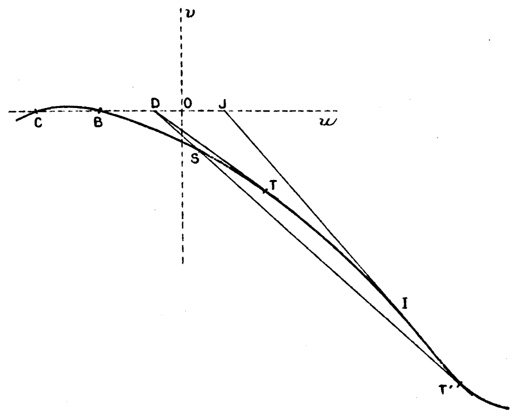
Dire que l'abscisse de D est positive, c'est dire que la fonction $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$ est elle-même supérieure à zéro et que, par conséquent, la direction du tourbillon est *à l'extérieur* du cône asymptote, qui actuellement est réel et entoure l'axe répulsif correspondant à C. En d'autres termes, la force potentielle qui s'exerce en un point quelconque de l'axe du tourbillon a une composante attractive suivant la direction de cet axe. Cette condition imposée à la direction du tourbillon est nécessaire, mais, d'après ce que nous venons de dire, elle n'est pas suffisante pour qu'il existe une grandeur du tourbillon capable d'assurer la stabilité.

Troisième cas. — A positif. B et C négatifs.

Si nous considérons (*fig.* 4) la tangente d'inflexion IJ, une discussion analogue aux précédentes montre que D doit se trouver entre J et B. L'abscisse de D peut d'ailleurs être positive ou négative. La valeur de ρ^2 doit être comprise entre les coefficients angulaires (pris positivement) des tangentes DT et DT'.

Si l'abscisse de D est négative, il faut, pour que la position limite DT′ soit admissible, que le point S, où cette tangente traverse la cubique, ait une abscisse positive; sans quoi, dans le passage de DT à DT′, on devrait s'arrêter à l'instant où l'un des

Fig. 4.



points de rencontre avec la cubique vient se placer sur l'axe Ov.

Il est aisé de traduire, comme nous l'avons fait pour les deux autres cas, ces conditions géométriques dans le langage mécanique.

Voici maintenant quelques propriétés concernant les lignes centrales. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'une de ces lignes. On a

$$\frac{-Ax+\gamma y-\beta z}{x}=\ldots=-u=-\frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

u étant positif, il en est de même de la fonction $Ax^2+By^2+Cz^2$. Cette condition est remplie d'elle-même si A, B, C sont positifs. Si C est négatif, A et B demeurant positifs, elle exige que la direction de la ligne centrale considérée tombe à l'*extérieur* du cône asymptote. Si B et C sont négatifs, on voit de même que la direction de chaque ligne centrale doit tomber à l'*intérieur* du cône asymptote. Dans un cas comme dans l'autre, les lignes centrales sont toutes les trois, par rapport au cône asymptote, du même côté que l'axe Ox, correspondant par hypothèse au plus grand des trois coefficients A, B, C.

Chaque racine u étant d'ailleurs égale au rapport entre la force attractive correspondante et la distance du point considéré à l'origine, on peut ajouter que la force attractive est égale, pour un point quelconque d'une ligne centrale, à la puissance de ce point relativement au cône asymptote, divisée par la distance à l'origine.

On peut encore remarquer que, si les trois lignes centrales percent une surface de niveau $Ax^2+By^2+Cz^2=h$ en trois points situés aux distances r_1, r_2, r_3 de l'origine, et si u_1, u_2, u_3 sont les racines correspondantes, on a

$$u_1=\frac{h}{r_1^2},\qquad u_2=\frac{h}{r_2^2},\qquad u_3=\frac{h}{r_3^2},$$

et, comme $u_1+u_2+u_3=A+B+C$; comme de plus, $\frac{h}{A}$, $\frac{h}{B}$, $\frac{h}{C}$ sont les carrés des demi-axes principaux de la surface de niveau, il s'ensuit que :

Une surface de niveau quelconque intercepte sur les lignes centrales trois longueurs telles que la somme des carrés de leurs inverses soit égale à la somme des carrés des inverses des axes principaux.

Si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées trois axes rectangulaires quelconques, les projections de la force résultante deviennent

$$\begin{aligned}
X &= -Ax+Gy+Fz+(\gamma y-\beta z),\\
Y &= Gx-By+Ez+(\alpha z-\gamma x),\\
Z &= Fx+Ey-Cz+(\beta x-\alpha y),
\end{aligned}$$

(avec de nouvelles valeurs des constantes).

Faisons coïncider l'axe des x avec l'une des lignes centrales. On doit, pour $y=z=0$, avoir à la fois $X=-Ax$, $Y=0$, $Z=0$, ce qui donne $G=\gamma$, $F=-\beta$, et il reste

$$\begin{aligned}
X &= -Ax+2(\gamma y-\beta z),\\
Y &= -By+(E+\alpha)z,\\
Z &= -Cz+(E-\alpha)y.
\end{aligned}$$

Les deux autres lignes centrales satisfont à l'équation

$$-B+(E+\alpha)\frac{z}{y}=-C+(E-\alpha)\frac{y}{z},$$

ou bien

$$(E+\alpha)\left(\frac{z}{y}\right)^2-(B-C)\frac{z}{y}-(E-\alpha)=0.$$

Nous pouvons faire en sorte que les plans zOx, zOy soient les plans bissecteurs du dièdre dont l'arête est Ox et dont les faces contiennent respectivement les deux autres lignes centrales. Alors $B=C$, c'est-à-dire que chaque surface de niveau intercepte sur Oy et Oz des longueurs égales. D'après cela :

Si l'on considère un dièdre dont l'arête soit l'une des lignes centrales et dont les faces contiennent les deux autres lignes centrales, les plans bissecteurs de ce dièdre ont pour traces, sur un plan central perpendiculaire à l'arête, deux diamètres rectangulaires égaux d'une surface de niveau quelconque.

Avec ce choix d'axes, la condition de réalité des trois lignes centrales se réduit à l'équation très simple $E^2-\alpha^2>0$.

α est la projection du vecteur de rotation sur la ligne centrale Ox (qui peut toujours être supposée réelle).

La signification mécanique de E est la suivante : Considérons un déplacement égal à l'unité, effectué suivant Oz. Nous avons, à l'extrémité de ce déplacement, $Y=E+\alpha$. De même, pour un déplacement unitaire suivant Oy, il vient $Z=E-\alpha$. Par conséquent E est la moyenne entre la projection, sur l'axe des y, de la force correspondant à un déplacement unitaire suivant l'axe des z, et la projection, sur l'axe des z, de la force correspondant à un déplacement unitaire suivant l'axe des y.

J'arrive enfin à l'étude des circonstances qui accompagnent l'introduction de liaisons. Je me borne au cas où ces liaisons équivalent à la matérialisation d'une ligne ou d'une surface parfaitement polie passant par la position d'équilibre.

Considérons d'abord une ligne, et admettons que, dans le voisinage du point d'équilibre, cette ligne, si elle n'est pas droite, puisse être confondue avec sa tangente. Dans ces conditions, la force tourbillonnaire agit normalement au seul déplacement possible; elle est donc sans influence sur la loi du mouvement. Reste la force potentielle. Si les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes, l'équilibre produit par cette seule force, en l'absence de toute liaison, est un équilibre stable. La stabilité subsiste quand on introduit la liaison. Mais si les surfaces de niveau sont des hyperboloïdes, l'équilibre *potentiel*, en l'absence de toute liaison, est évidemment instable. En neutralisant l'action de la force tourbillonnaire par la matérialisation d'une trajectoire, on ne pourra obtenir un équilibre stable sur cette trajectoire que si la force potentielle a une composante attractive relativement à la tangente à cette trajectoire. Cela exige que la tangente soit, par rapport au cône asymptote, du même côté que la direction correspondant au plus grand coefficient attractif A. Donc :

L'introduction d'une liaison obligeant le point matériel à décrire, à partir de sa position d'équilibre stable, une trajectoire déterminée, ne laisse subsister la stabilité que si les surfaces de niveau de la force potentielle sont des ellipsoïdes ou bien si, les surfaces de niveau étant des hyperboloïdes, la tangente à la trajectoire et la direction de la plus grande attraction potentielle sont d'un même côté par rapport au cône asymptote.

Considérons maintenant la fixation d'une surface, et, dans le voisinage de la position d'équilibre, confondons cette surface avec son plan tangent P. Prenons dans ce plan deux axes rectangulaires Ox_1, Oy_1, dont les cosinus directeurs, par rapport aux axes principaux, soient respectivement a, b, c et a', b', c'.

Soient a'', b'', c'' les cosinus directeurs de la normale Oz, au plan P. Si un point M du plan P a pour coordonnées x_1, y_1, ses coordonnées, par rapport aux axes primitifs, sont

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + a'y_1, \\ y &= bx_1 + b'y_1, \\ z &= cx_1 + c'y_1. \end{aligned}$$

Soient X_1, Y_1 les projections, sur Ox_1 et Oy_1, de la force agissant en M. On a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= aX + bY + cZ, \\ Y_1 &= a'X + b'Y + c'Z, \end{aligned} \right.$$

mais

$$X = -Ax + \gamma y - \beta z = (-Aa + \gamma b - \beta c)x_1 + (-Aa' + \gamma b' - \beta c')y_1,$$
$$Y = \ldots,$$
$$Z = \ldots.$$

En substituant dans les formules (8) et utilisant les identités connues $a = b'c'' - b''c'$, etc., on trouve

$$X_1 = -(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)x_1 - (Aaa' + Bbb' + Ccc' - \alpha a'' - \beta b'' - \gamma c'')y_1,$$
$$Y_1 = -(Aaa' + Bbb' + Ccc' + \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'')x_1 - (Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2)y_1.$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} &Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = p, \\ &Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 = q \qquad \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \omega, \\ &Aaa' + Bbb' + Ccc' = r. \end{aligned}$$

En raisonnant comme pour le cas du point entièrement libre, on verra que les conditions de stabilité de l'équilibre dans le plan s'obtiennent en écrivant que l'équation en u

$$\begin{vmatrix} u - p & \omega - r \\ -\omega - r & u - q \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines réelles et positives.

Cette équation, développée, devient

$$u^2 - (p + q)u + pq - r^2 + \omega^2 = 0.$$

De là, les trois conditions

$$p + q > 0, \qquad pq - r^2 + \omega^2 > 0, \qquad (p - q)^2 + 4r^2 - 4\omega^2 > 0.$$

Je dis qu'on peut toujours choisir le plan P de telle manière que la troisième inégalité n'ait pas lieu. Il suffit, pour cela, de poser

$$p - q = 0, \qquad r = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 &= Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2, \\ Aaa' + Bbb' + Ccc' &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations expriment que la surface de niveau $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}$ intercepte sur les axes rectangulaires

Ox_1, Oy_1 des longueurs égales et que, de plus, le plan diamétral conjugué de la direction Ox_1 contient Oy_1.

C'est ce qui arrive quand le plan P est un plan cyclique de la surface de niveau ; il faut seulement que ω ne soit pas nul, c'est-à-dire que l'axe du tourbillon n'appartienne pas au plan cyclique. Donc :

L'équilibre du point matériel libre étant supposé stable, l'introduction d'une liaison équivalant à la matérialisation d'un plan cyclique des surfaces de niveau suffit pour rendre l'équilibre instable à moins toutefois que le tourbillon ne soit contenu dans ce plan cyclique.

Il est clair que l'instabilité persiste pour des plans inclinés sur le plan cyclique considéré tant que la quantité $(p-q)^2+4r^2$ n'atteint pas la limite inférieure $4\omega^2$.