BULLETIN DE LA S. M. F.

S. ZAREMBA

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 70-77

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__70_1>

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES $\Delta u + \xi u + f = 0$;

Par M. S. Zaremba.

1. Soient (S) une surface fermée limitant un domaine (D), f une fonction donnée des coordonnées x, y, z, admettant des dérivées premières dans le domaine (D), ξ une constante réelle ou imaginaire et u une fonction satisfaisant, à l'intérieur du domaine (D), à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u + f = 0 \tag{1}$$

et prenant la valeur zéro sur la surface (S).

M. Poincaré a montré, dans son beau Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1894) que la fonction u existera et sera déterminée sans ambiguïté quelle que soit la valeur attribuée à la constante ξ, exception faite de certaines valeurs réelles et positives formant une suite infinie. Cela posé, je me propose de faire connaître une forme nouvelle de l'intégrale u, valable entre autres pour toutes les valeurs de la constante ξ dont le module est assez grand, l'argument étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$. Je suppose que la surface (S) admet un plan tangent déterminé en chacun de ses points et que le domaine (D) est simplement connexe.

2. Désignons par μ celle des déterminations de l'expression $\sqrt{-\xi}$, dont la partie réelle est positive; soient r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et $d\tau$ l'élément de volume du domaine (D) se rapportant au point (x', y', z').

Posons

$$v_1 = \frac{1}{4\pi}\int_D f(x', y', z')\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau, \tag{2}$$

où l'indice D indique que l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D).

Soit v_2 la fonction satisfaisant à l'intérieur du domaine (D) à l'équation de Laplace $\Delta v_2 = 0$ et vérifiant, *sur la surface* (S), l'équation

$$v_1 + v_2 = 0.$$

Posons en général

$$v_{2n+1} = -\frac{\mu^2}{4\pi}\int_D v_{2n}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau = \frac{\xi}{4\pi}\int_D v_{2n}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau \tag{3}$$

et désignons par v_{2n+2} la fonction qui, à l'intérieur du domaine (D), vérifie l'équation de Laplace $\Delta v_{2n+2} = 0$ et qui prend, sur la surface (S), les valeurs déterminées par l'équation $v_{2n+1} + v_{2n+2} = 0$.

Je dis que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i + \ldots \tag{4}$$

est convergente et qu'elle représente la fonction u dans le cas, entre autres, où le module de ξ est assez grand, l'argument étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$.

3. Considérons un point quelconque O situé sur la surface (S), désignons par v_i^0 la valeur au point O de la fonction v_i et soit r_0 la distance d'un élément $d\tau$ du domaine (D) au point O. L'équation (3) nous donnera

$$v_{2n+1}^0 = -\frac{\mu^2}{4\pi}\int_D v_{2n}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,d\tau. \tag{5}$$

On déduit de l'équation précédente, en tenant compte de la relation

$$\Delta\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} - \mu^2\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} = 0,$$

$$v_{2n+1}^0 = -\frac{1}{4\pi}\int_D v_{2n}\,\Delta\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,d\tau. \tag{6}$$

Décrivons du point O comme centre une sphère (Σ) de rayon ε et désignons par (D′) la partie du domaine (D) qui est extérieure à la sphère (Σ). Cela posé, j'observe que l'intégrale qui se présente au second membre de l'équation (6) peut se décomposer en deux autres dont l'une se rapportera au domaine (D′). Appliquons à cette intégrale le théorème de Green et passons aux limites en faisant tendre ε vers zéro, il viendra

$$v_{2n+1}^0 = \frac{1}{4\pi}\int_S\left(v_{2n}\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} - \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\frac{dv_{2n}}{dN}\right)ds - \frac{1}{2}v_{2n}^0,$$

où ds désigne un élément de la surface (S) et r_0 la distance de cet élément au point O. On en conclut, eu égard à la définition de la fonction v_{2n+2}, que

$$v_{2n+2}^0 = \frac{1}{2}v_{2n}^0 - \frac{1}{4\pi}\int_S\left(v_{2n}\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} - \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\frac{dv_{2n}}{dN}\right)ds. \tag{7}$$

Proposons-nous maintenant d'éliminer du second membre de l'équation précédente la quantité $\frac{dv_{2n}}{dN}$.

Élevons à cet effet la normale à la surface (S) au point O et prenons sur elle, à l'extérieur de la surface, un point P à une distance γ du point O. Soit r' la distance de l'élément ds au point P; on aura

$$(8) \qquad \lim\left(\int_S \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \frac{dv_{2n}}{dN} ds\right)_{\gamma=0} = \int_S \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} \frac{dv_{2n}}{dN} ds.$$

Désignons par w la fonction qui satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur de la surface (S) et qui prend, sur cette surface, des valeurs égales aux valeurs de la fonction $\frac{e^{-\mu r'}}{r'}$.

Le théorème de Green donnera

$$(9) \qquad \int_S \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \frac{dv_{2n}}{dN} ds = \int_S v_{2n} \frac{dw}{dN} ds.$$

Calculons la fonction w. Désignons à cet effet par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'élément de volume $d\tau$; r_1 la distance de cet élément au point P et $G(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ la fonction de Green relative à la surface (S) et aux points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1).

On s'assurera aisément que l'on a

$$(10) \qquad w = \frac{e^{-\mu r}}{r} + \varpi'$$

en désignant par r la distance du point (x, y, z) au point P et en posant

$$(11) \qquad \varpi' = \frac{\mu^2}{4\pi} \int_D G(x, y, z, x_1, y_1, z_1) \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} d\tau.$$

Désignons par ϖ la limite de la fonction ϖ' lorsque γ tend vers zéro; on déduira des équations (10), (9), (8) et (7) la conséquence suivante :

$$(12) \qquad v^0_{2n+2} = \frac{1}{4\pi} \int_S v_{2n} \frac{d\varpi}{dN} ds.$$

4. Nous avons

$$\int \frac{du}{dN} ds = 0;$$

par conséquent, à cause de l'équation (10),

$$\int_S \frac{d\varpi}{dN} ds = -\int_S \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} ds.$$

Cette équation nous donne, en faisant tendre γ vers zéro et en désignant, comme plus haut, par r_0 la distance de l'élément ds au point O.

$$(13) \qquad \int_S \frac{d\varpi}{dN} ds = 2\pi - \int_S \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} ds.$$

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_S \left| \frac{d\varpi}{dN} \right| ds,$$

et observons à cet effet que l'équation (11) nous donne

$$(14) \qquad \varpi = \frac{\mu^2}{4\pi} \int_D G(x, y, z, x_1, y_1, z_1) \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} d\tau.$$

Désignons par α et β les parties réelle et imaginaire de μ, nous aurons $\mu = \alpha + \beta i$. Soit ϖ_1 la fonction à laquelle se réduit la fonction ϖ dans le cas où $\beta = 0$. Il résulte de l'équation (11) et de l'inégalité bien connue

$$(15) \qquad \frac{dG}{dN} \geqq 0$$

que l'on doit avoir

$$\frac{d\varpi_1}{dN} \geqq 0.$$

L'équation (13) nous donnera par conséquent

$$(16) \qquad \int \left| \frac{d\varpi_1}{dN} \right| ds = 2\pi - \int_S \frac{d}{dN} \frac{e^{-\alpha r_0}}{r_0} ds.$$

Soit m le module de μ; il résulte de l'équation (14) et de l'inégalité (15) que l'on aura

$$\left| \frac{d\varpi}{dN} \right| < \frac{m^2}{\alpha^2} \frac{d\varpi_1}{dN}.$$

Il viendra par conséquent, en tenant compte de l'équation (16),

$$(17) \qquad \int \left| \frac{d\varpi}{dN} \right| ds < \frac{m^2}{\alpha^2} \left(2\pi - \int_S \frac{d}{dN} \frac{e^{-\alpha r_0}}{r_0} ds \right).$$

5. L'intégrale

$$\int_S \frac{d}{dN} \frac{e^{-\alpha r_0}}{r_0} ds$$

donne lieu aux remarques suivantes :

1° Elle est positive lorsque la surface (S) est convexe;

2° La limite supérieure des valeurs absolues de cette intégrale, pour les diverses positions du point O sur la surface (S), tend vers zéro lorsque α croît indéfiniment;

3° L'intégrale qui nous occupe tend vers 2π lorsque α tend vers zéro.

Désignons par δ_i la limite supérieure du module de la fonction v_i; il résulte de l'équation (12), de l'inégalité (17), des remarques qui viennent d'être faites et de ce que le module d'une fonction vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieur d'une surface (S) ne peut avoir ni un maximum, ni un minimum à l'intérieur de la surface, qu'il existera une constante positive θ, plus petite que l'unité, telle que l'on ait

$$\delta_{2n+2} < \theta \delta_{2n}, \tag{18}$$

pourvu que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1° L'argument de ξ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$, la surface (S) étant convexe;

2° La surface (S) étant quelconque et l'argument de ξ étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$, le module est suffisamment grand;

3° La surface (S) étant quelconque, l'argument de ξ ne se réduit pas à un multiple de 2π, le module étant suffisamment petit.

Il reste à montrer que, dans chacun des trois cas précédents, la série (4) est convergente et que la somme de cette série représente bien l'intégrale demandée de l'équation (1).

Il résulte de l'inégalité (18) et de la définition des fonctions v_1, v_2, ... que l'on pourra trouver un nombre positif A tel que l'on ait

$$\begin{cases} |v_{2n-1}| < A\theta^{n-1} \\ |v_{2n}| < A\theta^{n-1} \end{cases} \tag{19}$$

pour toutes les valeurs entières et positives du nombre n. Cela prouve que la série (1) est absolument et uniformément convergente. Il est évident d'ailleurs que la somme u de cette série est nulle en chaque point de la surface (S). Nous n'avons plus qu'à établir que la fonction u satisfait à l'équation (1).

On a

$$(20)\quad \begin{cases} \Delta v_1 - \mu^2 v_1 + f = 0, \\ \Delta v_2 = 0, \\ \Delta v_3 - \mu^2 v_3 - \mu_2^2 v_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta v_{2n+1} - \mu^2 v_{2n+1} - \mu^2 v_{2n} = 0, \\ \Delta v_{2n+2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On en déduit, en se rappelant que la somme $v_{2n+1} + v_{2n+2}$ est nulle en chaque point de la surface (S),

$$(21)\quad \begin{cases} v_1 + v_2 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_D (f - \mu^2 v_1)\,G\,d\tau, \\ v_{2n+1} + v_{2n+2} = -\dfrac{\mu^2}{4\pi}\displaystyle\int_D (v_{2n+1} + v_{2n})\,G\,d\tau \qquad (n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

où G représente la fonction de Green relative au domaine D. Par conséquent, la fonction u, somme de la série (4), satisfera à la relation

$$(22)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_D (f - \mu^2 u)\,G\,d\tau.$$

Or la fonction f admet, par hypothèse, des dérivées premières; si donc nous prouvons que la fonction u admet des dérivées premières, nous pourrons affirmer qu'elle admet aussi des dérivées secondes et qu'elle satisfait à l'équation (1).

Convenons de représenter par le symbole $D\varphi$ la dérivée d'une fonction φ par rapport à l'une quelconque des variables x, y, z. Il existera, comme on sait, une constante positive N telle que l'on ait

$$\int_D |\,DG(x, y, z, x', y', z')\,|\,dx'\,dy'\,dz'\,| < N,$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) à l'intérieur de la surface (S). On conclut de là, en tenant compte des équations

(3) et (21) et des inégalités (19), qu'il existera un nombre positif B tel que l'on ait

$$|Dv_{2n-1}| < B\theta^{n-1},$$
$$|Dv_{2n}\ \ | < B\theta^{n-1}.$$

Cela prouve que la série $\Sigma_i Dv_i$ sera convergente. Par conséquent la fonction u admettra bien des dérivées premières. Il faudra donc, conformément à la remarque faite plus haut, qu'elle admette aussi des dérivées secondes et qu'elle satisfasse à l'équation (1). La proposition que nous avions en vue est donc démontrée.

Observons en terminant que la forme sous laquelle nous avons obtenu l'intégrale u de l'équation (1) paraît devoir être de quelque utilité dans l'étude des propriétés de cette intégrale. Ainsi, par exemple, elle permet d'établir très aisément le théorème suivant, démontré par M. Poincaré dans le Mémoire cité au n° 1 :

Lorsque le module de ξ croît indéfiniment, l'argument conservant une valeur fixe comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\,\frac{\pi}{2}$, l'intégrale u a pour valeur asymptotique l'expression $-\frac{f}{\xi}$.