H. Duport

Actions mutuelles de deux atomes

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 185-188
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__185_0>

ACTIONS MUTUELLES DE DEUX ATOMES (¹);

Par M. H. Duport.

1. Soient $oxyz$ des axes de coordonnées rectangulaires fixes; C le centre de gravité du premier atome; a, b, c les coordonnées du point C; CP la vitesse de rotation de l'atome; p, q, r les projections de CP; m la masse de l'atome; mk^2 la valeur commune des moments d'inertie relatifs à son centre de gravité; ρ sa densité.

Soient de même : C′ le centre de gravité du second atome; a', b', c' les coordonnées du point C′; C′P′ la vitesse de rotation du second atome; p', q', r' les projections de C′P′; m' la masse du second atome; $m'k'^2$ la valeur commune des moments d'inertie relatifs à son centre de gravité; ρ sa densité.

Soient A un point de l'atome C; dv son petit volume; A′ un point de C′; dv' son petit volume; x, y, z les coordonnées de A; x', y', z' celles de A′. L'action sur un point A′ de C′ se compose de l'action de l'atome C′ sur le point A′ et de l'action de l'atome C sur le point A′. D'après ce qu'on a vu, l'action de l'atome C′ sur le point A′ se compose du segment $\omega'^2(A'Q')\rho' dv'$, Q′ étant le pied de la perpendiculaire abaïssée de A′ sur C′P′, ω' la vitesse de rotation C′P′.

Soient f', φ', ψ' les projections de l'action du point A sur le point A′ au facteur près $\rho\rho' dv dv'$. On aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2a'}{dt^2}+\frac{dq'}{dt}(z'-c')-\frac{dr'}{dt}(y'-b')=\iiint \rho f'\,dv,\\
&\frac{d^2b'}{dt^2}+\frac{dr'}{dt}(x'-a')-\frac{dp'}{dt}(z'-c')=\iiint \rho \varphi'\,dv,\\
&\frac{d^2c'}{dt^2}+\frac{dp'}{dt}(y'-b')-\frac{dq'}{dt}(x'-a')=\iiint \rho \psi'\,dv,
\end{aligned}\right.$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur du premier atome.

(¹) Voir *Bulletin de la Société mathématique de France,* Tome XXIV, pages 102, 197.

Soient de même f, φ, ψ les projections de l'action du point A′ sur le point A au facteur près $\rho\rho' dv\, dv'$. On aura les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{dq}{dt}(z-c) - \frac{dr}{dt}(y-b) &= \iiint \rho' f\, dv', \\ \frac{d^2 b}{dt^2} + \frac{dr}{dt}(x-a) - \frac{dp}{dt}(z-c) &= \iiint \rho' \varphi\, dv', \\ \frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(y-b) - \frac{dq}{dt}(x-a) &= \iiint \rho' \psi\, dv', \end{aligned}\right.$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur du second atome. D'un autre côté l'action de l'atome C sur l'atome C′ se compose finalement d'une force appliquée au point C′ et d'un couple. Je désignerai les projections de la force par U′, V′, W′ et les projections du moment du couple par P′, Q′, R′. On aura les équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &m' \frac{d^2 a'}{dt^2} = U', &\quad &m' \frac{d^2 b'}{dt^2} = V', &\quad &m' \frac{d^2 c'}{dt^2} = W', \\ &m' k'^2 \frac{dp'}{dt} = P', & &m' k'^2 \frac{dq'}{dt} = Q', & &m' k'^2 \frac{dr'}{dt} = R'. \end{aligned}\right.$$

De même l'action de l'atome C′ sur l'atome C se compose finalement d'une force appliquée au point C et d'un couple. Je désignerai les projections de la force par U, V, W et les projections du moment du couple par P, Q, R. On aura les équations suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &m \frac{d^2 a}{dt^2} = U, &\quad &m \frac{d^2 b}{dt^2} = V, &\quad &m \frac{d^2 c}{dt^2} = W, \\ &m k^2 \frac{dp}{dt} = P, & &m k^2 \frac{dq}{dt} = Q, & &m k^2 \frac{dr}{dt} = R. \end{aligned}\right.$$

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les deux systèmes de forces précédents doivent se faire équilibre sur le système des deux atomes supposé solidifié à chaque instant. On aura donc les équations

$$U + U' = 0, \qquad V + V' = 0, \qquad W + W' = 0,$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} P + P' + bW - cV + b'W' - c'V' &= 0, \\ Q + Q' + cU - aW + c'U' - a'W' &= 0, \\ R + R' + aV - bU + a'V' - b'U' &= 0, \end{aligned}\right.$$

2. Les quantités U, V, W, U', V', W', P, Q, R, P', Q', R' doivent être considérées dans le cas le plus général comme les projections de quatre segments dépendant géométriquement de la position relative des atomes, des vitesses des points C et C' et des vitesses de rotation CP, C'P' et il est tout d'abord à remarquer que l'on peut toujours satisfaire aux équations (1) et (2) en prenant pour f, φ, ψ, f', φ', ψ' des expressions du premier degré convenables en x, y, z, x', y', z' et même de façon que l'action de A' sur A soit égale et contraire à celle de A sur A' sans supposer qu'elles sont dirigées suivant les droites AA' ou A'A.

L'action d'un atome sur un autre peut donc toujours avoir lieu point à point. Voilà une première difficulté écartée. Existe-t-il maintenant des hypothèses que l'on pourrait faire sur f, φ, ψ, f', φ', ψ' permettant de préciser la forme des atomes et leurs actions mutuelles. Ma conclusion est qu'il n'y en a pas et que dès lors on est porté à considérer l'atome comme sphérique, point que faisait déjà prévoir l'égalité des moments d'inertie relatifs au centre de gravité de l'atome.

J'ai examiné les trois hypothèses suivantes :

1° Les segments f, φ, ψ, f', φ', ψ' dépendent seulement des segments représentant la distance des points A, A' et leurs vitesses.

2° Les segments f, φ, ψ, f', φ', ψ' dépendent seulement des segments représentant la distance des points A, A' et les vitesses de rotation des deux atomes.

3° Les segments f, φ, ψ, f', φ', ψ' ont pour ligne d'action commune AA' et sont égaux et contraires.

On démontre assez aisément que les deux premières hypothèses sont inadmissibles. La troisième offre de grandes difficultés; mais il n'est pas besoin de l'élucider complètement pour voir qu'on n'en pourra rien tirer de forcé relativement à la forme des atomes et leurs actions mutuelles. En effet, en me bornant au cas d'atomes semblables, j'ai obtenu les résultats suivants :

Désignons par FD la grandeur commune des segments f, φ, ψ, f', φ', ψ', D désignant la distance CC'. On peut prendre pour F une fonction du premier degré en x, y, z, x', y', z' lorsque les segments U, V, W, U', V', W' ont pour ligne d'action CC'; on peut toujours satisfaire aux conditions imposées en prenant pour F une fonction du second degré en x, y, z, x', y', z' lorsque l'atome présente trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux, en particulier dans le cas de l'atome sphérique.

3. D'après les résultats que je viens de résumer, je me suis alors borné au cas d'atomes sphériques. J'ai considéré le cas où les segments U, V, W, U', V', W', P, Q, R, P', Q', R' dépendent géométriquement des segments CC', CP, C'P' et dérivent d'une seule fonction de la manière suivante :

Posons

$$\begin{aligned}
(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2 &= D^2 & p\,(a'-a)+q\,(b'-b)+r\,(c'-c) &= v_1,\\
p^2+q^2+r^2 &= \omega^2 & p'(a'-a)+q'(b'-b)+r'(c'-c) &= v_2,\\
p'^2+q'^2+r'^2 &= \omega'^2 & pp'+qq'+rr' &= v_3
\end{aligned}$$

et soit

$$F(D^2, \omega^2, \omega'^2, v_1, v_2, v_3)$$

une fonction de ces quantités. J'ai posé

$$U=\frac{dF}{da},\quad V=\frac{dF}{db},\quad W=\frac{dF}{dc},\quad U'=\frac{dF}{da'},\quad V'=\frac{dF}{db'},\quad W'=\frac{dF}{dc'},$$
$$P=\frac{dF}{dp},\quad Q=\frac{dF}{dq},\quad R=\frac{dF}{dr},\quad P'=\frac{dF}{dp'},\quad Q'=\frac{dF}{dq'},\quad R'=\frac{dF}{dr'}.$$

La fonction F doit alors satisfaire, à cause des équations (5), à six équations aux dérivées partielles. Ces équations sont satisfaites en prenant pour F une fonction de D et de h, h étant la vitesse de rotation d'un atome relativement à l'autre, soit

$$h=+\sqrt{(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2}.$$

Les équations (3) et (4) prennent alors des formes assez simples.

Les résultats contenus dans la Note présentée à la Société mathématique de France le 16 décembre 1896 (*Bulletin,* t. XXIV, p. 197) ont fait l'objet d'un Mémoire qui a paru dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur* (1897, fasc. 1).