BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur l'engrenage à fuseaux

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 140-146

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__140_1>

SUR L'ENGRENAGE A FUSEAUX;

Par M. L. Lecornu.

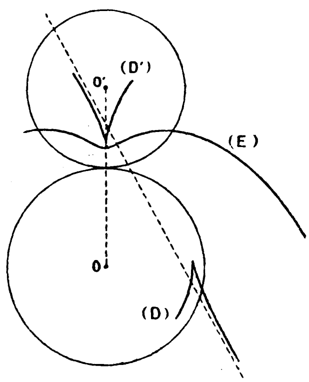
L'engrenage plan intérieur à fuseaux est obtenu, comme l'on sait, en prenant pour profils des dents de l'une des roues, appelée *lanterne*, des circonférences complètes ayant leurs centres sur la circonférence primitive. Ces dents sont les *fuseaux*. Le profil d'une dent de la seconde roue, qui prend le nom de *rouet*, est une courbe parallèle à l'épicycloïde décrite par le centre d'un fuseau dans le roulement de la lanterne sur le rouet. Ce genre d'engrenages présente des avantages assez sérieux : les dents circulaires sont très faciles à dessiner et à tailler avec précision; quand l'une d'elles est usée, elle se remplace aisément; en outre, on peut rendre les fuseaux mobiles autour de leurs axes, comme les rouleaux des chaînes de vélocipèdes, et diminuer ainsi, dans une large mesure, le travail du frottement. Néanmoins les engrenages à fuseaux ne se rencontrent guère que dans l'horlogerie et dans la meunerie. Leur principal défaut vient de ce que le contact des dents a lieu *presque* exclusivement d'un seul côté de la ligne des centres, et cela parce que la courbe parallèle à l'épicycloïde présente un point de rebroussement qui, étant tout à fait inadmissible dans le tracé d'une dent d'engrenage, limite la partie utilisable.

Avant d'aller plus loin, je dois relever une inadvertance commise dans le *Traité de Mécanique générale* de Resal. Au Chapitre II du Tome III, l'auteur étudie l'enveloppe d'une circonférence (C) ayant son centre sur le périmètre d'une circonférence (S) qui roule extérieurement sur une circonférence (S′), et il dit que cette enveloppe se compose de deux courbes parallèles à l'épicycloïde décrite par le centre de (C), puis il ajoute que chacune de ces courbes présente un point de rebroussement sur la circonférence (S); il indique même, avec figure à l'appui, le moyen de construire ces points de rebroussement. Or, la vérité est que les points de rebroussement se trouvent non pas sur la circonférence (S′), mais bien sur la développée de l'épicycloïde. Cette développée, qui est elle-même une épicycloïde, touche (S′) en un point et pénètre ensuite à l'intérieur de (S′). Un peu plus loin, M. Resal affirme que le contact des dents de l'engrenage à fuseaux a lieu exclusivement après ou avant la ligne des centres suivant que le rouet conduit ou est conduit. Cette assertion ne serait exacte que si les points de rebroussement du profil des dents se trouvaient sur la circonférence primitive du rouet; mais, en réalité, comme nous venons de le dire, ils sont à l'intérieur, et le petit arc compris entre la circonférence primitive et la développée permet de faire que le contact des dents commence un peu avant la ligne des centres ou finisse un peu après, suivant que le rouet conduit ou est conduit. Phillips, dans son Cours de Mécanique à l'École Polytechnique, énonçait correctement cette propriété de l'engrenage à fuseaux.

Un ingénieur américain, M. George Grant, qui s'est particulièrement occupé de la question des engrenages, a indiqué en 1889, dans l'*American machinist*, un moyen de modifier l'engrenage à fuseaux de manière à supprimer le rebroussement du profil théorique. Ce moyen consiste à placer le centre du fuseau, non plus sur le contour de la circonférence primitive, mais à l'intérieur et à une distance convenable de cette circonférence. Pour éviter la trop grande obliquité des contacts, la distance doit être prise aussi petite que possible. M. Grant déclare que la détermination mathématique de la distance limite est très difficile, excepté dans le cas particulier où les fuseaux engrènent avec une crémaillère. Pour une crémaillère, la distance x du centre du fuseau à la circonférence primitive de la lanterne doit, d'après lui, être supérieure à $\frac{2}{27}\frac{d^2}{D}$, d étant le diamètre du fuseau et D celui de la circonférence primitive. Pour les autres cas, il conseille de procéder par tâtonnement en faisant croître x peu à peu et recherchant graphiquement dans quelle position le rebroussement cesse d'exister. Je me propose de faire connaître ici l'expression générale de la limite inférieure de x.

Avec la modification recommandée par M. Grant, le lieu du centre d'un fuseau, dans le roulement relatif de la lanterne sur le rouet, est une épicycloïde raccourcie (E) (*fig.* 1) ayant un axe de symétrie et présentant sur cet axe un sommet dont la concavité est tournée vers l'extérieur du rouet. Considérons seulement la partie à droite de l'axe. A mesure que le point décrivant s'écarte de l'axe,

Fig. 1.

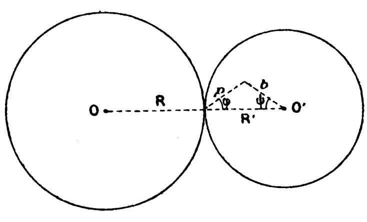


la courbure de sa trajectoire diminue jusqu'à devenir nulle. On a alors un point d'inflexion. Puis la courbure change de sens et, à partir de là, elle se trouve, comme celle de l'épicycloïde proprement dite, tournée vers le centre du rouet. Le rayon de courbure, infini au point d'inflexion, diminue pendant quelque temps, atteint un minimum correspondant à un second sommet, puis de-vient croissant. D'après cela, la développée de l'épicycloïde raccourcie, pour la partie que nous venons de considérer, présente deux branches infinies (D), (D′) ayant pour asymptote commune la normale au point d'inflexion de l'épicycloïde. Si, comme nous le supposons, celle-ci n'est que légèrement raccourcie, le point d'inflexion et le second sommet se trouvent très rapprochés du sommet situé sur l'axe de symétrie. A chaque sommet de l'épicycloïde correspond un point de rebroussement de la développée.

L'enveloppe du fuseau se compose de deux courbes parallèles à l'épicycloïde. L'une d'elles seulement, la plus rapprochée du centre du rouet, est utilisée pour le profil d'engrenage. Elle a même développée que l'épicycloïde et présente un point de rebroussement chaque fois qu'elle rencontre cette développée. La rencontre ne peut avoir lieu qu'avec la branche de développée correspondant à l'arc d'épicycloïde situé au delà du point d'inflexion. Pour que cette rencontre ne se produise pas, il faut et il suffit que le rayon r du fuseau soit inférieur au rayon de courbure correspondant au second sommet de l'épicycloïde.

Soient R le rayon du rouet, R′ celui de la lanterne. Posons, pour abréger, $\frac{1}{a} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$. Si l'on appelle p (*fig.* 2) la longueur de la normale en un point de l'épicycloïde, limitée à sa rencontre

Fig. 2.



avec la circonférence du rouet, et si cette normale coupe sous un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ la circonférence du rouet, le rayon de courbure ρ est donné par la formule de Savary :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho - p} = \frac{1}{a \cos \varphi}.$$

Soit b la distance du point décrivant au centre de la lanterne. On a

$$b^2 = R'^2 + p^2 - 2pR'\cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho - p} = \frac{\rho}{p(\rho - p)} = \frac{2pR'}{a(p^2 + R'^2 - b^2)}.$$

En posant $k^2 = R'^2 - b^2$, on tire de là

$$\rho = \frac{2p^3 R'}{(2R' - a)p^2 - ak^2}.$$

Mais $a = \frac{RR'}{R + R'}$. Donc

$$\rho = \frac{2p^3(R + R')}{p^2(R + 2R') - k^2 R}.$$

En annulant la dérivée de ρ par rapport à p, on obtient l'équation

$$3p^2[p^2(R + 2R') - k^2 R) = 2p^4(R + 2R'),$$

d'où

$$p^2 = \frac{3k^2 R}{R + 2R'}.$$

La valeur correspondante de ρ^2 est

$$\rho^2 = 27\frac{R(R + R')^2(R'^2 - b^2)}{(R + 2R')^3}.$$

Cette formule, à laquelle m'a conduit également l'emploi des coordonnées cartésiennes, fait connaître le rayon de courbure au sommet non situé sur l'axe de symétrie. Le calcul précédent ne fait pas apparaître le rayon de courbure au sommet situé sur l'axe parce que, pour ce sommet, dp s'annule en même temps que $d\rho$.

Posons maintenant, avec M. Grant, $x = R' - b$, et il vient

$$\rho^2 = 27\frac{R(R + R')^2(2R'x - x^2)}{(R + 2R')^3}.$$

Le rayon r du fuseau doit être inférieur à la valeur de ρ donnée par cette expression : telle est la solution exacte du problème. Comme en pratique x est très petit vis-à-vis de R', on peut négliger x^2 en présence de $2R'x$ et écrire

$$r^2 < 54\frac{RR'(R+R')^2x}{(R+2R')^3}.$$

Dans le cas particulier de la crémaillère, R est infini, et l'inégalité précédente se réduit à

$$r^2 < 54R'x.$$

Si l'on appelle d le diamètre $2r$ du fuseau et D le diamètre $2R'$ de la roue engrenant avec la crémaillère, on peut écrire

$$x > \frac{d^2}{108D}.$$

La formule de M. Grant : $x > \frac{2}{27}\frac{d^2}{D}$ est donc inexacte; elle donne pour x une limite inférieure qui est huit fois trop faible. J'ai vérifié graphiquement cette conclusion.

En désignant par n le rapport $\frac{R'}{R}$, on peut écrire

$$x > \frac{(1+2n)^3}{54(1+n)^2}\frac{r^2}{R'}.$$

La valeur limite de x augmente constamment avec n. Le rapport n ne dépasse jamais l'unité, car les fuseaux sont toujours placés sur la petite roue. Pour $n=1$, c'est-à-dire dans le cas extrême de deux roues égales, il faut que x soit supérieur à $\frac{r^2}{8R'}$. Supposons, par exemple, que le rayon d'un fuseau soit environ la dixième partie de la circonférence primitive de la lanterne, alors $\frac{r}{R'} = \frac{1}{10}$, et x doit être pris supérieur à $\frac{1}{800}R'$. On voit que, même dans le cas le plus défavorable, un déplacement presque insensible du centre des fuseaux suffit pour éviter la difficulté due à la présence d'un rebroussement.

Ces considérations seraient sans intérêt pratique si le rayon de courbure minimum appartenait à une partie du profil, inutilisée pour la construction de l'engrenage. Mais on s'assure aisément qu'il n'en est pas ainsi. En effet, si l'on appelle ψ l'angle que forme avec la ligne des centres la droite joignant le centre de la lanterne au point de courbure maxima, à l'instant où ce point est en contact avec le fuseau, on a (*fig.* 2)

$$p^2 = b^2 + R'^2 - 2bR'\cos\psi.$$

On a en outre, comme on l'a vu,

$$p^2 = \frac{3R(R'^2 - b^2)}{R + 2R'}.$$

Remplaçant b par $R' - x$ et négligeant x^2, on tire de ces formules

$$\cos\psi = 1 - \frac{3Rx}{R'(R + 2R')};$$

attribuant à x sa valeur limite $\frac{(R + 2R')^3}{54RR'(R + R')^2}r^2$, il vient

$$\cos\psi = 1 - \frac{1}{18}\frac{(R + 2R')^2}{R'^2(R + R')^2}r^2,$$

d'où, pour le petit angle ψ,

$$\psi = \frac{1}{3}\frac{R + 2R'}{R + R'}\frac{r}{R'}.$$

L'angle ψ est donc toujours mesuré par une fraction comprise entre le tiers et la moitié du rapport $\frac{r}{R'}$ existant entre le rayon du fuseau et le rayon de la lanterne, ce qui permet de conclure à la nécessité de faire disparaître le rebroussement par le procédé que nous venons d'étudier.