Bulletin de la S. M. F.

Carvallo

Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 180-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__180_1>

GÉNÉRALISATION ET EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES RÉSIDUS DE CAUCHY;

Par M. E. Carvallo.

1. Dans la théorie des fonctions analytiques, $f(x)$ est une imaginaire, fonction de l'imaginaire x. Si, avec Cauchy, on représente les imaginaires par des vecteurs allant de l'origine aux divers points d'un plan, les résultats analytiques s'interprètent géométriquement : f est un vecteur; il est fonction du vecteur x ou, plus simplement, du point qui est à l'extrémité de ce vecteur issu de l'origine. On considère l'intégrale de l'expression $\frac{f(x)}{x-a}$ le long d'un contour formé de deux lignes : un cercle σ de rayon infiniment petit, qui a pour centre le point a, puis une ligne s qui renferme le cercle σ. Pour avoir la formule de Cauchy, il suffit de transformer cette intégrale de ligne en une intégrale étendue à l'aire v, qui est comprise entre les lignes σ et s. Telle est la méthode que nous allons étendre à l'espace.

2. La variable indépendante x décrira, non plus un plan, mais l'espace. Pour plus de généralité, $f(x)$ sera une entité quelconque, géométrique ou non, déterminée en chaque point x [1].

---

[1] Par exemple, une des entités considérées par Hamilton ou Grassmann, dans leurs méthodes de calcul géométrique, une masse, un vecteur, un couple, un point, un plan, une force.

Les champs d'intégration seront la surface d'une sphère σ, une surface s qui enveloppe σ, enfin le volume v compris entre les deux surfaces σ et s. Le vecteur $\frac{1}{x-a}$ (qui dérive du potentiel logarithmique) sera remplacé par le vecteur newtonien, représenté par la formule $\frac{\alpha}{r^2}$, où α est le vecteur égal à l'unité et porté du point a vers le point x; r est la distance de ces deux points. Ainsi, nous aurons à intégrer l'expression $\frac{\alpha}{r^2} f(x)$ le long des surfaces σ et s. Pour ces surfaces, considérons les normales ν et ν_1, égales à l'unité et dirigées vers l'intérieur du volume v. L'intégrale de surface envisagée sera

$$\int_\sigma \left[\nu \frac{\alpha}{r^2} f\right] d\sigma + \int_s \left[\nu_1 \frac{\alpha}{r^2} f\right] ds.$$

La signification des symboles ν, $\frac{\alpha}{r^2}$, f a été expliquée. Quant au crochet $\left[v \frac{\alpha}{r^2} f\right]$, c'est une fonction de ces trois symboles; mais sa signification demeure arbitraire et nous pouvons en disposer à notre gré, pourvu, toutefois, que la définition qu'on adoptera permette la transformation que nous avons en vue. Or, d'après un théorème général que j'ai établi antérieurement ([1]), sur la transformation des intégrales doubles en intégrales triples, il suffit que la fonction $\left[\nu \frac{\alpha}{r^2} f\right]$ soit linéaire en ν; elle peut d'ailleurs représenter tel élément qu'on voudra, géométrique ou non. La règle est simple : pour avoir l'élément de l'intégrale triple, il suffit de remplacer, dans l'élément de l'intégrale double, le vecteur ν par le vecteur symbolique d'Hamilton

$$\nabla = \mathrm{I}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{I}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{I}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

La formule de réduction est donc ici

$$(1) \qquad \int_\sigma \left[\nu \cdot \frac{\alpha}{r^2} \cdot f\right] d\sigma + \int_s \left[\nu_1 \cdot \frac{\alpha}{r^2} \cdot f\right] ds + \int_v \left[\nabla \frac{\alpha}{r^2} f\right] dv = 0.$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII; 1890.

Première application de la formule (1). — Cette formule (1), d'une grande généralité, contient des résultats géométriques nombreux; mais, si l'on veut rendre manifeste l'analogie de la formule (1) avec celle de Cauchy, il convient de particulariser la signification du crochet de façon que, sur la sphère σ, $[\nu\alpha f]$ représente f à un facteur numérique près. Or, sur cette sphère, ν coïncide avec α; il suffit donc d'attribuer au crochet une valeur égale à f multiplié par le *produit intérieur* de Grassmann $\alpha|\nu$ [1]

$$[\nu\alpha f] = \alpha\,|\,\nu . f.$$

Le premier terme de la formule (1) devient

$$\int_\sigma \frac{\nu|\nu}{r^2} f(x)\, d\sigma = 4\pi f(a).$$

Le troisième terme se simplifie aussi, car les dérivations de ∇ portant sur $\frac{\alpha}{r^2}$ donnent un terme nul; il ne reste qu'à faire porter les dérivations sur f. La formule (1) ainsi particularisée s'écrit, en remplaçant la normale intérieure ν_1 par la normale extérieure changée de signe $-\nu$,

$$4\pi f(a) = \int_s \frac{\alpha|\nu}{r^2} \cdot f\, ds - \int_v \frac{1}{r^2} \cdot \alpha|\nabla . f\, dv.$$

Dans le second membre, $\frac{\alpha|\nu}{r^2}\, ds$ représente la projection $d\omega$ de l'élément d'aire ds sur la sphère de rayon 1. Pour l'intégrale triple, $\alpha|\nabla f$ est la dérivée de f dans la direction α; c'est $\frac{df}{dr}$. La formule s'écrit donc simplement, dans la notation cartésienne,

$$4\pi f(a) = \int_s f(x)\, d\omega - \int_v \frac{1}{r_2} \frac{df}{dr} dv. \tag{2}$$

Comme celle de Cauchy, la formule (2) établit un lien entre la valeur de f au point a et l'ensemble des valeurs de f dans un domaine qui enveloppe le point a. Elle s'applique à toute grandeur f, fonction du point x, pourvu toutefois que f satisfasse aux condi-

---

[1] C'est le produit $\alpha|\nu = \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3$ des deux vecteurs par le cosinus de leur angle.

tions d'application du théorème relatif à la transformation des intégrales, savoir : *f doit admettre trois dérivées dans tout l'espace intérieur à s.*

Deuxième application de la formule (1). — Dans le cas où f est un vecteur, on peut encore donner au crochet la signification suivante :

$$[\nu\alpha f] = \alpha.\nu|f - \nu.\alpha|f + \alpha|\nu.f,$$

car, ν et α coïncidant le long de la sphère σ, les deux premiers termes du second membre se détruisent et l'intégrale suivant σ donne encore $4\pi f(a)$. Le long de s, la même réduction n'a pas lieu, mais on peut grouper les deux derniers termes. Leur somme se représente, dans la notation de Grassmann, par $|[\alpha.|(\nu f)]$. Dans cette notation, $|(\nu f)$ représente un vecteur perpendiculaire au plan (νf) et mesuré par le même nombre que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs ν et f. Posons

$$\nu|f = 4\pi\mu, \qquad (\nu|f) = 4\pi k;$$

μ est un nombre et k un vecteur. L'élément de l'intégrale suivant la surface s, divisé par 4π, sera

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\nu\alpha f}{r^2}\right] ds = \mu\,\frac{\alpha}{r^2}\,ds + \left|\left[\frac{\alpha}{r^2}\,k\right] ds.\right.$$

Le premier terme représente l'action d'une couche de masse newtonienne de densité superficielle μ sur un point de masse 1 situé en a. Le second représente l'action d'une couche de courant dont la densité superficielle est représentée par le vecteur k (loi de Laplace). Ces transformations s'appliquent à l'intégrale de volume, en remplaçant ν par ∇. On voit, en résumé, qu'un champ quelconque peut être envisagé comme produit par la superposition de deux champs fournis, l'un par une distribution de masses newtoniennes, l'autre par une distribution de masses laplaciennes. C'est le résultat signalé par M. Vaschy et démontré d'une façon élégante par M. Larose, au moyen des quaternions.

Troisième application de la formule (1). — Si l'on cesse de poursuivre l'analogie de la formule (1) avec celle de Cauchy, on peut donner au crochet une signification quelconque. Par exemple, si f

est un vecteur, $[\nu\alpha f]$ peut désigner le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs ν, α et f. Dans cette hypothèse, l'intégrale suivant σ est nulle. La formule (1) se réduit à

$$\int_s \frac{[\alpha\nu f]}{r^2}\,ds + \int_v \frac{[\alpha\nabla f]}{r^2}\,dv = 0, \tag{3}$$

les dérivations de ∇ portant seulement sur f. En particulier, si le vecteur f dérive d'un potentiel, $[\alpha\nabla f]$ est nul et la formule (3) se réduit à

$$\int_s \frac{[\alpha\nu f]}{r^2}\,ds = 0.$$

Cette formule peut être énoncée sous forme de théorème :

Si l'on considère une distribution de vecteur f qui dérive d'un potentiel, puis une couche superficielle s dont la densité est représentée par le vecteur f, enfin l'action de cette couche superficielle, agissant d'après la loi de Laplace sur un point intérieur, le flux de force qui traverse la surface s est nul.

Il ne semble pas utile de multiplier les exemples pour montrer la fécondité de la formule (1). Elle constitue elle-même une application particulière importante, il est vrai, des formules générales que j'ai données pour la réduction des intégrales multiples. Ces formules, d'une application si simple, jouent un rôle fondamental en Physique mathématique, et il y aurait, je pense, intérêt à en répandre l'usage.