

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAROSE

## **Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 24 (1896), p. 177-180

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1896\\_\\_24\\_\\_177\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__177_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. VASCHY  
SUR UNE DISTRIBUTION QUELCONQUE DE VECTEUR;**

Par M. LAROSE.

1. M. Carvalho a donné (*Bull. de la Soc. mathém.*, t. XVIII; 1890) la généralisation suivante de la formule de Green :

Soit un champ  $U$  limité par une surface  $S$ ; soient  $\varphi$  un opérateur linéaire fonction du vecteur qui va de l'origine au point considéré,  $\nu$  l'unité de normale intérieure,  $\nabla$  l'opérateur d'Hamilton; on a l'identité

$$(1) \quad \iint_S \varphi(\nu) d\tau + \iiint_U \varphi(\nabla) dv = 0,$$

les dérivations de  $\nabla$  portant sur les éléments de  $\varphi$ .

On passe donc de l'intégrale double à l'intégrale triple en remplaçant  $\nu$  par  $\nabla$ .

2. Soit  $h$  un vecteur défini en chaque point du champ  $U$ ; si  $\varphi$  est une fonction de  $h$  tel que l'intégrale  $\iint \varphi(\nu) d\sigma$ , prise le long d'une sphère  $\Sigma$ , soit à un facteur numérique près égale à la valeur moyenne du vecteur  $h$  sur la sphère, en appliquant l'identité (1) au volume compris entre  $S$  et  $\Sigma$ , et supposant  $\Sigma$  infiniment petit, on aura

$$(2) \quad 4\pi h + \iint_S \varphi(\nu) d\sigma + \iiint \varphi(\nabla) dv = 0;$$

cette identité sera analogue dans l'espace à l'identité de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus.

3. On est conduit à une expression de l'opérateur  $\varphi$  par les considérations physiques suivantes :

La force exercée sur une masse 1 placée en O par une masse  $m$  située en M est, d'après la loi de Newton, égale à  $-\frac{\alpha m}{r^2}$ ,  $r$  étant la distance OM et  $\alpha$  le vecteur unité de direction OM.

Si en M on a un élément de courant  $m_\nu$  ou masse laplacienne, la force exercée en O sera  $-\mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot m_\nu\right)$ .

La résultante des deux forces sera donc  $-\mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot q\right)$ ,  $q$  désignant un quaternion dont le scalaire est la masse newtonienne, le vecteur la masse laplacienne.

Sur la sphère  $\Sigma$  de centre O, on a  $\alpha = \nu$  ( $\nu$  normale intérieure au volume U); donc

$$-\int \int_{\Sigma} \mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h\right) ds = \int \int_{\Sigma} h \frac{ds}{r^2} = 4\pi h.$$

Nous poserons  $\varphi(\nu) = -\mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h\right)$  et l'identité (2) s'écrira

$$4\pi h = \int \int_S \mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \nu h\right) d\sigma + \int \int \mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \nabla h\right) dv.$$

Les dérivations du  $\nabla$  de l'intégrale triple s'appliquant aux éléments des deux vecteurs  $h$  et  $\frac{\alpha}{r^2}$ ,

$$\mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \nabla h\right) = \mathbf{V}\left(\frac{\alpha}{r^2} \overline{\nabla h}\right) + \mathbf{V}\left(h \overline{\nabla \frac{\alpha}{r^2}}\right);$$

or on a  $\nabla \frac{\alpha}{r^2} = 0$ . Il suffit donc d'appliquer les dérivations de  $\nabla$  au vecteur  $h$ .

Cette identité exprime le théorème signalé par M. Vaschy :

*Le champ d'un vecteur quelconque  $h$  peut être considéré comme produit par la superposition d'un champ de masses newtoniennes et d'un champ de masses laplaciennes réparties dans le volume U et sur la surface limite S du champ.*

La loi de distribution est la suivante :

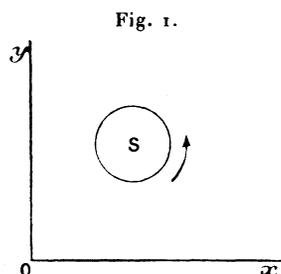
$$\begin{aligned} 4\pi\rho + \mathbf{S}\nabla h &= 0, & 4\pi\mu + \mathbf{V}(\nabla h) &= 0, \\ 4\pi\sigma + \mathbf{S}\nu h &= 0, & 4\pi\tau + \mathbf{V}(\nu h) &= 0. \end{aligned}$$

$\rho, \sigma$  désignant les densités de masses newtoniennes de volume et de surface,  $\mu, \tau$  les densités de masses laplaciennes de volume et de surface.

4. L'identité démontrée ci-dessus peut être considérée comme une généralisation de la formule de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus, mais elle est plus générale dans l'espace que l'identité

$$2i\pi f(a) = \int \frac{f(z) dz}{z - a}$$

ne l'est dans le plan, puisqu'elle renferme une intégrale triple.



La formule de Cauchy résulte immédiatement de l'identité

$$\int_C (X + iY)(dx + i dy) = i \int_S \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (X + iY) dS,$$

$$X + iY = f(z),$$

$$x + iy = z.$$

$X, Y$  sont des fonctions de  $x, y$  réelles, continues et uniformes à l'intérieur de l'aire  $S$  d'intégration.

Les vecteurs représentatifs d'imaginaires considérés par Cauchy sont assujettis à la relation symbolique

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (X + iY) = 0,$$

qui exprime que la dérivée  $f'(z)$  est indépendante de la direction choisie autour du point considéré, et cette relation fait disparaître l'intégrale double.

L'opérateur  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  joue dans le plan le rôle de l'opérateur d'Hamilton dans l'espace.

La généralisation immédiate de la formule de Cauchy serait donc

$$4 \pi h = \iint \nabla \left( \frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h \right) dS,$$

le vecteur  $h$  étant assujetti aux équations différentielles

$$\nabla h = 0.$$

Cette identité symbolique s'interprète géométriquement.

Donnons, par exemple, au vecteur  $h$  la signification du déplacement du point  $(x, y, z)$ .

$\nabla h = 0$  exprimera qu'autour du point considéré il n'y a ni déformation, ni rotation; le mouvement est un simple mouvement de translation.

---