BULLETIN DE LA S. M. F.

D. André

Théorème nouveau de réversibilité algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 136-139

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__136_1

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

THÉORÈME NOUVEAU DE RÉVERSIBILITÉ ALGÉBRIQUE;

Par M. Désiré André.

1. Il a paru récemment, dans l'Intermédiaire des Mathématiciens, sous le n° 811 et avec la signature Buenger, une question intéressante de réversibilité algébrique. En voici l'énoncé textuel:

Si l'on pose

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

les formules

$$\frac{f(x,y,z)}{X} = \frac{f(y,z,x)}{Y} = \frac{f(z,x,y)}{Z}.$$

donnent

$$\frac{f(X, Y, Z)}{x} = \frac{f(Y, Z, X)}{y} = \frac{f(Z, X, Y)}{z}$$

Y a-t-il d'autres exemples analogues?

En cherchant de tels exemples, j'ai obtenu un théorème général

qui en fournit une infinité: celui qu'on vient de lire n'est que le premier, c'est-à-dire le plus simple d'entre eux.

2. Considérons les deux suites, de n nombres chacune,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n.$$

Avec les nombres de la première, formons le rectangle, de n colonnes et de n-1 lignes,

et, avec ceux de la seconde, le rectangle pareil

Prenons les déterminants qui se déduisent du premier de ces rectangles par la suppression de la 1^{re}, de la 2^e, ..., de la n^{ieme} colonne, et, après les avoir affectés alternativement du signe + et du signe -, désignons-les par δ_1 , δ_2 , ..., δ_n ; prenons enfin les déterminants qui se déduisent du second rectangle par le même procédé, et, après les avoir affectés aussi alternativement des signes + et -, désignons-les par Δ_1 , Δ_2 , ..., Δ_n .

Le théorème général qui fait l'objet de la présente Note peut s'énoncer ainsi :

Théorème. - Si l'on a

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \ldots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

on a aussi

$$\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \ldots = \frac{\Delta_n}{x_n};$$

et réciproquement.

- 3. Ce théorème, pour n=3, nous donne, aux notations près, l'exemple cité par M. Buenger. Il nous en donne évidemment une infinité d'autres, d'autant plus compliqués qu'ils correspondent à des valeurs plus grandes de n. C'est un théorème très général. C'est aussi, ce me semble, un théorème nouveau. J'en ai envoyé à l'Intermédiaire, comme réponse à la question 811, l'énoncé tel qu'on vient de le lire, mais sans le faire suivre de la démonstration. C'est cette démonstration que je vais exposer maintenant.
 - 4. Supposons que l'on ait

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots \frac{\delta_n}{X_n},$$

et considérons le déterminant

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_3} & \dots & \mathbf{A_{n-1}} & \mathbf{A_n} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est du $n^{i\text{ème}}$ ordre et qui, par la suppression de sa première ligne, se réduit au premier des rectangles formés précédemment. Il est évident que nous avons

$$M = A_1 \, \delta_1 + A_2 \, \delta_2 + A_3 \, \delta_3 + \ldots + A_{n-1} \, \delta_{n-1} + A_n \, \delta_n.$$

Or, si l'on remplace, dans ce déterminant M, les éléments A de la première ligne par les éléments correspondants d'une quelconque des lignes suivantes, ce déterminant s'annule. De là ces n-1 identités

Ces identités étant homogènes par rapport aux quantités ô, nous pouvons y remplacer ces quantités ô par les quantités X qui leur correspondent et qui, d'après notre hypothèse, leur sont

proportionnelles. Nous avons donc

Mais ces nouvelles identités, grâce à la façon dont nous avons formé notre premier rectangle, constituent un système qui se transforme en lui-même lorsqu'on y remplace à la fois, sans toucher aux indices, les nombres x par les nombres X, et les nombres X par les nombres X, et les nombres X par les nombres X. Par cette opération, en effet, la première de ces identités reproduit la dernière; la deuxième, l'avant-dernière; la troisième, l'anté-pénultième, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire ce système d'identités sous cette nouvelle forme:

$$X_{2} x_{1} + X_{3} x_{2} + X_{4} x_{3} + \ldots + X_{n} x_{n-1} + X_{1} x_{n} = 0,$$

$$X_{3} x_{1} + X_{4} x_{2} + X_{5} x_{3} + \ldots + X_{1} x_{n-1} + X_{2} x_{n} = 0,$$

$$\ldots,$$

$$X_{n} x_{1} + X_{1} x_{2} + X_{2} x_{3} + \ldots + X_{n-2} x_{n-1} + X_{n-1} x_{n} = 0.$$

Ainsi écrites, ces identités peuvent être regardées comme formant un système de n-1 équations linéaires et homogènes, relativement aux n inconnues x_1, x_2, \ldots, x_n . Ces n inconnues sont donc proportionnelles aux déterminants, affectés alternativement des signes + et -, qu'on déduit du rectangle formé par leurs coefficients, en y supprimant la 1^{re} , la 2^e , ..., la n^{ieme} colonne. Or le rectangle de ces coefficients n'est autre chose que le second des rectangles écrits précédemment. Donc les déterminants dont nous parlons, pris avec les signes indiqués, ne sont autres choses que $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Donc finalement

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = \frac{x_2}{\Delta_2} = \ldots = \frac{x_n}{\Delta_n},$$

ce qui démontre notre théorème.

Il est bien évident, d'ailleurs, que la réciproque n'a pas besoin d'ètre démontrée.