BULLETIN DE LA S. M. F.

DUPORT

Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 102-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__102_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LA CONSTITUTION DES ATOMES ET SUR L'ACTION DE LA MATIÈRE SUR LA MATIÈRE;

Par M. Duport.

1. Les atomes étant des parcelles de matière continue peuvent être considérés comme fluides ou comme solides. Je me suis proposé de discuter, dans ce Mémoire, l'hypothèse de la fluidité des atomes.

Les atomes étant considérés comme fluides, leurs différentes parties agissent les unes sur les autres, et il paraît naturel d'admettre que cette action s'effectue point matériel à point matériel, et dès lors l'action d'un point matériel sur un autre ne peut plus dépendre que des positions de ces points et de leurs vitesses.

L'hypothèse de la continuité de la matière, jointe à celle de l'existence de la loi précédente et à certaines considérations de symétrie, fournit alors des équations suffisantes pour déterminer cette loi.

Telle est l'idée séduisante qui a été le point de départ de ces recherches. Malheureusement on n'est conduit, comme on le verra, qu'à des impossibilités. J'ai ainsi été amené à démontrer l'incompatibilité de la fluidité de l'atome et de l'existence d'une loi d'attraction de la matière sur la matière s'effectuant point matériel à point matériel. Cette proposition se laisse assez facilement démontrer, de sorte que la conclusion de ce Mémoire est, ou bien la nécessité de considérer les atomes comme de petits corps solides, ou la nécessité de considérer l'action d'un atome sur un de ses points comme une action d'ensemble.

Je suivrai l'ordre dans lequel les idées se sont succédé dans mon esprit. La recherche de la loi d'attraction, bien qu'étant démontrée plus tard être impossible, conduit à des discussions d'intégrales assez curieuses et à des calculs intéressants. C'est ce qui m'a décidé à conserver ce travail dans sa totalité, au lieu de me borner à la démonstration des conclusions.

2. Considérons donc un atome et soit $\frac{4}{3}\pi R^3$ son volume. Sup-

posons-le seul au monde et donnons-lui la forme limitée par deux sphères concentriques. Soit O le centre de ces deux sphères et soit M un point quelconque de cette portion de matière. Supposons la vitesse initiale de M nulle ou placée sur OM, et sa projection sur OM en grandeur et en signe ne dépendant que de la distance OM, que nous désignerons par r. Il est clair que, par symétrie dans le mouvement qui se produira, la vitesse de M restera placée sur OM, et que sa projection sur OM en grandeur et en signe sera une fonction de r et du temps t. Désignons cette projection par V.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. Soient u, v, w les composantes de la vitesse de M. On aura

$$u = \mathrm{H}x, \qquad v = \mathrm{H}y, \qquad w = \mathrm{H}z,$$

avec

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{V}}{r}.$$

L'équation de continuité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

donne

$$\frac{d\mathrm{H}}{dr} + 3\mathrm{H} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{C}}{r^3},$$

C étant une fonction du temps. On aura donc

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{C}}{r^2};$$

V peut encore s'exprimer par $\frac{dr}{dt}$. On aura donc

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mathrm{C}}{r^2}.$$

Cherchons maintenant l'accélération du point M. Elle sera dirigée suivant le rayon vecteur OM, et y aura pour projection

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\mathrm{C}}{dt}\frac{1}{r^2} - 2\frac{\mathrm{C}}{r^3}\frac{dr}{dt} = \frac{d\mathrm{C}}{dt}\frac{1}{r^2} - \frac{2\mathrm{C}^2}{r^5}.$$

Je vais chercher la loi d'attraction d'un point matériel sur un autre qui donnerait ces résultats.

Si nous nous appuyons sur la proposition générale que le mouvement d'un système matériel est déterminé quand on connaît les positions et les vitesses des points du système à une époque déterminée, nous admettrons que les composantes de la force qui s'exerce entre deux points matériels sont égales aux produits de leurs volumes par des fonctions du temps, des coordonnées des points et des composantes de leurs vitesses, fonctions qui ne peuvent, dès lors, plus dépendre que de la nature simultanée des matières qui composent les deux points matériels. Conformément à la notion du temps, nous admettrons qu'il n'entre pas dans ces fonctions. Si nous nous bornons maintenant au cas où les vitesses initiales des deux points sont nulles, les composantes de la force ne dépendront que des coordonnées des points. Conformément à la notion de l'espace, nous considérerons comme évident que la force ne dépend que de la position relative des deux points. Par suite, elle sera dirigée suivant la droite qui les joint, et sa grandeur sera fonction seulement de leur distance.

Soient M et A les deux points matériels, supposés infiniment petits, de même matière et en repos. Soit $dv\,dv'\,F(r)$ la projection sur AM de l'action de M sur A, dv étant le volume infiniment petit de A, dv' le volume infiniment petit de M. Soit $f(r)$ la fonction potentielle correspondant à $F(r)$, c'est-à-dire une fonction ayant pour dérivée $-F(r)$.

Revenons à notre portion de matière comprise entre deux sphères de centre O ; soit ρ_1 sa densité, R_1 le rayon de la plus petite sphère, R_2 le rayon de la plus grande, A un de ses points, M un autre point quelconque. Soit a la distance OA. En supposant cette portion de matière en repos à l'époque initiale, l'accélération de A sera placée sur OA et y aura pour projection

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

La résultante des actions de la portion de matière sur le point A doit donc être placée sur OA et y avoir pour projection

$$\rho_1\, dv \left(\frac{dC}{dt}\right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

Le potentiel de l'action de la portion de matière sur le point A est

$$dv \iiint f(r)\, dv'.$$

L'intégrale triple étant étendue au volume compris entre les deux sphères est une fonction de R_1, R_2 et a, et comme on a

$$R_2^3 - R_1^3 = R^3,$$

c'est, en somme, une fonction de R_1 et de a. En la dérivant par rapport à a, on doit avoir la projection sur OA de la force qui agit sur A, c'est-à-dire

$$\rho_1\, dv \left(\frac{dC}{dt}\right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

Donc cette intégrale triple

$$\iiint f(r)\, dv'$$

doit être égale à

$$\frac{M}{a} + N,$$

M et N étant des fonctions de R_1, et l'on aura

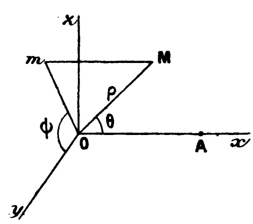
$$M = -\rho_1 \left(\frac{dC}{dt}\right)_0.$$

Cette équation déterminera la valeur de $\left(\frac{dC}{dt}\right)_0$. Pour le moment, il faut déterminer la fonction $f(r)$ de façon que l'on ait

$$\iiint f(r)\, dv' = \frac{M}{a} + N.$$

Soient ρ, θ, ψ les coordonnées polaires de M, Ox étant l'axe

Fig. 1.



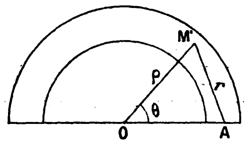
polaire que nous supposerons dirigé suivant OA (*fig.* 1).

On a

$$\iiint f(r)\,dv' = \iiint f(r)\rho^2\,d\rho \sin\theta\,d\theta\,d\psi = 2\pi \iint f(r)\rho^2\,d\rho \sin\theta\,d\theta,$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur de deux demi-circon-

Fig. 2.



férences de centre O, de rayons R_1 et R_2, et limitées au diamètre OA (*fig.* 2). On doit donc avoir

$$\iint f(r)\rho^2\,d\rho \sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{a} + N\right).$$

Substituons à la variable θ la variable r ; comme on a

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta,$$

d'où

$$r\,dr = -a\rho\sin\theta\,d\theta\,;$$

l'intégrale à évaluer devient

$$\iint f(r)\,\frac{\rho\,d\rho\,r\,dr}{a}.$$

Posons

$$\varphi'(r) = rf(r).$$

Cette intégrale devient

$$\int_{R_1}^{a} [\varphi(a+\rho) - \varphi(a-\rho)]\,\frac{\rho\,d\rho}{a} + \int_{a}^{R_2} [\varphi(a+\rho) - \varphi(\rho - a)]\,\frac{\rho\,d\rho}{a}.$$

Posons

$$\psi'(r) = r\varphi(r), \qquad \chi'(r) = \varphi(r),$$

et l'intégrale devient

$$\frac{1}{a}[\psi(a+R_2) - \psi(a+R_1)] - \chi(a+R_2) + \chi(a+R_1)$$

$$+ \frac{1}{a}\,\psi(a-R_1) - \chi(a-R_1) - \frac{1}{a}\psi(R_2 - a) - \chi(R_2 - a) + 2\chi(0).$$

On aura donc l'équation

$$\frac{1}{a}[\psi(a+R_2)-\psi(a+R_1)]-\chi(a+R_2)+\chi(a+R_1)+\frac{1}{a}\psi(a-R_1)$$
$$-\chi(a-R_1)-\frac{1}{a}\psi(R_2-a)-\chi(R_2-a)+2\chi(0)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{a}+N\right).$$

Multiplions les deux membres par a, puis dérivons par rapport à a, il vient

$$R_2[\chi'(R_2+a)+\chi'(R_2-a)]-\chi(R_2+a)-\chi(R_2-a)$$
$$-R_1[\chi'(a+R_1)+\chi'(a-R_1)]+\chi(a+R_1)-\chi(a-R_1)+2\chi(0)=\frac{N}{2\pi}.$$

Dérivons encore une fois par rapport à a, il vient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &R_2[\chi''(R_2+a)-\chi''(R_2-a)]-\chi'(R_2+a)+\chi'(R_2-a)\\ &=R_1[\chi''(a+R_1)+\chi''(a-R_1)]-\chi'(a+R_1)+\chi'(a-R_1),\end{aligned}\right.$$

cette équation a lieu pour toutes les valeurs de R_2 et de R_1 satisfaisant à la relation

$$R_2^3-R_1^3=R^3.$$

On peut donc la dériver par rapport à R_1, en considérant R_2 comme une fonction de R_1. Comme on a

$$\frac{dR_2}{dR_1}=\frac{R_1^2}{R_2^2},$$

il vient

$$(2)\qquad \frac{\chi'''(R_2+a)-\chi'''(R_2-a)}{R_2}=\frac{\chi'''(a+R_1)-\chi'''(a-R_1)}{R_1}.$$

Dérivons encore une fois par rapport à R_1. On obtient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{R_2[\chi^{\text{iv}}(R_2+a)-\chi^{\text{iv}}(R_2-a)]-\chi'''(R_2+a)+\chi'''(R_2-a)}{R_2^4}\\ &=\frac{R_1[\chi^{\text{iv}}(a+R_1)+\chi^{\text{iv}}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1)}{R_1^4}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part en dérivant deux fois par rapport à a l'équation (1), il vient

$$R_2[\chi^{\text{iv}}(R_2+a)-\chi^{\text{iv}}(R_2-a)]-\chi'''(R_2+a)+\chi'''(R_2-a)$$
$$=R_1[\chi^{\text{iv}}(a+R_1)+\chi^{\text{iv}}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1).$$

En comparant cette équation avec l'équation (3), on voit que l'on aura séparément

$$(4)\quad \begin{cases} R_2[\chi^{iv}(R_2+a)-\chi^{iv}(R_2-a)]-\chi'''(R_2+a)+\chi'''(R_2-a)=0, \\ R_1[\chi^{iv}(a+R_1)+\chi^{iv}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1)=0. \end{cases}$$

Prenons par exemple la première de ces équations. Dérivons-la par rapport à R_2. On a

$$R_2[\chi^{v}(R_2+a)-\chi^{v}(R^2-a)]=0,$$

ou bien

$$\chi^{v}(R_2+a)=\chi^{v}(R_2-a).$$

Dérivant cette équation par rapport à R_2 puis à a, on a séparément

$$\chi^{vi}(R_2+a)=\chi^{vi}(R_2-a)$$
$$\chi^{iv}(R_2+a)=-\chi^{vi}(R_2-a).$$

On aura donc

$$\chi^{vi}(r)=0,$$
$$\chi^{v}(r)=A,$$
$$\chi^{iv}(r)=Ar+B,$$
$$\chi'''(r)=\frac{A}{2}r^2+Br+C,$$

A, B, C étant des constantes. Substituons ces valeurs dans la première équation (4), il vient

$$R_2[A(R_2+a)+B-A(R_2-a)-B]$$
$$-\frac{A}{2}(R_2+a)^2-B(R_2+a)-C+\frac{A}{2}(R_2-a)^2+B(R_2-a)+C=0,$$

ou bien

$$-2Ba=0.$$

On a donc

$$B=0.$$

La seconde équation (4) ne donne rien. On a donc

$$\chi'''(r)=\frac{A}{2}r^2+C,$$

$$\chi''(r)=\frac{A}{6}r^3+Cr+D,$$

$$\chi'(r)=\frac{A}{24}r^4+\frac{C}{2}r^2+Dr+E,$$

D, E étant de nouvelles constantes. Substituons ces valeurs dans (1), on a

$$
\begin{aligned}
& R_2\left[\frac{A}{6}(R_2+a)^3+C(R_2+a)+D-\frac{A}{6}(R_2-a)^3-C(R_2-a)-D\right] \\
& \quad -\frac{A}{24}(R_2-a)^4-\frac{C}{2}(R_2+a)^2-D(R_2+a)-E \\
& \quad +\frac{A}{24}(R_2-a)^4+\frac{C}{2}(R_2-a)^2+D(R_2-a)+E \\
& = R_1\left[\frac{A}{6}(R_1+a)^3+C(R_1+a)+D+\frac{A}{6}(a-R_1)^3+C(a-R_1)+D\right] \\
& \quad -\frac{A}{24}(a+R_1)^4-\frac{C}{2}(a+R_1)^2-D(a+R_1)-E \\
& \quad +\frac{24}{A}(a-R_1)^4+\frac{C}{2}(a-R_1)^2+D(a-R_1)+E.
\end{aligned}
$$

En effectuant les simplifications on a

$$2\frac{A}{3}R_2^3 a-2Da=2\frac{A}{3}R_1^3 a$$

ou

$$D=\frac{A}{3}R^3.$$

On a donc

$$\chi''(r)=\frac{A}{6}r^3+Cr+\frac{A}{3}R^3,$$

or on a

$$\chi'(r)=\varphi(r),\qquad \chi''(r)=\varphi'(r)=rf(r).$$

On aura donc

$$f(r)=\frac{A}{6}r^2+C+\frac{A}{3}\frac{R^3}{r}$$

et par suite

$$F(r)=\frac{A}{3}\frac{R^3}{r^2}-\frac{A}{3}r=\alpha\left(\frac{R^3}{r^2}-r\right), \tag{5}$$

α étant une nouvelle constante qui doit être positive. Il est aisé de voir que cette expression satisfait, car, dans l'attraction proportionnelle à la distance, la masse peut être concentrée au centre de gravité et l'on a, en somme, pour l'action de la matière comprise entre les deux sphères concentriques sur le point A, l'expression

$$-\alpha\frac{4}{3}\pi R^3 a+\alpha R^3\left(\frac{4}{3}\pi a^3-\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)\frac{1}{a^2}=-\frac{4}{3}\pi\alpha R^3 R_1^3\frac{1}{a^2}.$$

Revenons à l'expression (5) de la force qui agit entre deux points matériels de même matière. On voit que R, rayon de la sphère qui représente le volume de la portion de matière considérée, y entre; cela exige que l'on ait réuni toute la matière de cette nature qui existe au monde; c'est par conséquent opposé à l'existence propre des atomes; même, en admettant cela, il reste bizarre que l'action d'un point matériel sur un autre de même nature dépende de la quantité de matière de cette nature qui existe au monde. Enfin, la présence d'une répulsion, proportionnelle à la distance, offre aussi des difficultés. A cela on pourrait objecter que, peut-être, l'expression de la force dans le mouvement s'opposerait à des mouvements dans lesquels la vitesse et la force grandiraient indéfiniment. Je note ces objections qui me paraissent s'opposer à l'adoption d'une loi d'action de la matière sur la matière, point matériel à point matériel et je continue.

On peut trouver l'expression (5) de la force en se passant de la fonction potentielle. Le calcul, en effet, n'est pas complètement rigoureux à cause du terme en $\frac{1}{r^2}$ qui grandit indéfiniment quand r tend vers zéro.

Cherchons alors directement à trouver une fonction $F(r)$ telle que l'on ait

$$\iint F(r)\,\frac{r^2+a^2-\rho^2}{2ar}\,\frac{\rho\,d\rho\,r\,dr}{a}=\frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{a^2}. \tag{6}$$

Les limites et les notations étant les mêmes que pour l'intégrale double précédente, le cosinus de l'angle de AM avec Ox étant

$$-\frac{r^2+a^2-\rho^2}{2ar},$$

l'équation (6) peut s'écrire

$$\iint F(r)(r^2+a^2-\rho^2)\rho\,d\rho\,dr=\frac{M}{\pi},$$

ou bien

$$\int_{R_1}^{a}d\rho\int_{a-\rho}^{a+\rho}\rho\,F(r)(r^2+a^2-\rho^2)\,dr+\int_{a}^{R_2}d\rho\int_{\rho-a}^{\rho+a}\rho\,F(r)(r^2+a^2-\rho^2)\,dr=\frac{M}{\pi}.$$

Dérivons cette équation par rapport à R_1, il vient

$$-\int_{a-R_1}^{a+R_1} \frac{r^2+a^2-R_1^2}{R_1} F(r)\,dr + \int_{R_2-a}^{R_2+a} \frac{r^2+a^2-R_2^2}{R_2} F(r)\,dr = \frac{1}{\pi}\frac{dM}{dR_1}\frac{1}{R_1^2}.$$

Dérivons cette équation par rapport à a, on obtient

$$\frac{2a^2-2aR_1}{R_1}F(a-R_1) - \frac{2a^2+2aR_1}{R_1}F(a+R_1) - \int_{a-R_1}^{a+R_1}\frac{2a}{R_1}F(r)\,dr$$
$$+\frac{2a^2+2aR_2}{R_2}F(a+R_2) + \frac{2a^2-2aR_2}{R_2}F(R_2-a) + \int_{R_2-a}^{R_2+a}\frac{2a}{R_2}F(r)\,dr = 0,$$

ou en divisant par $2a$

$$\frac{a+R_1}{R_1}F(a+R_1) - \frac{a-R_1}{R_1}F(a-R_1) + \frac{1}{R_1}\int_{a-R_1}^{a+R_1}F(r)\,dr$$
$$= \frac{a+R_2}{R_2}F(a+R_2) + \frac{a-R_2}{R_2}F(R_2-a) + \frac{1}{R_2}\int_{R_2-a}^{R_2+a}F(r)\,dr,$$

ou bien, en développant le premier membre en série, suivant les puissances de R_1,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{R_1}\left[2R_1F'(a) + \frac{R_1^3}{3}F'''(a) + \ldots\right] + 2F(a) + R_1^2F''(a) + \ldots \\ &+ \frac{1}{R_1}\left[2R_1F(a) + \frac{R_1^3}{3}F''(a) + \ldots\right] = H(R_2, a), \end{aligned}\right.$$

en représentant par $H(R_2, a)$ le second membre de l'équation précédente. Cette équation (7) peut s'écrire

$$(8)\qquad K(a) + R_1^2 S(a) + \ldots = H(R_2, a).$$

Dérivons l'équation (8) par rapport à R_1, on a

$$2R_1S(a) + \ldots = \frac{dH}{dR_2}\frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

En faisant $R_1 = 0$ après avoir divisé les deux membres par R_1, on en tire

$$S(a) = 0.$$

Formons cette équation. C'est

$$aF'''(a) + 4F''(a) = 0.$$

On en tire

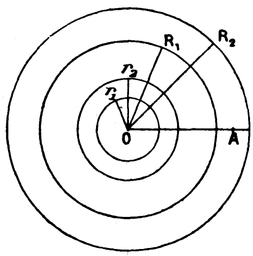
$$F(a) = \frac{A}{a^2} + Ba + C,$$

A, B, C étant des constantes. En partant de cette expression, on trouve très aisément que l'on doit avoir $C = 0$, $A = -BR^3$. On retrouve l'expression (5) en posant

$$B = -\alpha.$$

3. Considérons maintenant deux espèces de matière. Supposons la matière de la première espèce groupée entre deux sphères concentriques de rayons r_1 et r_2 et la matière de la seconde espèce entre deux sphères de rayons R_1, R_2, concentriques aux

Fig. 3.



précédentes et supposons tout le système primitivement au repos (*fig.* 3).

Soit A un point matériel infiniment petit de la seconde espèce de matière, à la distance OA, dv son volume, ρ la densité de la matière de la première espèce, ρ' la densité de la matière de la seconde espèce. L'action totale des deux portions de matière sur le point A, à l'époque initiale, doit, en vertu des mêmes considérations que dans le cas d'une seule espèce de matière, être de la forme

$$\frac{k}{a^2} \rho' dv.$$

Or l'action de la matière de la seconde espèce sur le point A est déjà de cette forme. Il en sera donc de même de l'action de la matière de la première espèce sur le point A. On est donc en somme ramené à chercher une loi d'action entre deux points matériels, telle que l'action d'une portion de matière, comprise entre deux sphères concentriques sur un point à l'extérieur, soit inversement proportionnelle au carré de la distance, et cela quelles que soient les deux sphères, pourvu que le volume qu'elles comprennent reste le même.

Soit $f(r)$ la fonction potentielle correspondant à cette attraction. L'intégrale

$$\iiint f(r)\,dv',$$

en reprenant toutes les mêmes notations que quand le point A est à l'intérieur de la portion de matière, devra être de la forme

$$\frac{M}{a}+N,$$

et l'on aura

$$\iint f(r)\frac{\rho\,d\rho\,r\,dr}{a}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{a}+N\right).$$

Supposons d'abord $a>R_2$. L'intégrale devient

$$\int_{R_1}^{R_2}[\varphi(a+\rho)-\varphi(a-\rho)]\frac{\rho\,d\rho}{a}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}[\psi(a+R_2)-\psi(a+R_1)]-\chi(a+R_2)+\chi(a+R_1)\\&\quad-\frac{1}{a}[\psi(a-R_2)-\psi(a-R_1)]+\chi(a-R_2)-\chi(a-R_1).\end{aligned}$$

On devra donc avoir l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}[\psi(a+R_2)-\psi(a+R_1)]-\chi(a+R_2)+\chi(a+R_1)\\&\quad-\frac{1}{a}[\psi(a-R_2)-\psi(a-R_1)]+\chi(a-R_2)-\chi(a-R_1)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{a}+N\right).\end{aligned}$$

Multiplions par a et dérivons par rapport à a, il vient

$$\begin{aligned}&R_2[\chi'(a+R_2)+\chi'(a-R_2)]-\chi(a+R_2)+\chi(a-R_2)\\&\quad-R_1[\chi'(a+R_1)+\chi'(a-R_1)]+\chi(a+R_1)-\chi(a-R_1)=\frac{N}{2\pi}.\end{aligned}$$

En dérivant encore une fois par rapport à a, on obtient

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&R_2[\chi''(a+R_2)+\chi''(a-R_2)]-\chi'(a+R_2)+\chi'(a-R_2)\\&\quad=R_1[\chi''(a+R_1)+\chi''(a-R_1)]-\chi'(a+R_1)+\chi'(a-R_1).\end{aligned}\right.$$

Dérivons l'équation (9) par rapport à R_1 en considérant R_2 comme fonction de R_1 fournie par l'équation

$$R_2^3 - R_1^3 = R^3,$$

d'où

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

On obtiendra

$$\frac{\chi'''(a+R_2)-\chi'''(a-R_2)}{R_2} = \frac{\chi'''(a+R_1)-\chi'''(a-R_1)}{R_1}. \tag{10}$$

Dérivons encore cette équation par rapport à R_1, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{R_2[\chi^{\text{IV}}(a+R_2)+\chi^{\text{IV}}(a-R_2)]-\chi'''(a+R_2)+\chi'''(a-R_2)}{R_2^4} \\ &\quad = \frac{R_1[\chi^{\text{IV}}(a+R_1)-\chi^{\text{IV}}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1)}{R_1^4}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

En dérivant deux fois par rapport à a l'équation (9), on a

$$\begin{aligned} &R_2[\chi^{\text{IV}}(a+R_2)+\chi^{\text{IV}}(a-R_2)]-\chi'''(a+R_2)+\chi'''(a-R_2) \\ &\quad = R_1[\chi^{\text{IV}}(a+R_1)+\chi^{\text{IV}}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1). \end{aligned}$$

En comparant cette équation avec l'équation (11), on voit que l'on aura séparément

$$\begin{aligned} &R_2[\chi^{\text{IV}}(a+R_2)+\chi^{\text{IV}}(a-R_2)]-\chi'''(a+R_2)+\chi'''(a-R_2) = 0, \\ &R_1[\chi^{\text{IV}}(a+R_1)+\chi^{\text{IV}}(a-R_1)]-\chi'''(a+R_1)+\chi'''(a-R_1) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en somme,

$$r[\chi^{\text{IV}}(a+r)+\chi^{\text{IV}}(a-r)]-\chi'''(a+r)+\chi'''(a-r) = 0, \tag{12}$$

r étant plus petit que a.

En dérivant cette équation par rapport à r, on obtient

$$\chi^{\text{V}}(a+r)+\chi^{\text{V}}(a-r) = 0. \tag{13}$$

En dérivant cette équation successivement par rapport à r et à a, on obtient

$$\begin{aligned} \chi^{\text{VI}}(a+r)-\chi^{\text{VI}}(a-r) &= 0, \\ \chi^{\text{VI}}(a+r)+\chi^{\text{VI}}(a-r) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi^{\text{VI}}(r) &= 0, \\ \chi^{\text{V}}(r) &= A. \end{aligned}$$

A étant une constante. L'équation (13) donne $A = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{v}}(r) &= 0,\\ \chi^{\mathrm{iv}}(r) &= B,\\ \chi'''(r) &= Br + C,\end{aligned}$$

B et C étant de nouvelles constantes. En portant ces valeurs dans l'équation (12), on voit qu'elle est identiquement satisfaite. On a alors

$$\chi''(r) = \frac{B}{2}r^2 + Cr + D,$$

$$\chi'(r) = \frac{B}{6}r^3 + \frac{C}{2}r^2 + Dr + E,$$

D et E étant de nouvelles constantes. Portons ces valeurs dans l'équation (9). Elle devient

$$\begin{aligned}R_2 &\left[\frac{B}{2}(a+R_2)^2 + C(a+R_2) + D + \frac{B}{2}(a-R_2)^2 + C(a-R_2) + D\right]\\ &- \frac{B}{6}(a+R_2)^3 - \frac{C}{2}(a+R_2)^2 - D(a+R_2) - E\\ &+ \frac{B}{6}(a-R_2)^3 + \frac{C}{2}(a-R_2)^2 + D(a-R_2) + E\\ = R_1 &\left[\frac{B}{2}(a+R_1)^2 + C(a+R_1) + D + \frac{B}{2}(a-R_1)^2 + C(a-R_1) + D\right]\\ &- \frac{B}{6}(a+R_1)^3 - \frac{C}{2}(a+R_1)^2 - D(a+R_1) - E\\ &+ \frac{B}{6}(a-R_1)^3 + \frac{C}{2}(a-R_1)^2 + D(a-R_1) + E,\end{aligned}$$

ou, après simplifications,

$$\tfrac{2}{3}B(R_2^3 - R_1^3) = \tfrac{2}{3}BR^3 = 0,$$

d'où l'on déduit $B = 0$.

On a donc

$$\chi''(r) = Cr + D,$$

d'où

$$f(r) = C + \frac{D}{r},$$

et, par suite,

$$F(r) = \frac{D}{r^2}.$$

On trouve l'attraction en raison inverse du carré de la distance comme seule solution.

Supposons maintenant que l'on ait $a < R_1$. Reprenons les calculs. L'intégrale double devient

$$\int_{R_1}^{R_2} [\varphi(a+\rho) - \varphi(\rho - a)] \frac{\rho\, d\rho}{a},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}[\psi(a+R_2) - \psi(a+R_1)] - \chi(a+R_2) + \chi(a+R_1) \\ &\quad - \frac{1}{a}[\psi(R_2 - a) - \psi(R_1 - a)] - \chi(R_2 - a) + \chi(R_1 - a). \end{aligned}$$

On a donc l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}[\psi(a+R_2) - \psi(a+R_1)] - \chi(a+R_2) + \chi(a+R_1) \\ &\quad - \frac{1}{a}[\psi(R_2 - a) - \psi(R_1 - a)] - \chi(R_2 - a) + \chi(R_1 - a) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{a} + N\right). \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par a et dérivons par rapport à a, il vient

$$\begin{aligned} &R_2[\chi'(R_2+a) + \chi'(R_2 - a)] - \chi(a+R_2) - \chi(R_2 - a) \\ &\quad - R_1[\chi'(R_1+a) + \chi'(R_1 - a)] + \chi(a+R_1) + \chi(R_1 - a) = \frac{N}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dérivons encore une fois par rapport à a, on obtient

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &R_2[\chi''(R_2+a) - \chi''(R_2 - a)] - \chi'(R_2+a) + \chi'(R_2 - a) \\ &\quad = R_1[\chi''(R_1+a) - \chi''(R_1 - a)] - \chi'(R_1+a) + \chi'(R_1 - a). \end{aligned} \right.$$

Dérivons cette équation par rapport à R_1 en considérant R_2 comme fonction de R_1, de même que l'on a fait précédemment. On obtient

$$(15) \qquad \frac{\chi'''(R_2+a) - \chi'''(R_2 - a)}{R_2} = \frac{\chi'''(R_1+a) - \chi'''(R_1 - a)}{R_1}.$$

Dérivons encore cette équation par rapport à R_1, on a

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_2[\chi^{\text{IV}}(R_2+a) - \chi^{\text{IV}}(R_2 - a)] - \chi'''(R_2+a) + \chi'''(R_2 - a)}{R_2^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad = \frac{R_1[\chi^{\text{IV}}(R_1+a) - \chi^{\text{IV}}(R_1 - a)] - \chi'''(R_1+a) + \chi'''(R_1 - a)}{R_1^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Dérivons deux fois l'équation (14) par rapport à a, il vient

$$R_2[\chi^{\text{IV}}(R_2+a)-\chi^{\text{IV}}(R_2-a)]-\chi'''(R_2+a)+\chi'''(R_2-a)$$
$$=R_1[\chi^{\text{IV}}(R_1+a)-\chi^{\text{IV}}(R_1-a)]-\chi'''(R_1+a)+\chi'''(R_1-a).$$

En comparant cette équation à l'équation (16) on en déduit que l'on a séparément

$$R_2[\chi^{\text{IV}}(R_2+a)-\chi^{\text{IV}}(R_2-a)]-\chi'''(R_2+a)+\chi'''(R_2-a)=0,$$
$$R_1[\chi^{\text{IV}}(R_1+a)-\chi^{\text{IV}}(R_1-a)]-\chi'''(R_1+a)+\chi'''(R_1-a)=0,$$

c'est-à-dire

$$(17)\qquad r[\chi^{\text{IV}}(a+r)-\chi^{\text{IV}}(r-a)]-\chi'''(r+a)+\chi'''(r-a)=0,$$

r étant supérieur à a. Dérivons cette équation par rapport à r, on a

$$\chi^{\text{V}}(r+a)-\chi^{\text{V}}(r-a)=0,$$

on en tire

$$\chi^{\text{VI}}(r)=0,$$
$$\chi^{\text{V}}(r)=A,$$
$$\chi^{\text{IV}}(r)=Ar+B,$$
$$\chi'''(r)=\frac{A}{2}r^2+Br+C,$$

A, B, C étant des constantes. En substituant ces valeurs dans l'équation (17), on a

$$r[A(r+a)+B-A(r-a)-B]-\frac{A}{2}(r+a)^2-B(r+a)-C$$
$$+\frac{A}{2}(r-a)^2+B(r-a)+C=0,$$

ou bien

$$-2Ba=0,$$

d'où

$$B=0.$$

On a donc

$$\chi'''(r)=\frac{A}{2}r^2+C,$$
$$\chi''(r)=\frac{A}{6}r^3+Cr+D,$$
$$\chi'(r)=\frac{A}{24}r^4+\frac{C}{2}r^2+Dr+E,$$

D et E étant de nouvelles constantes. En substituant ces valeurs dans l'équation (14), on a

$$\begin{aligned}
&R_2\left[\frac{A}{6}(R_2+a)^3+C(R_2+a)+D-\frac{A}{6}(R_2-a)^3-C(R_2-a)-D\right]\\
&\quad-\frac{A}{24}(R_2+a)^4-\frac{C}{2}(R_2+a)^2-D(R_2+a)-E\\
&\quad+\frac{A}{24}(R_2-a)^4+\frac{C}{2}(R_2-a)^2+D(R_2-a)+E\\
&=R_1\left[\frac{A}{6}(R_1+a)^3+C(R_1+a)+D-\frac{A}{6}(R_1-a)^3-C(R_1-a)-D\right]\\
&\quad-\frac{A}{24}(R_1+a)^4-\frac{C}{2}(R_1+a)^2-D(R_1+a)-E\\
&\quad+\frac{A}{24}(R_1-a)^4+\frac{C}{2}(R_1-a)^2+D(R_1-a)+E,
\end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{2A}{3}R_2^3a=\frac{2A}{3}R_1^3a$$

ou

$$\frac{2A}{3}R^3a=0,$$

d'où

$$A=0;$$

on a donc

$$\chi''(r)=Cr+D,$$

d'où

$$f(r)=C+\frac{D}{r}$$

et

$$F(r)=\frac{D}{r^2}.$$

On n'a d'autre loi d'attraction que celle de Newton. Ainsi, un point matériel d'une espèce de matière en repos attire, suivant la loi de Newton, un point matériel d'une autre espèce de matière également en repos.

4. Nous allons maintenant nous occuper de l'action de deux points matériels en mouvement l'un sur l'autre.

Soient deux points matériels infiniment petits quelconques M et M', dv le volume infiniment petit de M, dv' le volume infiniment petit de M'. Il est clair que, si l'on représente par (F) $dv\,dv'$ la force provenant de l'action de M' sur M, le segment (F) forme avec le segment MM' et les segments représentant les vitesses des points M et M' un système invariable. J'admettrai que ce segment

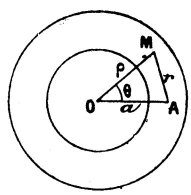
(F) forme, avec MM' et le segment MN représentant la vitesse relative de M par rapport à M', un système invariable. Soit alors MI une perpendiculaire à MM' dans le plan NMM'. Le segment (F) sera situé dans le plan NMM', et si l'on désigne par a_1 et b_1 les projections de MN sur MM' et MI, par r la distance MM', ses projections sur MM' et MI seront des fonctions de a_1, b_1, r que nous désignerons par

$$f(a_1, b_1, r),$$
$$\varphi(a_1, b_1, r).$$

Cela posé, revenons à l'action d'une portion de matière comprise entre deux sphères concentriques sur un de ses points A. Reprenons les notations adoptées (*fig.* 4).

Nous avons vu que la vitesse d'un point quelconque M était

Fig. 4.



placée sur OM et y avait pour projection $\frac{C}{\rho^2}$, ρ désignant la distance OM, C étant une fonction du temps. L'accélération du point A est placée suivant OA et y a pour projection

$$\frac{dC}{dt}\frac{1}{a^2} - 2\frac{C^2}{a^5}.$$

Pour avoir la force provenant de l'action de la matière sur A il faut multiplier cette accélération par $\rho_1\, dv$, ρ_1 étant la densité de la matière et dv le volume infiniment petit du point matériel A. Les quantités a_1 et b_1 contiennent C en facteur. Donc on voit que, pour trouver le terme

$$-\frac{2C^2}{a^5}\rho_1\, dv,$$

il faut prendre dans

$$f(a_1, b_1, r),$$
$$\varphi(a_1, b_1, r),$$

des fonctions homogènes du second degré en a_1 et b_1.

Admettons maintenant que les fonctions f et φ soient développables en séries suivant les puissances de a_1 et b_1, on voit que ces fonctions devront être de la forme

$$a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r) + a_1 b_1 \psi_1(r),$$
$$a_1^2 f_1(r) + b_1^2 \varphi_1(r) + a_1 b_1 \psi(r).$$

Remarquons maintenant que si l'on change b_1 de signe, a_1 restant le même, la fonction $f(a_1, b_1, r)$ ne doit pas changer, tandis que la fonction $\varphi(a_1, b_1, r)$ doit changer seulement de signe. On aura donc

$$\psi_1(r) = 0, \qquad f_1(r) = 0, \qquad \varphi_1(r) = 0.$$

Les termes obtenus dans l'intégration, qui donnent l'action de la portion de matière sur le point A en prenant les fonctions

$$a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r),$$
$$a_1 b_1 \psi(r),$$

donnent des termes en C^2, qui ne peuvent par conséquent se réduire qu'entre eux, et par suite on devra avoir

$$\iiint \left\{ [a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r)] \cos A + a_1 b_1 \psi(r) \sin A \right\} dv' = -\frac{2C^2 \rho_1}{a^5} + \frac{\Phi(R_1)}{a^2}.$$

Nous allons développer cette intégrale.

Soit θ l'angle MOA. Soient α l'angle de la vitesse relative de A par rapport à M avec AM, V la grandeur de cette vitesse relative. On trouve sans peine

$$a_1 = V\cos\alpha = \frac{C}{2a^3\rho^3 r}[r^2(a^3+\rho^3) - (a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)],$$

$$V^2 = \frac{C^2}{a^4\rho^4}[r^2 a\rho + (a^3-\rho^3)(a-\rho)],$$

$$V^2\sin^2\alpha = \frac{C^2}{4a^6\rho^6 r^2}(a^3-\rho^3)^2[-r^4 + 2r^2(a^2+\rho^2) - (a^2-\rho^2)^2],$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2a\rho}\sqrt{-r^4 + 2r^2(a^2+\rho^2) - (a^2-\rho^2)^2},$$

$$b_1 = V\sin\alpha = \frac{C}{a^2\rho^2 r}(a^3-\rho^3)\sin\theta,$$

$$\cos A = \frac{r^2 + a^2 - \rho^2}{2ar}, \qquad \sin A = \frac{\rho\sin\theta}{r},$$

et, par suite,

$$a_1^2 f(r)\cos A\, dv' = \frac{C^2}{8a^8\rho^5 r^2}\,[r^2(a^3+\rho^3)-(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]^2$$
$$\times (r^2+a^2-\rho^2) f(r)\, d\rho\, dr\, d\psi,$$

$$b_1^2 \varphi(r)\cos A\, dv' = \frac{C^2}{8a^8\rho^5 r^2}\,[-r^4+2r^2(a^2+\rho^2)-(a^2-\rho^2)^2](a^3-\rho^3)^2$$
$$\times (r^2+a^2-\rho^2)\varphi(r)\, d\rho\, dr\, d\psi,$$

$$a_1 b_1 \psi(r)\sin A\, dv' = \frac{C^2}{8a^8\rho^5 r^2}\,[-r^4+2r^2(a^2+\rho^2)-(a^2-\rho^2)^2](a^3-\rho^3)$$
$$\times [r^2(a^3+\rho^3)-(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]\,\psi(r)\, d\rho\, dr\, d\psi,$$

d'où il suit que l'on devra avoir

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint \Big\{ [r^2(a^3+\rho^3)-(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]^2 \\ &\qquad \times (r^2+a^2-\rho^2) f_1(r) + (a^3-\rho^3)^2 \\ &\qquad \times [-r^4+2r^2(a^2+\rho^2)-(a^2-\rho^2)^2] \\ &\qquad \times (r^2+a^2-\rho^2)\varphi_1(r) + (a^3-\rho^3) \\ &\qquad \times [-r^4+2r^2(a^2+\rho^2)-(a^2-\rho^2)^2] \\ &\qquad \times [r^2(a^3+\rho^3)-(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]\,\psi_1(r) \Big\} \frac{d\rho\, dr}{\rho^5} \\ &= a^3 + a^6 F(R_1), \end{aligned}\right.$$

en posant

$$f_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2} f(r),$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2}\varphi(r),$$

$$\psi_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2}\psi(r),$$

$$F(R_1) = -\frac{1}{2C^2\rho_1}\Phi(R_1).$$

Dérivons l'équation (18) par rapport à R_1 en tenant compte de l'équation

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

il vient

$$
\begin{aligned}
-\int_{a-R_1}^{a+R_1} & \Big\{ [r^2(a^3+R_1^3)-(a^2-R_1^2)(a^3-R_1^3)] \\
& \times (r^2+a^2-R_1^2) f_1(r) + (a^3-R_1^3)^2 \\
& \times [-r^4+2r^2(a^2+R_1^2)-(a^2-R_1^2)^2] \\
& \times (r^2+a^2-R_1^2)\varphi_1(r) + (a^3-R_1^3) \\
& \times [-r^4+2r^2(a^2+R_1^2)-(a^2-R_1^2)^2] \\
& \times [r^2(a^3+R_1^3)-(a^2-R_1^2)(a^3-R_1^3)]\psi_1(r) \Big\} \frac{dr}{R_1^5}, \\
+\frac{R_1^2}{R_2^2}\int_{R_2-a}^{R_2+a} & \Big\{ [(r^2(a^3+R_2^3)-(a^2-R_2^2)(a^3-R_2^3)] \\
& \times (r^2+a^2-R_2^2) f_1(r) + (a^3-R_2^3)^2 \\
& \times [-r^4+2r^2(a^2+R_2^2)-(a^2-R_2^2)^2] \\
& \times (r^2+a^2-R_2^2)\varphi_1(r) + (a^3-R_2^3) \\
& \times [-r^4+2r^2(a^2+R_2^2)-(a^2-R_2^2)^2] \\
& \times [r^2(a^3+R_2^3)-(a^2-R_2^2)(a^3-R_2^3)]\psi_1(r) \Big\} \frac{dr}{R_2^5} \\
& = a^6 F'(R_1).
\end{aligned}
$$

Multiplions les deux membres de cette équation par R_1^5. Alors dans le premier membre, supposé ordonné suivant les puissances de R_1, les termes jusqu'au sixième degré ne peuvent provenir que de la première intégrale et par suite seront égaux aux produits de a^6 par des constantes. Nous allons les calculer.

Dans la première intégrale, la quantité comprise entre les premières parenthèses $\{\ \}$ doit être développée suivant les puissances de R_1 jusqu'à la cinquième. On obtient ainsi comme coefficient de $f_1(r)$ l'expression

$$
\begin{aligned}
& a^6(r^2-a^2)^2(r^2+a^2) + a^6[2(r^4-a^4)-(r^2-a^2)^2]R_1^2 \\
& + 2a^3(r^4-a^4)(r^2+a^2)R_1^3 + a^6[r^2+a^2-2(r^2-a^2)]R_1^4 \\
& + [4a^5(r^2+a^2)-2a^3(r^4-a^4)]R_1^5.
\end{aligned}
$$

Le coefficient de $\varphi_1(r)$ sera

$$
\begin{aligned}
& -a^6(r^2+a^2)(r^2-a^2)^2 + a^6[(r^2-a^2)^2+2(r^2+a^2)^2]R_1^2 \\
& + 2a^3(r^2-a^2)^2(r^2+a^2)R_1^3 - 3a^6(r^2+a^2)R_1^4 \\
& - 2a^3[(r^2-a^2)^2+2(r^2+a^2)^2]R_1^5.
\end{aligned}
$$

Le coefficient de $\psi_1(r)$ sera

$$
\begin{aligned}
& -a^6(r^2-a^2)^3 + a^6[2(r^4-a^4)-(r^2-a^2)^2]R_1^2 - 2a^3(r^2-a^2)^2R_1^3 \\
& + a^6[2(r^2+a^2)-(r^2-a^2)]R_1^4 + [2a^3(r^2-a^2)^2+4a^5(r^2+a^2)]R_1^5.
\end{aligned}
$$

On a ensuite les formules

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} r^6 f(r)\,dr = 2R_1 a^6 f(a) + \frac{R_1^3}{3}[30a^4 f(a) + 12a^5 f'(a) + a^6 f''(a)]$$
$$+ \frac{R_1^5}{60}[360a^2 f(a) + 480a^3 f'(a) + 180a^4 f''(a) + 24a^5 f'''(a) + a^6 f^{\text{IV}}(a)]$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} r^4 f(r)\,dr = 2R_1 a^4 f(a) + \frac{R_1^3}{3}[12a^2 f(a) + 8a^3 f'(a) + a^4 f''(a)]$$
$$+ \frac{R_1^5}{60}[24f(a) + 96af'(a) + 72a^2 f''(a) + 16a^3 f'''(a) + a^4 f^{\text{IV}}(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} r^2 f(r)\,dr = 2R_1 a^2 f(a) + \frac{R_1^3}{3}[2f(a) + 4af'(a) + a^2 f''(a)]$$
$$+ \frac{R_1^5}{60}[12f''(a) + 8af'''(a) + a^2 f^{\text{IV}}(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} f(r)\,dr = 2R_1 f(a) + \frac{R_1^3}{3} f''(a) + \frac{R_1^5}{60} f^{\text{IV}}(a).$$

En se servant de ces formules, on aura

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6(r^2-a^2)^2(r^2+a^2) f_1(r)\,dr = \frac{16}{3} a^{10} f_1(a) R_1^3$$
$$+ \frac{1}{5} a^8 R_1^5 [28 f_1(a) + 32 a f_1'(a) + 8a^2 f_1''(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6 R_1^2 [2(r^4-a^4) - (r^2-a^2)^2] f_1(r)\,dr = \frac{16}{3} a^8 R_1^5 [f_1(a) + a f_1'(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} 2a^3 R_1^3 (r^4-a^4)(r^2+a^2) f_1(r)\,dr = \frac{16}{3} a^7 R_1^6 [5 f_1(a) + 2a f_1'(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^4 a^6 [r^2+a^2 - 2(r^2-a^2)] f_1(r)\,dr = 4a^8 R_1^5 f_1(a),$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^5 [4a^5(r^2+a^2) - 2a^3(r^4-a^4)] f_1(r)\,dr = 16 a^7 R_1^6 f_1(a),$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} -a^6(r^2-a^2)^2(r^2+a^2)\varphi_1(r)\,dr = -\frac{16}{3} a^{10}\varphi_1(a) R_1^3$$
$$- \frac{1}{5} a^8 R_1^5 [28\varphi_1(a) + 32a\varphi_1'(a) + 8a^2\varphi_1''(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^2 a^6 [2(r^2+a^2)^2 + (r^2-a^2)^2]\varphi_1(r)\,dr = 16a^{10} R_1^3 \varphi_1(a)$$
$$+ \frac{8}{3} a^8 R_1^5 [5\varphi_1(a) + 4a\varphi_1'(a) + a^2\varphi_1''(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} 2a^3 R_1^3 (r^2-a^2)^2(r^2+a^2)\varphi_1(r)\,dr = \frac{32}{3} a^7 R_1^6 \varphi_1(a)],$$

et

$$\int_{a-R_1}^{a+R_2} -3a^6 R_1^4 (r^2+a^2)\varphi_1(r)\,dr = -12a^8 R_1^5 \varphi_1(a),$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} -2a^3[2(r^2+a^2)^2+(r^2-a^2)^2]\varphi_1(r)\,dr = -32a^7 R_1^6 \varphi_1(a),$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} -a^6(r^2-a^2)^3\psi_1(r)\,dr = -\frac{8}{5}a^8 R_1^5[3\psi_1(a)+2a\psi_1'(a)],$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6[2(r^4-a^4)-(r^2-a^2)^2]R_1^2\psi_1(r)\,dr = \frac{16}{3}a^8 R_1^5[\psi_1(a)+a\psi_1'(a)].$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} -2a^5(r^2-a^2)^2 R_1^3\psi_1(r)\,dr = -\frac{16}{3}a^7 R_1^6\psi_1(a).$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6[2(r^2+a^2)-(r^2-a^2)]R_1^4\psi_1(r)\,dr = 8R_1^5 a^8\psi_1(a),$$

$$\int_{a-R_1}^{a+R_1} [2a^3(r^2-a^2)^2+4a^5(r^2+a^2)]R_1^5\psi_1(r)\,dr = 16a^7 R_1^6\psi_1(a).$$

On en déduit les équations

$$f_1+2\varphi_1 = \frac{A}{a^4},$$

$$4f_1+af_1'-2\varphi_1+\psi_1 = \frac{B}{a},$$

$$28f_1+22af_1'+3a^2f_1''+2[-4\varphi_1+4a\varphi_1'+a^2\varphi_1'']+4[4\psi_1+a\psi_1'] = \frac{C}{a^2},$$

A, B, C étant des constantes. On en tire

$$a^2f_1''+11af_1'+24f_1 = 6\frac{B}{a}-\frac{C}{2a^2}.$$

Cette équation peut s'écrire, d'après

$$\frac{d}{da}[a^5f_1'(a)+6a^4f_1(a)] = a^5f_1''(a)+11a^4f_1'(a)+24a^3f_1(a),$$

de la manière suivante :

$$6Ba^2-\frac{C}{2}a = \frac{d}{da}[a^5f_1'(a)+6a^4f_1(a)],$$

d'où

$$a^5f_1'(a)+6a^4f_1(a) = 2Ba^3-\frac{C}{4}a^2+D,$$

D étant une nouvelle constante. On a ensuite

$$\frac{d}{da}[a^6 f_1(a)] = a^6 f'_1(a) + 6a^5 f_1(a) = 2Ba^4 - \frac{C}{4}a^3 + Da,$$

d'où

$$a^6 f_1(a) = \frac{2B}{5}a^5 - \frac{C}{16}a^4 + \frac{Da^2}{2} + E$$

et

$$f_1(a) = \frac{2B}{5}\frac{1}{a} - \frac{C}{16}\frac{1}{a^2} + \frac{D}{2}\frac{1}{a^4} + \frac{E}{a^6},$$

E étant une nouvelle constante. On a ensuite

$$\varphi_1(a) = \frac{A}{2a^4} - \frac{B}{5}\frac{1}{a} + \frac{C}{32}\frac{1}{a^2} - \frac{D}{4}\frac{1}{a^4} - \frac{E}{2}\frac{1}{a^6},$$

$$\psi_1(a) = \frac{A}{a^4} - \frac{3B}{5}\frac{1}{a} + \frac{3C}{16}\frac{1}{a^2} - \frac{D}{2}\frac{1}{a^4} + \frac{E}{a^6}.$$

Il faut porter les valeurs de $f_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$ dans l'équation (18) et voir si l'on peut disposer des constantes A, B, C, D, E pour y satisfaire.

Prenons d'abord dans $f_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$ les termes en E.

Je calculerai dans l'équation (18) le terme en $\frac{E}{2}$.

Il faut alors y faire

$$f_1(r) = \frac{2}{r^6},$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{r^6},$$

$$\psi_1(r) = \frac{2}{r^6}.$$

On a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&[r^2(a^3+\rho^3) - (a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]^2(r^2+a^2-\rho^2) = r^6(a^3+\rho^3)^2\\
&\quad + r^4(a^2-\rho^2)(a^3+\rho^3)^2 - 2r^4(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\
&\quad + r^2(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)^2 - 2r^2(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\
&\quad + (a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2.
\end{aligned}\right.$$

De même

$$(19\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a^3-\rho^3)^2[-r^4 + 2r^2(a^2+\rho^2) - (a^2-\rho^2)^2](a^2-\rho^2+r^2)\\
&\quad = -r^6(a^3-\rho^3)^2 + 2r^4(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)^2 - r^4(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2\\
&\quad + 2r^2(a^2+\rho^2)(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2 - r^2(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)^2\\
&\quad - (a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2.
\end{aligned}\right.$$

et

$$
(19\ ter)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(a^3-\rho^3)[-r^4+2r^2(a^2+\rho^2)-(a^2-\rho^2)^2]\,[r^2(a^3+\rho^3)-(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)]\\
&\quad=-r^6(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)+2r^4(a^2+\rho^2)(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)\\
&\qquad+r^4(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2-r^2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a^2-\rho^2)^2\\
&\qquad-2r^2(a^2+\rho^2)(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2+(a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons par u_1, u_2, u_3 les premiers membres des équations (19). Il faut évaluer

$$\iint \frac{2u_1-u_2+2u_3}{r^6}\,\frac{d\rho\,dr}{\rho^5}.$$

J'évaluerai donc d'abord

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} \frac{2u_1-u_2+2u_3}{r^6}\,dr, \qquad \int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{2u_1-u_2+2u_3}{r^6}\,dr.$$

Je prendrai pour fonction de r ayant pour dérivée par rapport à r l'expression

$$\frac{2u_1-u_2+2u_3}{r^6},$$

la fonction suivante $F(r)$:

$$
\begin{aligned}
F(r) = {}& 2(a^3+\rho^3)^2 r-\frac{2}{r}(a^2-\rho^2)(a^3+\rho^3)^2+\frac{4}{r}(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\
&-\frac{2}{3r^3}(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)^2+\frac{4}{3r^3}(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\
&-\frac{2}{5r^5}(a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2+(a^3-\rho^3)^2 r+\frac{2}{r}(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)^2\\
&-\frac{1}{r}(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2+\frac{2}{3r^3}(a^2+\rho^2)(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2\\
&-\frac{1}{3r^3}(a^2-\rho^2)^2(a^3-\rho^3)^2-\frac{1}{5r^5}(a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2\\
&-2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)r-\frac{4}{r}(a^2+\rho^2)(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)\\
&-\frac{2}{r}(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2+\frac{2}{3r^3}(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a^2-\rho^2)^2\\
&+\frac{4}{3r^3}(a^2+\rho^2)(a^2-\rho^2)(a^3-\rho^3)^2-\frac{2}{5r^5}(a^2-\rho^2)^3(a^3-\rho^3)^2.
\end{aligned}
$$

On en tire

$$\begin{aligned}F(a+\rho) &= 2(a^3+\rho^3)^2(a+\rho) - 2(a-\rho)(a^3+\rho^3)^2 \\ &+ 4(a-\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) - \tfrac{2}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{a+\rho} \\ &+ \tfrac{4}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) - \tfrac{2}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{(a+\rho)^2} \\ &+ (a^3-\rho^3)^2(a+\rho) + 2(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{a+\rho} - (a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}(a^2+\rho^2)(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{(a+\rho)^2} - \tfrac{1}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{a+\rho} \\ &- \tfrac{1}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{(a+\rho)^2} - 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a+\rho) \\ &- 4(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) - 2(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}(a^2-a\rho+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a-\rho)^2 + \tfrac{4}{3}(a^2+\rho^2)(a-\rho)(a^3-\rho^3)\frac{1}{(a+\rho)^2} \\ &- \tfrac{2}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2\frac{1}{(a+\rho)^2}.\end{aligned}$$

Si l'on réunit les termes en $\frac{1}{(a+\rho)^2}$, on trouve qu'ils se réduisent à

$$(a^3-\rho^3)^2(a-\rho).$$

Si l'on réunit les termes en $\frac{1}{a+\rho}$, on trouve qu'ils se réduisent à

$$(a^3-\rho^3)^2(a+\rho).$$

On a donc

$$\begin{aligned}F(a+\rho) &= 2a(a^3-\rho^3)^2 + 4\rho(a^3+\rho^3)^2 + 4(a-\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) \\ &+ \tfrac{4}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) + 2\rho(a^3-\rho^3)^2 \\ &- 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a+\rho) - 4(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) \\ &- 2(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 + \tfrac{2}{3}(a^2-a\rho+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a-\rho)^2,\end{aligned}$$

ou bien

$$F(a+\rho) = 4\rho(a^3-\rho^3)^2 + 4\rho(a^3+\rho^3)^2 - 8\rho(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) = 16\rho^7.$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}F(a-\rho) &= 2(a^3+\rho^3)^2(a-\rho) - 2(a+\rho)(a^3+\rho^3)^2 + 4(a+\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) \\ &- \tfrac{2}{3}(a+\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) + \tfrac{4}{3}(a+\rho)^2(a^2+a\rho+\rho^2)(a^3+\rho^3) \\ &- \tfrac{2}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2 + (a^3-\rho^3)^2(a-\rho) \\ &+ 2(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) - (a+\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}(a^2+\rho^2)(a+\rho)(a^2+a\rho+\rho^2)^2 - \tfrac{1}{3}(a+\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) \\ &- \tfrac{1}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2 - 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a-\rho) \\ &- 4(a^2+\rho^2)(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) - 2(a+\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)(a+\rho)^2 + \tfrac{4}{3}(a^2+\rho^2)(a+\rho)(a^2+a\rho+\rho^2)^2 \\ &- \tfrac{2}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}F(a-\rho) = &-4\rho(a^3+\rho^3)^2-(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2\\ &+2(a^2+\rho^2)(a+\rho)(a^2+a\rho+\rho^2)^2-(a+\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)\\ &+2(a+\rho)^2(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)+4(a+\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\ &-2\rho(a^3-\rho^3)^2+2(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)\\ &-2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a-\rho)-4(a^2+\rho^2)(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)\\ &-2(a+\rho)(a^3-\rho^3)^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}F(a-\rho) &= -4\rho(a^3+\rho^3)^2+(a+\rho)(a^3-\rho^3)^2+(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2\\ &\quad -2(a-\rho)(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)+4(a+\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3)\\ &\quad -2\rho(a^3-\rho^3)^2-2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a-\rho)-2(a+\rho)(a^3-\rho^3)^2\\ &= -4\rho(a^3+\rho^3)^2-4\rho(a^3-\rho^3)^2+8\rho(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)\\ &= -16\rho^7.\end{aligned}$$

Comme $F(r)$ est une fonction impaire de r, on aura

$$F(\rho-a)=16\rho^7.$$

On a donc à évaluer

$$\int_{R_1}^{a}\frac{d\rho}{\rho^5}32\rho^7+\int_{a}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho^5}\times 0=\frac{32}{3}(a^3-R_1^3),$$

et par conséquent dans le premier membre de l'équation (18) le terme en E est

$$\frac{16E}{3}(a^3-R_1^3). \tag{20}$$

Pour avoir le coefficient de B, il faut d'abord évaluer l'intégrale

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho}\frac{2u_1-u_2-3u_3}{5r}\,dr=F_1(a,\rho).$$

On voit aisément que l'intégrale où la limite inférieure $a-\rho$ est changée en $\rho-a$ est la même, car la fonction sous le signe somme donne comme intégrale indéfinie une fonction paire. On voit de plus que cette intégrale est une fonction entière de a et de ρ du douzième degré. Le terme en B étant

$$B\int_{R_1}^{R_2}F_1(a,\rho)\frac{d\rho}{\rho^5},$$

on aura le terme indépendant de a en prenant dans F_1 le terme en ρ^{12}, ce qui fournit l'expression

$$B'(R_2^8 - R_1^8), \tag{21}$$

et l'on aura le terme en a^3 en prenant dans F_1 le terme en ρ^9, ce qui fournit l'expression

$$B''a^3(R_2^5 - R_1^5). \tag{22}$$

Pour avoir le coefficient de C il faut évaluer les intégrales

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} \frac{-2u_1 + u_2 + 6u_3}{32r^2}\,dr = F_2(a, \rho),$$

$$\int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{-2u_1 + u_2 + 6u_3}{32r^2}\,dr = \Phi_2(a, \rho).$$

On voit encore aisément que $F_2(a, \rho)$ et $\Phi_2(a, \rho)$ sont des fonctions entières de a et de ρ du onzième degré. Le terme en C sera

$$C\int_{R_1}^{a} F_2(a, \rho)\frac{d\rho}{\rho^5} + C\int_{a}^{R_2} \Phi_2(a, \rho)\frac{d\rho}{\rho^5}.$$

On aura le terme indépendant de a en prenant dans $F_2(a, \rho)$ et $\Phi_2(a, \rho)$ les termes en ρ^{11}, et l'on aura l'expression

$$C'R_1^7 + C''R_2^7. \tag{23}$$

Le terme en a^3 sera de même

$$C'''a^3R_1^4 + C^{\text{IV}}a^3R_2^4. \tag{24}$$

On verra de même que les termes en A et D fourniront comme terme indépendant l'expression

$$F'R_1^5 + F''R_2^5, \tag{25}$$

et comme terme en a^3 l'expression

$$F'''a^3R_1^2 + F^{\text{IV}}a^3R_2^2. \tag{26}$$

On devra donc avoir les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{16E}{3}R_1^3 + B'(R_2^8 - R_1^8) + C'R_1^7 + C''R_2^7 + F'R_1^5 + F''R_2^5 &= 0, \\ \frac{16E}{3} \quad + B''(R_2^5 - R_1^5) + C'''R_1^4 + C^{\text{IV}}R_2^4 + F'''R_1^2 + F^{\text{IV}}R_2^2 &= 1. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

les quantités B′, C′, C″, F′, F″, B″, C‴, C$^{\text{iv}}$, F‴, F$^{\text{iv}}$ étant des constantes. Remplaçons, dans ces équations, R_2 par sa valeur

$$R_2 = (R^3 + R_1^3)^{\frac{1}{3}}$$

et l'on aura les deux équations suivantes qui doivent être satisfaites quel que soit R_1 :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & -16\frac{E}{3}R_1^3 + B'(R^3+R_1^3)^{\frac{8}{3}} - B'R_1^8 + C'R_1^7 + C''(R^3+R_1^3)^{\frac{7}{3}} \\ & \qquad\qquad + F'R_1^5 + F''(R^3+R_1^3)^{\frac{5}{3}} = 0, \\ & \frac{16E}{3} + B''(R^3+R_1^3)^{\frac{5}{3}} - B''R_1^5 + C'''R_1^4 + C^{\text{iv}}(R^3+R_1^3)^{\frac{4}{3}} \\ & \qquad\qquad + F'''R_1^2 + F^{\text{iv}}(R^3+R_1^3)^{\frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}\right.$$

Supposant $R_1 < R$ et developpant en série les radicaux tels que, par exemple,

$$(R^3+R_1^3)^{\frac{8}{3}} = R^8\left[1+\left(\frac{R_1}{R}\right)^3\right]^{\frac{8}{3}} = R^8\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{R_1}{R}\right)^3+\ldots\right],$$

on voit aisément que tous les coefficients devraient être nuls et que, par suite, il est impossible de satisfaire à la seconde des équations (28).

5. Ainsi, la recherche d'une loi d'attraction, point matériel à point matériel, ne conduit qu'à des impossibilités. Bien que certaines hypothèses aient été faites au courant des calculs, il semble que l'on soit plutôt amené à croire à l'incompatibilité de la fluidité de l'atome et de l'existence d'une loi d'attraction, point matériel à point matériel. C'est ce que je vais démontrer.

Soit un atome variable de forme et soient M et M′ deux points matériels de cet atome. Supposons-le seul au monde ; le mouvement qu'il prendra proviendra seulement de son action sur lui-même. Soient x, y, z les coordonnées de M ; x', y', z' celles de M′ ; u, v, w les projections de la vitesse de M ; u', v', w' celles de la vitesse de M′ ; u, v, w sont certaines fonctions de x, y, z et u', v', w' sont les mêmes fonctions de x', y', z'. Soient

$$\begin{aligned} & X(x,y,z,x',y',z',u,v,w,u',v',w')\,\rho\,dv\,dv', \\ & Y(x,y,z,x',y',z',u,v,w,u',v',w')\,\rho\,dv\,dv', \\ & Z(x,y,z,x',y',z',u,v,w,u',v',w')\,\rho\,dv\,dv' \end{aligned}$$

les projections de la force provenant de l'action de M' sur M, dv étant l'élément de volume de M, dv' celui de M', ρ la densité naturellement constante.

Les équations du mouvement sont

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

$$\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}=\iiint \mathrm{X}\,dx'\,dy'\,dz',$$

$$\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}=\iiint \mathrm{Y}\,dx'\,dy'\,dz',$$

$$\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}=\iiint \mathrm{Z}\,dx'\,dy'\,dz',$$

les intégrales triples étant étendues au volume de l'atome.

Dérivons la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z; on en tire en ajoutant

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+2\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}+2\frac{du}{dz}\frac{dw}{dx}+2\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\\&\qquad=\iiint\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}+\frac{d\mathrm{Y}}{dy}+\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)dx'\,dy'\,dz';\end{aligned}\right.$$

$\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{Y}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{Z}}{dz}$ représentent des différentielles totales des fonctions X, Y, Z qui contiennent x, y, z explicitement d'abord, puis dans u, v, w.

Je vais montrer qu'il est impossible de trouver des fonctions X, Y, Z satisfaisant à cette équation; pour cela je remarquerai que, d'une part, les fonctions u, v, w ne sont assujetties qu'à la relation

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

et que d'autre part, si nous supposons ces fonctions définies pour une étendue suffisante de l'espace, on peut faire varier la forme de l'atome, de façon à rendre arbitraire le contour de la surface à l'intérieur de laquelle est prise l'intégrale triple pourvu toutefois que le volume qu'elle comprend ne varie pas; car il est à remarquer que les fonctions X, Y, Z peuvent contenir ce volume; ce serait une constante caractéristique dans ces fonctions. Alors, si nous précisons les fonctions u, v, w, l'équation (29) devient de la forme

$$F(x, y, z) = \iiint \Phi(x, y, z, x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz',$$

F et Φ étant des fonctions convenables de leurs variables, et, si nous précisons alors les valeurs de x, y, z, l'équation précédente devient

$$\iiint H(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz' = K,$$

K étant une constante indépendante de la surface limitant l'intégrale triple, H une fonction de x', y', z' convenablement choisie. Je dis que cette fonction ne peut être qu'une constante. Considérons, en effet, deux points M_1 et M_2; faisons passer par ces deux points une surface comprenant le volume de l'atome. Si j'augmente d'une part la surface d'un petit volume v autour de M_1, et d'autre part, si je la diminue d'un petit volume égal autour de M_2, l'intégrale

$$\iiint H(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$$

s'augmente sensiblement de

$$vH(x'_1, y'_1, z'_1)$$

et diminue de

$$vH(x'_2, y'_2, z'_2);$$

il faut donc, puisque la valeur de l'intégrale doit être constante, que l'on ait

$$H(x'_1, y'_1, z'_1) = H(x'_2, y'_2, z'_2).$$

Donc la fonction Φ ne devra pas contenir x', y', z', et par suite l'expression

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

ne devra pas contenir x', y', z', ni u', v', w'. Or elle contient les dérivées des quantités u, v, w au premier degré seulement. L'équation (29) ne pourra donc jamais être satisfaite. C. Q. F. D.