Bulletin de la S. M. F.

G. Kobb

Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 210-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__210_0>

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE;

Par M. G. Kobb.

Le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, dans le cas de forces autres que la pesanteur, a été très peu étudié. Il n'y a que le cas signalé par M. Darboux, dans une Note de la *Mécanique* de Despeyrous, où l'on ait réussi à intégrer les équations du mouvement. Dans ce cas, l'ellipsoïde central est de révolution et les surfaces de niveau sont des surfaces de révolution dont l'axe passe par le point fixe. Quand l'ellipsoïde central n'est pas de révolution, on ne peut pas, en général, intégrer les équations de mouvement, mais on en connaît trois intégrales, savoir : l'intégrale des forces vives, celle des aires et l'intégrale particulière des cosinus directeurs. M. F. de Brun [1] a trouvé une forme spéciale de la fonction de force qui permet d'obtenir encore une intégrale, mais il n'a pas remarqué qu'on peut alors achever l'intégration. Je me propose ici d'indiquer la méthode à suivre, moins parce que le problème présente en lui-même beaucoup d'intérêt, que parce qu'elle est aussi applicable au problème beaucoup plus important où la force agissante est la pesanteur.

Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois axes rectangulaires fixes, dont l'origine est au point fixe. Dans le cas considéré par M. de Brun, la fonction de force a la forme

$$\tfrac{1}{2}k\zeta^2 + \varphi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Soient Ox, Oy, Oz les axes mobiles et γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de l'axe de z; les équations d'Euler seront, en employant les notations usuelles,

$$A\,\frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - k\gamma'\gamma''),$$

$$B\,\frac{dq}{dt} = (C - A)(rp - k\gamma''\gamma),$$

$$C\,\frac{dr}{dt} = (A - B)(pq - k\gamma\gamma').$$

---

(1) *Académie des Sciences de Stockholm,* septembre 1893.

Ces équations, jointes aux trois suivantes

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma' r - \gamma'' q, \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p - \gamma r, \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = \gamma q - \gamma' p,$$

déterminent les six inconnues p, q, r, γ, γ', γ''.

Le principe des forces vives donne l'intégrale

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + k(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) = k_1,$$

et celui des aires donne

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = k_2.$$

On a, de plus,

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Enfin, M. de Brun a trouvé une quatrième intégrale, savoir

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - k(BC\gamma^2 + CA\gamma'^2 + AB\gamma''^2) = k_3.$$

Nous verrons qu'avec ces quatre intégrales on peut ramener le problème à des quadratures.

Remarquons d'abord que, si l'on met les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 6,$$

on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=6} \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

Le système proposé admet, par conséquent, le multiplicateur $M = \text{const.} = 1$. Ainsi, nous pouvons obtenir une cinquième intégrale en employant le principe du dernier multiplicateur; et, en exprimant avec ces cinq intégrales cinq de nos variables en fonction d'une seule, nous aurons enfin le temps par une quadrature. Mais la cinquième intégrale n'étant pas très simple, il est mieux de procéder autrement. Introduisons, au lieu de p, q, r, γ, γ', γ', les variables canoniques

$$\theta, \quad \varphi, \quad \psi; \quad \theta_1 = \frac{\partial T}{\partial \theta'}, \qquad \varphi_1 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad \psi_1 = \frac{\partial T}{\partial \psi'},$$

où θ, φ et ψ sont les angles d'Euler et T la demi-force vive; on aura

$$
\begin{aligned}
p &= \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi, & \gamma &= \sin\varphi \sin\theta,\\
q &= \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi, & \gamma' &= \cos\varphi \sin\theta,\\
r &= \varphi' + \psi' \cos\theta; & \gamma'' &= \cos\theta;
\end{aligned}
$$

ou, en fonction de θ_1, φ_1, ψ_1,

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) + \theta_1 \cos\varphi\right],\\
q &= \frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) - \theta_1 \sin\varphi\right],\\
r &= \frac{\varphi_1}{C}.
\end{aligned}
$$

Avec les nouvelles variables, nos intégrales deviennent

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
H_1 = {} & \frac{1}{A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) + \theta_1\cos\varphi\right]^2\\
& + \frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) - \theta_1\sin\varphi\right]^2 + \frac{1}{C}\varphi_1^2\\
& + k\,[A\sin^2\varphi\sin^2\theta + B\cos^2\varphi\sin^2\theta + C\cos^2\theta] = k_1,\\
& \qquad H_2 = \psi_1 = k_2.\\
H_3 = {} & \left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) + \theta_1\cos\varphi\right]^2\\
& + \left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\theta) - \theta_1\sin\varphi\right]^2 + \varphi_1^2\\
& - k\,[BC\sin^2\varphi\sin^2\theta + CA\cos^2\varphi\sin^2\theta + AB\cos^2\theta] = k_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous observons d'abord que la variable ψ n'entre pas explicitement. Formons les parenthèses de Poisson

$$[H_1, H_2], \quad [H_1, H_3], \quad [H_2, H_3].$$

On voit tout de suite que la première et la troisième sont nulles. Quant à la seconde, elle doit être nulle, parce qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour que $(H_3 = k_3)$ soit une intégrale de notre système. Les trois parenthèses de Poisson étant nulles, si nous remplaçons les variables θ_1, φ_1 et ψ_1 par $\frac{\partial W}{\partial\theta}$, $\frac{\partial W}{\partial\varphi}$

et $\frac{\partial W}{\partial \psi}$, les trois équations aux dérivées partielles

$$H_1\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \theta, \quad \varphi\right) = k_1,$$

$$H_2 = \frac{\partial W}{\partial \psi} = k_2,$$

$$H_3\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \theta, \quad \varphi\right) = k_3$$

sont compatibles, et la solution commune sera

$$W = \int (\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi + \psi_1 d\psi),$$

où l'on a remplacé θ_1, φ_1, ψ_1 par leurs valeurs en θ et φ données par les équations (3). L'expression

$$\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi + \psi_1 d\psi$$

est bien une différentielle exacte. Les équations (3) renferment trois constantes arbitraires, de sorte que W est une solution complète de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton et de Jacobi, et l'on aura la solution générale de notre système en différentiant W par rapport aux constantes k_1, k_2, k_3.

L'équation $H_2 = k_2$ nous donne $\psi_1 = k_2$, de sorte qu'il vient

$$W = k_2 \psi + \int (\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi).$$

En substituant la valeur $\psi_1 = k_2$ dans les intégrales $H_1 = k_1$, $H_3 = k_3$, nous aurons deux équations du second degré en θ_1 et ψ_1, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Éliminons φ_1; nous aurons une équation du quatrième degré en θ_1 et pour φ_1 une fonction rationnelle de θ_1, $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Posons

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = x, \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = y, \qquad \theta_1 = z,$$

nous aurons

$$\varphi_1 = R(z, x, y), \qquad f(z, x, y) = 0,$$

et enfin

$$W = k_2 \psi + 2\int \left[\frac{z}{1 + x^2} dx + \frac{R(x, y, z)}{1 + y^2} dy\right]. \tag{4}$$

L'intégrale qui entre dans l'expression de W est une intégrale de différentielle totale appartenant à la surface $f(x, y, z) = 0$. Formons maintenant, d'après Jacobi, les intégrales de notre système canonique; on aura

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial k_1} = t + k'_1 = 2\displaystyle\int\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_1}}{1+x^2}dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_1}}{1+y^2}dy\right), \\ \dfrac{\partial W}{\partial k_2} = \qquad k'_2 = \psi + 2\displaystyle\int\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_2}}{1+x^2}dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_2}}{1+y^2}dy\right), \\ \dfrac{\partial W}{\partial k_3} = \qquad k'_3 = 2\displaystyle\int\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_3}}{1+x^2}dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_3}}{1+y^2}dy\right). \end{cases}$$

L'équation $f(x, y, z) = 0$, comme la fonction rationnelle R, renferme k_1, k_2 et k_3; on aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial k_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial k_1} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial k_1} = \left(\frac{\partial R}{\partial k_1}\right) + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial k_1} = \frac{\frac{\partial R}{\partial k_1}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial k_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

et les formules analogues. Les dérivées partielles de z et de R, par rapport à k_1, k_2, k_3, sont donc des fonctions rationnelles de x, y, z.

Par conséquent, nous pouvons écrire le système (5) de la façon suivante :

$$(6)\quad \begin{cases} t + k'_1 = \displaystyle\int[P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy], \\ \qquad k'_3 = \displaystyle\int[P_3(x, y, z)\,dx + Q_3(x, y, z)\,dy], \\ \psi - k'_2 = \displaystyle\int[P_2(x, y, z)\,dx + Q_2(x, y, z)\,dy], \end{cases}$$
$$f(x, y, z) = 0,$$

les P et les Q étant des fonctions rationnelles.

La solution générale de nos équations de mouvement est ainsi obtenue à l'aide de trois intégrales de différentielles totales attachées à la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$. Il me semble que c'est la première fois que ces intégrales, introduites dans la science par M. Picard, se sont présentées dans l'étude d'un problème de Mécanique.

Passons maintenant au problème, beaucoup plus important, où la force agissante est la pesanteur. Avec les mêmes notations, les équations d'Euler sont

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A}\frac{dp}{dt} = (\mathrm{B}-\mathrm{C})\,qr + \mathrm{M}g(y_0\gamma'' - z_0\gamma'),$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \mathrm{B}\frac{dq}{dt} = (\mathrm{C}-\mathrm{A})\,pr + \mathrm{M}g(z_0\gamma - x_0\gamma''),$$

$$(\mathrm{C}) \qquad \mathrm{C}\frac{dr}{dt} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})\,pq + \mathrm{M}g(x_0\gamma' - y_0\gamma),$$

où M est la masse du corps et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité. Les trois autres équations sont les mêmes qu'auparavant. On connaît les intégrales

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &= \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{M}g(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = k_1,\\ \mathrm{H}_2 &= \mathrm{A}p\gamma' + \mathrm{B}q\gamma' + \mathrm{C}r\gamma'' = k_2,\\ &\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \end{aligned}$$

Dans un Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences au concours du prix Bordin pour l'année 1894, M. R. Liouville a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une autre intégrale algébrique $\mathrm{H}_3 = k_3$. Cette intégrale une fois obtenue, nous pouvons achever l'intégration en employant la même méthode que je viens d'exposer.

En effet, après avoir introduit les angles d'Euler et les variables canoniques θ_1, φ_1, ψ_1, nous aurons les trois intégrales

$$\mathrm{H}_1 = k_1, \qquad \mathrm{H}_2 = \psi_1 = k_2, \qquad \mathrm{H}_3 = k_3,$$

qui sont, évidemment, telles que les expressions

$$[\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2], \qquad [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_3], \qquad [\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3]$$

sont identiquement nulles. Alors, il n'y a qu'à répeter le même raisonnement que ci-dessus et nous aurons la solution générale sous la forme (6), c'est-à-dire à l'aide de trois intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique. On aura ainsi la solution du problème de la rotation d'un corps grave suspendu à un point fixe, dans le cas où il est possible d'obtenir la solution sous une forme finie.