BULLETIN DE LA S. M. F.

P. ADAM

Sur l’équation d’Euler et les lignes de courbure de l’ellipsoïde

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 205-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__205_0>

SUR L'ÉQUATION D'EULER ET SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

Par M. Paul Adam.

L'équation d'Euler s'est présentée dans diverses questions de Géométrie qui ont permis d'en donner des solutions *géométriques*.

Lagrange, par exemple, a intégré cette équation en partant du triangle sphérique; Jacobi, par la considération d'un système de deux cercles, en a fait connaître la solution sous une forme trigonométrique très simple; plus récemment, M. Darboux (1) a obtenu une forme géométrique nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler en prenant une famille d'ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers; M. Darboux a donné en même temps une nouvelle méthode très ingénieuse pour l'intégration de cette équation différentielle par l'analyse.

Je vais indiquer, dans cette Note, un autre procédé d'intégration géométrique de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'ellipsoïde, et faire connaître une propriété remarquable des lignes de courbure d'une famille d'ellipsoïdes convenablement choisie.

En prenant, pour les coordonnées curvilignes d'une surface réelle, les paramètres imaginaires conjugués α et β des génératrices rectilignes de la sphère, dans la représentation sphérique faite à la manière de Gauss, cette surface a pour équation tangentielle

$$(\alpha+\beta)X + i(\beta-\alpha)Y + (\alpha\beta-1)Z + \xi = 0,$$

ξ désignant une certaine fonction de α et de β, et ses lignes de courbure sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}\,d\alpha^2 = \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}\,d\beta^2. \tag{1}$$

S'il s'agit de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

(1) *Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques* (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. IV; 1867).

la fonction ξ et les coordonnées x, y, z de la surface se calculent, en fonction de α et de β, au moyen des équations

$$\frac{\alpha+\beta}{\frac{x}{a^2}} = \frac{i(\beta-\alpha)}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\alpha\beta-1}{\frac{z}{c^2}} = -\xi,$$

et il vient

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \sqrt{a^2(\alpha+\beta)^2 - b^2(\beta-\alpha)^2 + c^2(\alpha\beta-1)^2}, \\ x^2, y^2, z^2 &= \frac{a^4(\alpha+\beta)^2,\ -b^4(\beta-\alpha)^2,\ c^4(\alpha\beta-1)^2}{\xi^2}. \end{aligned} \right.$$

En faisant l'hypothèse habituelle $a > b > c$, et en posant

$$(3)\qquad \frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)} = m^2,$$

m^2 étant une quantité supérieure à l'unité, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, on trouve, d'après l'équation (1), que les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont définies, dans le système (α, β), par l'équation

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - 2m^2\alpha^2 + 1}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^4 - 2m^2\beta^2 + 1}}.$$

Appelons j et k les deux racines réelles et positives du trinome $t^2 - 2m^2t + 1$, j étant la plus grande, de sorte que

$$j = m^2 + \sqrt{m^4-1}, \qquad k = m^2 - \sqrt{m^4-1};$$

il suffit de poser

$$\alpha = x\sqrt{k}, \qquad \beta = y\sqrt{k},$$

pour ramener l'équation (4) à la forme que lui a donnée Euler

$$(5)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

D'après cela, si l'on possède, sous forme finie, entre x et y, l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde, cette équation sera l'intégrale de (5).

Or les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont situées sur les surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0\,;$$

en vertu des relations (2), α et β doivent donc vérifier, le long de ces lignes de courbure, l'équation

$$(6)\qquad \frac{a^2(\alpha+\beta)^2}{a^2+\lambda}-\frac{b^2(\beta-\alpha)^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2(\alpha\beta-1)^2}{c^2+\lambda}=0,$$

de sorte que l'intégrale de l'équation (5) d'Euler revêt la forme *nouvelle* suivante :

$$(7)\qquad \frac{a^2k(x+y)^2}{a^2+\lambda}-\frac{b^2k(y-x)^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2(kxy-1)^2}{c^2+\lambda}=0,$$

λ désignant la constante arbitraire.

Ce résultat (7) appelle de suite une remarque qui nous permettra tout à l'heure d'énoncer un théorème : (7) est l'intégrale de l'équation d'Euler *en donnant à* a^2, b^2, c^2 *des valeurs assujetties à la seule condition* (3), laquelle s'écrit, en introduisant k à la place de m,

$$\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)}=\frac{k^2+1}{2k},$$

ou encore

$$(8)\qquad \frac{(1-k)^2}{a^2}-\frac{(1+k)^2}{b^2}+\frac{4k}{c^2}=0\,;$$

l'équation (7) doit donc pouvoir être mise sous forme d'une constante arbitraire égalée à une fonction ne dépendant que de x, y et k. Le calcul montre en effet que l'expression

$$\frac{1}{c^2(a^2-b^2)}\left[\frac{2a^2b^2c^2}{\lambda}+c^2(a^2+b^2)\right]$$

(qui n'est autre qu'une constante arbitraire) tirée de (7) ne contient que x, y et λ.

De même que l'équation (7), l'équation (6) ne contient au fond que α, β, k et une constante arbitraire μ, lorsque a^2, b^2 et c^2 sont liés par la relation (8); cela veut dire que l'équation (6) constitue toujours la même relation entre α et β lorsque a^2, b^2 et c^2 varient en satisfaisant à (8), où k est regardé comme une constante.

Géométriquement, ce fait se traduit de la manière suivante : les plans tangents aux ellipsoïdes dont les axes sont liés par la relation (8), où k est une constante, sont parallèles quand on se déplace le long des lignes de courbure qui correspondent sur ces surfaces à une même valeur de μ.

On peut supposer que le grand axe $2a$ soit le même pour tous ces ellipsoïdes; alors la relation (8) montre que si b décroît de a à zéro, il en est de même de c, de sorte qu'on obtient une famille d'ellipsoïdes intérieurs les uns aux autres, partant de la sphère de rayon a pour se réduire à leur grand axe commun :

Sur ces ellipsoïdes, les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

Ce résultat est remarquable, car, si l'on se propose de chercher directement s'il existe une telle famille d'ellipsoïdes, les équations du problème ne montrent pas immédiatement la possibilité d'une solution.

Tous les résultats ci-dessus s'étendent évidemment aux deux hyperboloïdes.

Les deux paraboloïdes permettent aussi d'obtenir une forme nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler.