BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 103-106

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__103_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE PAR CERTAINES CONDITIONS AUX LIMITES;

Par M. Émile Picard.

1. Une question posée par M. Carvallo dans le dernier numéro de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (question **173**) me remet en mémoire quelques remarques que j'ai faites autrefois sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Considérons l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

a, b, c étant des fonctions continues de x et y. Dans mon Mémoire sur les approximations successives (*Journal de Mathématiques*, 1890, Chap. II), j'ai montré comment une méthode d'approximations permettait d'intégrer cette équation en se donnant diverses conditions aux limites. Prenons maintenant le cas suivant : on veut avoir l'intégrale de cette équation telle que

$$(1) \qquad \begin{cases} z = f(x) & (\text{pour } y = 0), \\ z = \varphi(x) & (\text{pour } y = x); \end{cases}$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions arbitrairement données. On a seulement, bien entendu, $f(0)=\varphi(0)$.

2. Je fais d'abord les remarques suivantes. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, est évidemment

$$z=f(x)+\varphi(y)-f(y).$$

Ensuite l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\mathrm{P}(x,y),$$

P étant une fonction donnée et telle que

$$(2)\qquad \begin{cases} u=0 & (\text{pour } y=0),\\ u=0 & (\text{pour } y=x),\end{cases}$$

se réduit à

$$u=\int_0^y d\eta\int_y^x \mathrm{P}(\xi,\eta)\,d\xi.$$

3. Ceci posé, je forme les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\,\partial y}=0,\\
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}=a\,\frac{\partial z_0}{\partial x}+b\,\frac{\partial z_0}{\partial y}+c\,z_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}=a\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+c u_{n-1}.
\end{aligned}$$

On calcule z_0 de façon qu'il satisfasse aux conditions (1), et les u de façon qu'ils satisfassent aux conditions (2). Il est aisé d'établir que *la série*

$$(3)\qquad z_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

résout le problème proposé. Si les a, b, c ainsi que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont bien déterminées et continues dans un rectangle parallèle aux axes et comprenant l'origine, *la série* (3) *convergera dans ce rectangle.* Si, en particulier, les fonctions précédentes sont bien déterminées et continues dans tout le plan (x, y), il en sera de même de la solution que nous venons d'obtenir.

4. Le problème précédent pourrait être généralisé. On peut se proposer de trouver l'intégrale z de l'équation (E) telle que

$$z = f(x) \quad (\text{pour } y = \alpha x),$$
$$z = \varphi(x) \quad (\text{pour } y = \beta x),$$
$$[f(0) = \varphi(0)];$$

α et β sont deux constantes réelles, et l'on doit supposer que α^2 est différent de β^2. Les mêmes considérations sont applicables; les choses se présentent toutefois moins simplement, car l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, ne s'obtient pas ici immédiatement comme au n° 2. Soit, en effet,

$$z = \lambda(x) + \mu(y);$$

on aura

$$\lambda(x) + \mu(\alpha x) = f(x),$$
$$\lambda(x) + \mu(\beta x) = \varphi(x),$$

et, par suite, l'équation fonctionnelle

$$\mu(\alpha x) - \mu(\beta x) = f(x) - \varphi(x).$$

Si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur

$$\chi(x) = f(x) - \varphi(x),$$

on ne peut résoudre cette équation fonctionnelle. Tout d'abord nous ne diminuons pas la généralité en supposant $\alpha = 1$, $|\beta| < 1$. Si de plus on suppose la fonction $\chi(x)$ telle que

$$|\chi(x)| < A\,|x|^p,$$

A et p étant des constantes positives, on pourra prendre

$$\mu(x) = \chi(x) + \chi(\beta x) + \ldots + \chi(\beta^n x) + \ldots$$

et la solution du problème s'achèvera aisément.

5. La question posée par M. Carvallo, dont j'ai parlé plus haut, était relative à l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - u,$$

se réduisant pour $r = 0$ à une fonction $f(t)$, et à $f(0)$ pour $r = t$. Un simple changement de variables ramène ce problème à celui que nous avons traité d'une manière générale au n° 3.