BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 52-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__52_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

Par M. Émile Picard.

1. On considère le système de n équations différentielles

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \\ \dfrac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w), \end{cases}$$

où les fonctions f sont des fonctions continues des quantités réelles x, u, v, ..., w dans le voisinage de x_0, u_0, v_0, ..., w_0, définies quand x, u, ..., w restent respectivement comprises dans les intervalles

$$(x_0 - a,\ x_0 + a),\quad (u_0 - b,\ u_0 + b),\quad \ldots,\quad (w_0 - b,\ w_0 + b),$$

a et b étant deux constantes positives. De plus, on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives A, B, ..., L telles que

$$|f_i(x, u', v', \ldots, w') - f_i(x, u, v, \ldots, w)| < \mathrm{A}\,|u' - u| \\ + \mathrm{B}\,|v' - v| + \ldots + \mathrm{L}\,|w' - w|,$$

x, ainsi que les u, v, ..., w restant dans les intervalles indiqués. Soit enfin M la valeur absolue maxima de la fonction pour le domaine dans lequel elle est définie. J'ai établi autrefois (*voir* mon *Traité d'Analyse,* t. II, p. 301) qu'on pouvait, en procédant par approximations successives, obtenir sous forme de séries convergentes les intégrales du système (S) prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs u_0, v_0, ..., w_0. Ces séries convergent certainement dans l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, δ étant la plus petite des *trois* quantités a, $\frac{b}{\mathrm{M}}$, $\frac{1}{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \ldots + \mathrm{L}}$.

Tout récemment, M. Lindelöf[1] vient de montrer qu'on pouvait supprimer la troisième expression en modifiant seulement très peu les raisonnements tout élémentaires dont j'avais fait usage, et M. Bendixon [2] était arrivé, de son côté, par une autre voie, au même résultat. On peut donc dire que la convergence des séries fournies par les approximations successives correspond à la plus petite des *deux* quantités a et $\frac{b}{\mathrm{M}}$.

L'intervention de la seconde de ces deux quantités provient de ce que les valeurs de u, ..., w données par les approximations successives ne doivent pas sortir du champ pour lequel les fonctions f sont définies. Si, notamment, les fonctions f sont définies pour toute valeur de u, v, ..., w, nous n'aurons pas à nous préoccuper du quotient $\frac{b}{\mathrm{M}}$, cela, toutefois, sous la réserve de l'exis-

---

(1) E. Lindelöf (*Comptes rendus,* 26 février 1894).

(2) I. Bendixon (Académie des Sciences de Stockholm, novembre 1893).

tence des quantités finies A, ..., L qui continuent à intervenir dans les raisonnements, si elles ne figurent plus dans les conclusions.

Toutes ces considérations s'étendent d'elles-mêmes au cas où les fonctions seraient définies pour des valeurs complexes des lettres dont elles dépendent. Dans ce qui va suivre, la variable x restera réelle, mais les f pourront dépendre d'éléments complexes, et les fonctions $u, v, \ldots, w$ seront des fonctions complexes d'une variable réelle. On doit alors, dans ce qui précède, remplacer les valeurs absolues par des modules.

2. Appliquons ces généralités aux équations différentielles linéaires. L'équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + A_m(x)y = 0$$

rentre dans les conditions d'application de la méthode précédente. Si, dans l'intervalle $(0, a)$, les coefficients $A_1, \ldots, A_m$ sont des fonctions continues de x, nous pouvons bien trouver les quantités déterminées A, B, ..., L du paragraphe précédent, et *les approximations successives donneront une série convergente pour toute intégrale dans l'intervalle* $(0, a)$. De plus, si nous désignons, comme nous le faisons d'habitude, cette série par

$$(\Sigma) \qquad y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

on aura, d'après la théorie générale,

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{H^n x^n}{1.2\ldots n} \qquad (H = A + B + \ldots + L).$$

L'expression analytique de toute intégrale, donnée par la méthode des approximations successives, et *valable pour tout intervalle dans lequel les coefficients* $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ *sont continus,* permet de démontrer facilement quelques théorèmes généraux et de faire diverses recherches sur les équations linéaires.

3. Supposons que les coefficients $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ dépendent d'un paramètre arbitraire k, et qu'ils soient, pour x variant entre 0 et a, des fonctions entières de ce paramètre, c'est-à-dire holo-

morphes dans tout le plan de la variable complexe k. C'est une circonstance qui se présentera souvent, particulièrement en Physique mathématique. Je me propose de montrer que *toute intégrale de l'équation est, pour x variant entre* o *et a, une fonction entière de k.*

Chaque terme de la série (Σ) est manifestement une fonction entière de k; il faut établir que la série sera aussi une fonction entière. Supposons que k reste à l'intérieur d'un cercle C de rayon d'ailleurs arbitraire ayant l'origine pour centre; dans ces conditions, la quantité H aura un certain maximum, que nous désignerons par la même lettre. Nous avons donc une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont chaque terme est une fonction holomorphe de k dans C, et l'on a de plus

$$|u_n| < \frac{H^n a^n}{1.2\ldots n}. \tag{1}$$

Ceci posé, la formule fondamentale de Cauchy donne

$$u_n(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_n(z)\,dz}{z-k},$$

et l'on aura, par suite, puisque la série des u est d'après (1) uniformément convergente,

$$u_0(k) + \ldots + u_n(k) + \ldots = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_0(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots}{z-k}\,dz,$$

ce qui montre que le premier membre est une fonction holomorphe de k dans C, comme nous voulions l'établir.

4. Une seconde application de la méthode des approximations successives nous sera fournie par les équations linéaires à coefficients périodiques. Bornons-nous, pour abréger, à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_2(x)y = 0,$$

et supposons que les fonctions A_1 et A_2 soient continues pour toute valeur réelle de x et *admettent la période* ω.

Il est bien connu qu'il y a, en général, un système d'intégrales se reproduisant multipliées par des constantes μ_1 et μ_2 quand on change x en $x+\omega$. La formation de l'équation du second degré donnant μ_1 et μ_2 est un problème important et difficile dans la théorie des équations à coefficients périodiques. On peut procéder comme il suit. Partons de deux solutions arbitraires $f_1(x), f_2(x)$, représentées par les développements en séries, *valables pour toute valeur réelle de* x, que fournissent les approximations successives. Nous pouvons considérer ces solutions comme connues. On cherche alors une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

qui se reproduise à un facteur constant près, par le changement de x en $x+\omega$. Il faut, pour cela, avoir la substitution résultant du changement de x en $x+\omega$ dans f_1 et f_2, c'est-à-dire les coefficients a, b, c, d tels que

$$f_1(x+\omega) = af_1(x) + bf_2(x),$$
$$f_2(x+\omega) = cf_1(x) + df_2(x).$$

On aura

$$f_1(\omega) \;\; = af_1(0) + bf_2(0),$$
$$f_1(2\omega) = af_1(\omega) + bf_2(\omega);$$

ces deux équations donnent a et b, et l'on aura pareillement c et d.

Quant à l'équation donnant μ_1 et μ_2, on sait qu'elle se réduit à

$$\begin{vmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Les constantes a, b, c, d peuvent donc être calculées *numériquement* avec telle approximation que l'on veut. De plus, si les coefficients $A_1(x)$ et $A_2(x)$ dépendent d'un ou plusieurs paramètres, on pourra connaître la façon dont a, b, c, d dépendent de ce paramètre, puisque l'on a une représentation, non seulement *numérique,* mais aussi *analytique* des deux solutions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ dont on est parti.

Un cas d'exception peut se rencontrer dans le calcul précédent : c'est celui où l'on aurait

$$\frac{f_1(0)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2(0)}{f_2(\omega)};$$

mais alors on a une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \omega$, et cette solution se reproduit précisément, à un facteur constant près, quand on change x en $x + \omega$.

5. Les calculs précédents peuvent être employés pour la solution d'une question d'apparence différente, mais identique au fond. Prenons, en nous bornant encore au second ordre, pour abréger l'écriture, l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + A_1(z)\frac{du}{dz} + A_2(z)u = 0,$$

où nous supposons que $A_1(z)$ et $A_2(z)$ soient deux fonctions holomorphes de z dans la couronne comprise entre deux circonférences C et C' ayant l'origine pour centre et les rayons R et R' $(R > R')$. Il existe, en général, deux solutions dans cette couronne, se reproduisant, à un facteur constant près, quand z tourne dans la couronne autour du cercle C'. Les coefficients de l'équation du second degré donnant ces facteurs constants jouent un rôle important et ont un caractère invariant; on pourra consulter sur ce sujet un très intéressant Mémoire de M. von Koch (*Acta Mathematica*, t. XV).

Ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent pourra être appliqué ici. Posons, en effet,

$$z = re^{\theta i}, \qquad (R > r > R').$$

On peut regarder θ comme seule variable, et nous avons alors une équation où les coefficients sont des fonctions de la variable réelle θ et ont 2π pour période. Nous sommes donc ramené à la recherche faite plus haut.

Du théorème du § 3, on conclut de suite que, si les fonctions $A_1(z)$, $A_2(z)$ sont des fonctions entières d'un certain nombre de paramètres, *les coefficients de l'équation en μ seront des fonctions uniformes de ces paramètres.*