BULLETIN DE LA S. M. F.

H. PICQUET

Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques. Son identité avec un problème plan

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 19-25

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__19_1>

NOUVELLE CONTRIBUTION AU PROBLÈME DU HUITIÈME POINT COMMUN A TROIS QUADRIQUES. SON IDENTITÉ AVEC UN PROBLÈME PLAN;

Par M. H. Picquet.

1. Dans le premier Volume de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, p. 12, M. Zeuthen, en réponse à une question de M. Poincaré, fait un rapide historique du problème du huitième point commun aux quadriques qui passent par sept points donnés. On

y voit que ce sujet n'a pas été traité par moins de onze auteurs, dont les travaux, sauf ceux de M. P. Serret, ont tous été publiés à l'étranger, et la plupart en langue étrangère. Cette circonstance, rapprochée des raisons pour lesquelles la question a été de nouveau soulevée, m'engage à rappeler dans un recueil français une des solutions que j'en ai indiquées.

En 1871, j'ai donné au *Journal de Crelle* (t. 73, p. 365) une première construction du huitième point, dont le caractère linéaire fut à tort contesté par Borchardt, comme je l'établis en 1885, en même temps que j'envoyais à ce recueil (t. 99, p. 225) une seconde solution, plus simple que la première et que je vais résumer.

2. *Construction*. — Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés.

1° Dans le plan 5 6 7 joindre le point 5 à deux des trois couples de sommets opposés du quadrilatère complet résultant de l'intersection de ce plan avec le tétraèdre 1 2 3 4, et prolonger ces deux couples de droites jusqu'à la droite 6 7, sur laquelle elles déterminent deux couples de points a, a' et b, b'. Mener par le point 6 une droite quelconque qui coupe le couple ($5a$, $5a'$) aux points c et c'; joindre bc qui coupe $5a'$ en d et $b'c'$ qui coupe $5a$ en d'. La droite dd' détermine sur 6 7 un point α.

2° Opérer de même dans les plans 4 6 7 et 3 6 7 avec la droite 6 7 et respectivement les points 4 et 3, ce qui donne sur cette droite deux nouveaux points β et γ.

3° Le plan P mené par 6 7 et formant avec les trois précédents un rapport anharmonique égal à celui des quatre points 7, α, β, γ passe par le point cherché.

4° Les mêmes constructions, répétées deux fois, en substituant à la droite 6 7 les droites 4 5 et 2 3, par exemple, déterminent le point 8 par l'intersection de trois plans. Mais on peut aussi opérer comme il suit dans le plan P.

Figurer sur ce plan les traces D_1, D_2, D_3 du trièdre formé par les trois droites 1 4, 2 4, 3 4 et les traces Δ_1, Δ_2, Δ_3 du trièdre formé par les trois droites 1 5, 2 5, 3 5 (deux triangles homologiques). Chercher le point d'intersection de la droite 6 7 et de D_1 que l'on joindra par une droite G_1 au point d'intersection de D_2 et D_3;

chercher de même le point d'intersection de 6 7 et de Δ_1 que l'on joindra par une droite G_2 au point d'intersection de Δ_2 et Δ_3; la droite qui joint les points (G_1 G_2) et (D_1 Δ_1) passe par le point 8.

La même construction, répétée une fois en permutant les côtés du triangle D_1 D_2 D_3 et de la même manière ceux du triangle Δ_1 Δ_2 Δ_3, donne une seconde droite passant par le point 8.

3. Parmi les autres solutions du même problème, je veux retenir celle que M. Reye a publiée dans le tome suivant du *Journal de Crelle* (t. 100, p. 487) [1]. Elle diffère complètement de la précédente, en ce sens surtout qu'elle opère toujours dans l'espace. A première vue, elle paraît plus simple; il y a lieu toutefois de se demander si, en détaillant, comme pour la mienne, chaque élément de la construction on n'arriverait pas à l'opinion contraire. M. Émile Lemoine pourrait seul nous le dire, grâce à ses procédés géométrographiques. La voici :

Avec six des sept points donnés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 former trois couples 1 2, 3 4, 5 6. Par les points i, k d'un de ces couples mener deux transversales rencontrant les deux droites sur lesquelles sont les deux autres couples. Mener par 7 une transversale (ik) qui coupe les deux précédentes. On a ainsi trois droites (1 2), (3 4), (5 6) passant par le point 7 et formant les arêtes d'un trièdre.

Chercher les points d'intersection des droites (1 2), (3 4), (5 6) avec les faces respectivement opposées de ce trièdre, et couper le trièdre par le plan de ces trois points.

On obtient ainsi un triangle dont les côtés rencontrent respectivement les droites (1 2), (3 4), (5 6) en ces trois points et déterminent avec elles trois plans passant par le point cherché.

M. Reye termine en faisant observer que, dans le cas où quatre des points donnés sont dans un même plan, sa solution s'applique encore, mais qu'il y en a une plus simple. Je ne sais s'il l'a publiée ailleurs, mais elle est effectivement si simple qu'il est aussitôt fait de la donner que d'en parler.

Le plan P des quatre points et le plan Q qui passe par les trois

---

(1) M. Reye glisse légèrement sur l'historique de la question. Suivant lui, elle a été traitée, *pour parler court*, par Caspary et Schröter, qui ont pris pour point de départ les travaux de Hesse, et sa solution est la troisième. On voit que les géomètres non allemands n'existent pas pour le savant professeur de Strasbourg.

autres forment en effet une quadrique passant par les sept points; le huitième point est donc dans l'un des deux plans. Les coniques passant par les quatre premiers points déterminent sur la droite PQ une involution dont deux couples de points conjugués s'obtiennent immédiatement, et comme les couples de points de cette involution sont ceux où la droite coupe toutes les quadriques du système, il en résulte que les coniques de ces quadriques dans le plan Q, lesquelles passent par trois points et sont conjuguées à deux points fixes sur la droite PQ (quatrième condition linéaire), passent par un quatrième point. D'où la construction :

Joindre, dans le plan P, 1 2 et 3 4 qui donnent a et a' sur la droite PQ; joindre de même 1 3 et 2 4 qui donnent b et b'. Joindre, dans le plan Q, 5 6 qui donne c sur PQ; construire (par la règle) (¹), le sixième point c' de l'involution aa', bb', c; la droite $7c'$ passe par le point cherché. Joindre de même 5 7 qui donne d sur PQ; la droite $6d'$ achève de déterminer le point 8.

4. M. Poincaré a aussi demandé dans l'*Intermédiaire* la solution du problème du neuvième point d'un faisceau de cubiques planes. M. Zeuthen, lui répondant, a indiqué une solution de Chasles (*Comptes rendus*, t. XLI) et une solution antérieure de Weddlé et Hart (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI). Je croyais, pour ma part, que ce problème avait donné lieu à autant de recherches que le précédent (²); mais une chose m'étonne davantage, c'est que personne n'ait fait remarquer leur identité complète. C'est ce qui semble du moins résulter de ce fait que le rapprochement des deux questions, qui sans doute n'est pas fortuit, n'a pas été en même temps une occasion de souligner leur identité qui est absolue, comme je vais le prouver et comme je l'ai observé depuis longtemps.

5. Considérons les cubiques planes passant par huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et d'un point S pris sur une quadrique (Q), projetons-les coniquement sur cette quadrique, après avoir pris soin de faire passer la surface par les droites qui joignent le point S

(¹) *Voir* ma *Géométrie analytique*, p. 362.

(²) A vrai dire, il ne faut pas compter la solution anglaise qui n'est ni linéaire ni projective et a recours notamment à l'emploi de quatrièmes proportionnelles.

à deux des huit points, 1 et 2 par exemple. Chaque cône projectif, coupant la quadrique suivant deux génératrices, la coupera en outre suivant une quartique (C).

On sait qu'il existe deux espèces de quartiques gauches : une quartique de la première espèce (biquadratique gauche) est l'intersection commune d'une infinité de quadriques; elle est coupée en deux points, sur chacune de ces surfaces, par toute génératrice de la surface; au contraire, par une quartique de la seconde espèce il ne passe qu'une quadrique et les génératrices d'un système rencontrent la courbe en un point, tandis que celles de l'autre système la rencontrent en trois points.

Or, il est aisé de voir que la quartique (C) est rencontrée deux fois par toute génératrice de la quadrique (Q). Cette génératrice rencontre, en effet, l'une des deux génératrices S 1, S 2, la première par exemple, et comme elle coupe en trois points le cône projectif de l'une des cubiques planes, que d'ailleurs ces trois points doivent se trouver sur l'intersection du cône et de la quadrique Q, il en reste deux sur la quartique C, laquelle est, par suite, une biquadratique gauche.

Ainsi, à toutes les cubiques planes données, correspondent sur la quadrique les biquadratiques passant par le point S (1) et les projections $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$ des points donnés 3, 4, 5, 6, 7, 8. Si l'on admet que toutes les quadriques qui passent par ces sept points passent par un huitième point $9'$, les biquadratiques suivant lesquelles elles coupent la quadrique Q passeront elles-mêmes par ce point et les cubiques auront dans leur plan un neuvième point commun 9, projection conique de $9'$.

On démontrerait d'une façon analogue que, si l'on admet le théorème sur les cubiques, la représentation plane des figures tracées sur une quadrique permet d'en conclure la proposition relative aux quadriques qui passent par sept points; d'où il suit que les deux propositions sont identiques.

6. Il résulte de ce qui précède que chacune des constructions connues du huitième point commun à trois quadriques permet de trouver le neuvième point d'un faisceau de cubiques planes.

---

(1) Sans quoi, le cône qui les projette serait du quatrième degré.

Comme il est préférable de ramener le problème de l'espace au problème plan, je vais donner une nouvelle solution du huitième point commun à trois quadriques, en m'appuyant sur la solution du problème plan.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés, et (D) la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6). La droite (2 3) coupe D en a; je joins $(a4)$. De même la droite (5 6) coupe (D) en b; je joins $(b1)$. Les deux couples de droites $(b1)$ (2 3) et $(a4)$ (5 6), qui constituent deux coniques ayant une corde commune ab sur la droite d'intersection de leurs plans, déterminent avec le point 7 une quadrique (Q) dont le plan tangent en 7 est défini par les deux droites menées par ce point et rencontrant, la première les génératrices de même système $(1b)$, $(4a)$, la seconde les génératrices de l'autre système (2 3), (5 6).

Soient $7'$ et $7''$ les traces de ces deux droites sur le plan (1 2 3); soient $4'$, $5'$, $6'$ les projections sur ce plan des points 4, 5, 6 vus du point 7; soit $8'$ le neuvième point commun dans ce plan à toutes les cubiques qui passent par les points 1, 2, 3, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $7''$. Le point 8 cherché est la projection sur la quadrique (Q) du point $8'$ vu du point 7. D'où la construction suivante :

Tracer la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6); joindre (2 3) qui coupe cette droite en a et tracer $(a4)$; joindre (5 6) qui coupe cette droite en b et tracer $(b1)$. Mener par 7 les deux droites 7 $[(1b)(4a)]$ et 7 $[(2\ 3)\ (5\ 6)]$ dont les traces sur le plan (1 2 3) sont $7'$ et $7''$.

Projeter du point 7 sur le même plan les points 4, 5, 6, en $4'$, $5'$, $6'$. Construire dans ce plan le neuvième poit $8'$ commun aux cubiques qui passent par 1, 2, 3, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $7''$. Joindre 7 $8'$ et chercher le second point d'intersection de cette droite avec la quadrique déterminée par le point 7 et les couples de droites $[(1b)(23)]$, $[4a, 56]$.

A cet effet, considérer le plan passant par $(7\ 8')$ et l'une des génératrices issues de 7, $7[(1b)(4a)]$ par exemple. Ce plan coupe la quadrique suivant une autre droite, qui est celle qui joint ses points d'intersection avec les génératrices (2 3) et (5 6); et cette droite rencontre la droite $(7\ 8')$ au point cherché.

A défaut d'autre mérite, cette solution a tout au moins celui d'affirmer l'identité des deux problèmes. Celui du neuvième point commun aux cubiques planes est d'ailleurs très simple dans ce cas et se ramène immédiatement, vu la situation particulière des huit points, à celui du quatrième point commun à deux coniques déterminées chacune par cinq points dont trois leur sont communs.