G. KOBB

Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 76-80
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__76_0>

Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. G. Kobb.

Dans mon Mémoire *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (1) j'ai démontré que le domaine d'un point quelconque (a, b, c) d'une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

peut être représenté par un certain nombre de développements de la forme

$$x - a = P_1(u, v), \qquad y - b = P_2(u, v), \qquad z - c = P_3(u, v).$$

Les variables auxiliaires u et v peuvent être choisies d'une infinité de manières, mais on a le théorème suivant : *Soient*

$$\begin{array}{lll} x - a = P_1(u, v), & y - b = P_2(u, v), & z - c = P_3(u, v), \\ x - a = P'_1(u', v'), & y - b = P'_2(u', v'), & z - c = P'_3(u', v') \end{array}$$

deux représentations de la même partie du domaine du point (a, b, c) telles qu'à un système de valeurs de x, y, z ne corresponde qu'un seul système de valeurs des variables auxiliaires; les deux séries

$$P_i(u, v), \qquad P'_i(u', v') \qquad (i = 1, 2, 3)$$

commencent toujours par des termes du même ordre.

Pour abréger l'écriture, supposons que le point en question soit l'origine : on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} x = P_1(u, v) = (u, v)_{\lambda_1} + (u, v)_{\lambda_1+1} + \ldots, \\ y = P_2(u, v) = (u, v)_{\lambda_2} + (u, v)_{\lambda_2+1} + \ldots, \\ z = P_3(u, v) = (u, v)_{\lambda_3} + (u, v)_{\lambda_3+1} + \ldots \end{cases}$$

et aussi

$$(2) \qquad \begin{cases} x = P'_1(u', v') = (u', v')_{\lambda'_1} + (u', v')_{\lambda'_1+1} + \ldots, \\ y = P'_2(u', v') = (u', v')_{\lambda'_2} + (u', v')_{\lambda'_2+1} + \ldots, \\ z = P'_3(u', v') = (u', v')_{\lambda'_3} + (u', v')_{\lambda'_3+1} + \ldots. \end{cases}$$

(1) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX.

Nous allons démontrer qu'on a

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \qquad \lambda'_2 = \lambda_2, \qquad \lambda'_3 = \lambda_3.$$

Considérons les deux équations

$$x = P_1(u, v), \qquad y = P_2(u, v)$$

et faisons la substitution

$$u = (\alpha_1 + \beta_1 v_1) u_1, \qquad v = (\alpha_2 + \beta_2 v_1) u_1, \tag{3}$$

nous aurons

$$x = u_1^{\lambda_1} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \ldots \right\},$$
$$y = u_1^{\lambda_2} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \ldots \right\}.$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} = c_1, \qquad (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} = c_2; \\ \dfrac{1}{\lambda_1 c_1} \left[\beta_1 \dfrac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \dfrac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_1, \\ \dfrac{1}{\lambda_2 c_2} \left[\beta_1 \dfrac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \dfrac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_2. \end{array} \right. \tag{4}$$

On trouve en extrayant les racines

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = u_1(1 + c'_1 v_1 + \ldots), \\ \left(\dfrac{y}{c_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = u_1(1 + c'_2 v_1 + \ldots). \end{array} \right. \tag{5}$$

Si les deux polynômes homogènes $(u, v)_{\lambda_1}$ et $(u, v)_{\lambda_2}$ ne sont pas identiquement égaux, on peut toujours supposer

$$c'_1 \gtrless c'_2.$$

Des formules (5) on déduit facilement

$$\left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2} \right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] = (c'_1 - c'_2) v_1 + C u_1 + \ldots.$$

Ensuite le système

$$\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = u_1 + (u_1, v_1)_2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1\right] = C u_1 + (c'_1 - c'_2) v_1 + (u_1, v_1)_2 + \ldots$$

nous donne

$$u_1 = P_1 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1\right] \right\},$$

$$v_1 = P_2 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1\right] \right\},$$

et, enfin, par (3) et (1),

$$z = P \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1\right] \right\}. \tag{6}$$

Il est impossible que les indices de racines λ_1 et λ_2 se réduisent, parce que la formule doit nous donner exactement $\lambda_1 \lambda_2$ valeurs de z, d'après l'hypothèse faite sur la représentation du domaine du point en question.

Traitons maintenant de la même manière les équations (2) et posons

$$u' = (\alpha'_1 + \beta'_1 v'_1) u'_1, \qquad v' = (\alpha'_2 + \beta'_2 v'_1) u'_1. \tag{7}$$

Si les deux polynômes homogènes $(u', v')_{\lambda'_1}$ et $(u', v')_{\lambda'_2}$ ne sont pas identiquement égaux, nous pouvons toujours déduire un développement

$$z = P' \left\{ \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}}, \quad \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}} \left[\left(\frac{y}{c'_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda'_2}} - 1\right] \right\} \tag{8}$$

où, en outre, on a

$$\frac{c'_1}{c'_2} = \frac{c_1}{c_2}, \tag{9}$$

ou bien

$$\frac{(\alpha'_1, \alpha'_2)_{\lambda'_1}}{(\alpha_1, \alpha'_2)_{\lambda'_2}} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}.$$

La relation (9) ayant lieu, il existe certainement dans les domaines de convergence des séries (6) et (8) une partie commune. Mais, pour cette partie du domaine, les deux séries doivent être identiques, d'où résulte, en donnant d'abord à y une valeur arbitraire y_0,

$$\lambda'_1 = \lambda_1,$$

car alors les deux séries (6) et (8) représentent la même branche de la courbe

$$f(x, y_0, z) = 0.$$

De la même manière, on prouvera l'égalité $\lambda'_2 = \lambda_2$.

Supposons maintenant que le cas d'exception

$$(u', v')_{\lambda'_1} \equiv (u', v')_{\lambda'_2}$$

se présente et soit, par conséquent,

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'.$$

Nous aurons

$$x = (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \ldots,$$
$$y = (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \ldots.$$

Mais alors considérons le système

$$x = (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \ldots$$
$$x - y = (u', v')_{\lambda'+k} + (u', v')_{\lambda'+k+1} + \ldots \quad (k \geqq 1),$$

d'où nous déduisons par (2)

$$z = P'\left\{\left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}}\left[\left(\frac{x-y}{c'_2}\right)^{-\frac{1}{\mu_k}} - 1\right]\right\}, \tag{10}$$

avec

$$m_1 \mu_1 = \lambda', \qquad m_k \mu_k = \lambda' + k,$$

m_1 et m_k étant des nombres entiers. Ici, au contraire, une réduction des indices λ' et $\lambda' + k$ est nécessaire pour que la formule (10) ne nous donne pas trop de valeurs de z.

Nous allons voir que les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques.

En effet, s'il en est ainsi, nous aurons d'abord

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_k;$$

mais, en même temps, en donnant à y la valeur y_0, nous aurons

$$\lambda_1 = \mu_1 \mu_k,$$

et ensuite, en fixant la valeur de x,

$$\lambda_2 = \mu_k,$$

d'où résulte

$$\lambda_2 = \mu_k = 1.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur la représentation par les séries (2),

$$\lambda'^2 = \mu_1 \mu_k = \lambda_1 \lambda_2,$$

ou bien

$$\mu_1 = \lambda'^2,$$

ce qui est impossible, sauf pour $\lambda' = 1$. Ainsi, les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques. Par conséquent, si le cas d'exception se présente pour les séries (2), il doit se présenter aussi pour les séries (1). Mais alors, comme on a, à la fois,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda'_1 \lambda'_2, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \qquad \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda',$$

il en résulte bien

$$\lambda = \lambda'.$$

Ainsi nous avons démontré, dans tous les cas, les égalités

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2.$$

Nous démontrerions exactement de la même manière l'égalité

$$\lambda_3 = \lambda'_3.$$

Le théorème énoncé est donc complètement établi.