

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

## **Détermination de l'élément linéaire des surfaces spiraies à lignes d'égale courbure parallèles**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 20 (1892), p. 22-32

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1892\\_\\_20\\_\\_22\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__22_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

*Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales  
à lignes d'égale courbure parallèles; par M. L. RAFFY.*

1. L'élément linéaire d'une spirale étant réductible à la forme

$$(1) \quad ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2) e^{\beta + \int A(\alpha) d\alpha},$$

il faut d'abord déterminer la fonction A de manière que les lignes d'égale courbure ( $R_1 R_2 = \text{const.}$ ) soient parallèles.

La courbure totale, égale à une fonction d'un nouveau paramètre  $u$ , nous donne

$$(2) \quad A' e^{-\beta - \int \Lambda dx} = e^{-U_0(u)},$$

relation qui revient à celle-ci

$$\beta = U_0(u) + \log A' - \int \Lambda dx.$$

Dès lors l'élément linéaire, exprimé en  $u$  et  $\alpha$ , prend la forme

$$ds^2 = A' U_0'^2 e^{U_0} du^2 + 2A' \left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right) U_0' e^{U_0} du d\alpha + A' \left[ \left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] e^{U_0} d\alpha^2.$$

En vertu de l'identité générale

$$E du^2 + 2F du d\alpha + G d\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{G} du^2 + \frac{1}{G} (F du + G d\alpha)^2,$$

nous pourrons l'écrire comme suit :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{U_0'^2 e^{U_0} du^2}{\frac{1}{A'} \left[ \left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right]} \\ &+ e^{U_0} A' \frac{\left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2}{\left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2 + 1} \left[ U_0' du + \frac{\left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2 + 1}{\frac{A''}{A'} - \Lambda} d\alpha \right]^2; \end{aligned} \right.$$

et la surface sera rapportée aux lignes d'égale courbure  $u = \text{const.}$  et à leurs trajectoires orthogonales. Ces trajectoires étant, par hypothèse, des géodésiques, la fonction  $U_0$  doit pouvoir être choisie de façon que le coefficient de  $du^2$  se réduise à l'unité. D'où ces deux conditions

$$(4) \quad U_0'^2 e^{U_0} = \text{const.} = 2m,$$

$$(5) \quad \frac{1}{A'} \left[ \left( \frac{A''}{A'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] = \text{const.} = 2m.$$

La première donne immédiatement

$$\frac{U_0'}{2} e^{\frac{U_0}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}, \quad e^{U_0} = \frac{mu^2}{2}, \quad U_0' = \frac{2}{u}.$$

La seconde peut, comme je l'ai montré antérieurement (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XIX, p. 65) s'intégrer par quadrature. Si l'on tient compte de l'une et de l'autre, l'élément

linéaire devient

$$(1)' \quad ds^2 = du^2 + u^2(2mA' - 1) \left( \frac{du}{u} + \frac{mA'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} \right)^2.$$

Effectuons le changement de variable

$$(6) \quad \frac{du}{u} + \frac{mA'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} = V_0(v)dv :$$

quelle que soit la fonction  $V_0$ , les courbes  $v = \text{const.}$  seront les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure  $u = \text{const.}$  Mais si l'on prend  $V_0 v = 1$ , l'équation précédente donne

$$m \int \frac{A'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} = \log \frac{v}{u},$$

ce qui montre que  $x$  est une fonction du rapport  $u : v$ . Par suite, l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} f\left(\frac{u}{v}\right) dv^2 :$$

d'où cette conclusion : *quand une spirale à lignes d'égale courbure parallèles est rapportée à ces lignes  $u = \text{const.}$  et aux géodésiques orthogonales  $v = \text{const.}$ , on peut toujours faire en sorte que son élément linéaire soit une fonction homogène de  $u$  et de  $v$ .*

2. Cela posé, rappelons que, quand on rapporte une surface à ses lignes d'égale courbure, *supposées parallèles*, et à leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prend la forme

$$(e) \quad ds^2 = du^2 + W \frac{(U - V)^2}{U'} dv^2.$$

en appelant  $U$  une fonction de  $u$ ,  $U'$  sa dérivée,  $V$  et  $W$  deux fonctions de  $v$ . Nous allons, en vertu de ce qui précède, pouvoir déterminer ces trois fonctions de manière que le coefficient de  $dv^2$  soit une fonction homogène et de degré zéro de  $u$  et de  $v$ . Nous aurons ainsi *toutes les formes possibles* de l'élément linéaire des spirales à lignes d'égale courbure parallèles.

Proposons-nous donc de satisfaire à l'équation

$$u \frac{\partial}{\partial u} \left[ W \frac{(U - V)^2}{U'} \right] + v \frac{\partial}{\partial v} \left[ W \frac{(U - V)^2}{U'} \right] = 0,$$

qui, développée et divisée par  $W : U'$ , peut s'écrire

$$(7) \quad \left( \frac{W'v}{W} - \frac{U'u}{U'} \right) (U - V) + 2U'u - 2V'v = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre, prise par rapport à  $u$  et à  $v$ ; il vient

$$(8) \quad U' \left( \frac{W'v}{W} \right)' + V' \left( \frac{U'u}{U'} \right)' = 0.$$

L'hypothèse particulière  $V' = 0$  donne des spirales applicables sur des surfaces de révolution. Elle entraîne

$$\frac{W'v}{W} = \text{const.} = -n, \quad W = \frac{1}{v^n}.$$

Si, dans l'équation (7), nous faisons  $V' = 0$ , et, ce qui est permis,  $V = 0$ , en même temps que  $W = v^{-n}$ , nous obtenons une relation qui revient à

$$\frac{d}{du} \log \frac{U^2}{U'} = \frac{n}{u}.$$

On en déduit par une intégration immédiate l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^n}{v^n} dv^2,$$

qui convient à toutes les spirales applicables sur des surfaces de révolution. En effet, la condition  $V = \text{const.}$  est nécessaire pour que l'élément linéaire (e) convienne à des surfaces de révolution, où les trajectoires des lignes d'égale courbure sont les méridiens.

3. Supposons maintenant  $V' \neq 0$ . L'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{1}{V'} \left( \frac{W'v}{W} \right)' = - \frac{1}{U'} \left( \frac{U'u}{U'} \right)' = \text{const.} = -2m;$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(9) \quad \frac{U'u}{U'} = 2mU - a, \quad \frac{W'v}{W} = -2mV - b.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent

$$-2m(U^2 - V^2) + (a - b)(U - V) + 2U'u - 2V'v = 0,$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$\begin{aligned} 2mU^2 - (a-b)U - 2U'u &= \text{const.} = -2h, \\ 2mV^2 - (a-b)V - 2V'v &= \text{const.} = -2h. \end{aligned}$$

Mais la première de ces relations, différenciée et rapprochée de la première des formules (9), entraîne  $a + b = 2$ , ce qui conduit à poser  $a = 1 - 2c$ ,  $b = 1 + 2c$ ; alors les trois fonctions inconnues  $U$ ,  $V$ ,  $W$  sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} \frac{U'}{mU^2 + 2cU + h} &= \frac{1}{u}, & \frac{V'}{mV^2 + 2cV + h} &= \frac{1}{v}, \\ \frac{W'}{W} + \frac{2mV + 2c + 1}{v} &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières étant les mêmes, il suffit d'intégrer

$$\frac{dy}{my^2 + 2cy + h} = \frac{dx}{x}.$$

Il convient de distinguer trois cas principaux, suivant que le trinôme dénominateur est du second degré, s'abaisse au premier ou se réduit à une constante.

4. PREMIER CAS :  $m \neq 0$ . — Nous pouvons remplacer  $c$  par  $mc$ ,  $h$  par  $mh$ , et prendre

$$\frac{dy}{y^2 + 2cy + h} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2m(V+c)+1}{v} = 0.$$

1° Si les racines du trinôme en  $y$  sont distinctes, nous aurons

$$\frac{dy}{(y+\alpha)(y+\beta)} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{m(2V+\alpha+\beta)+1}{v} = 0;$$

intégrant et désignant par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois constantes arbitraires, il vient

$$\begin{aligned} U &= -\alpha + \frac{\alpha-\beta}{1-Au^{m(\alpha-\beta)}}, & V &= -\alpha + \frac{\alpha-\beta}{1-Bv^{m(\alpha-\beta)}}; \\ \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{m(\alpha-\beta)}{v} \frac{1+Bv^{m(\alpha-\beta)}}{1-Bv^{m(\alpha-\beta)}} &= 0, & Wv &= Cv^{-m(\alpha-\beta)} [1-Bv^{m(\alpha-\beta)}]^2; \end{aligned}$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{C}{Am} \frac{u}{v} \left[ A \left( \frac{u}{v} \right)^{m \frac{\alpha-\beta}{2}} - B \left( \frac{v}{u} \right)^{m \frac{\alpha-\beta}{2}} \right]^2 dv^2;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(10) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{\nu} \left[ A_1 \left( \frac{u}{\nu} \right)^n + B_1 \left( \frac{\nu}{u} \right)^n \right]^2 d\nu^2,$$

avec trois nouvelles arbitraires  $A_1$ ,  $B_1$  et  $n$ .

2° Si les racines du trinôme en  $\nu$  sont égales, on a

$$\begin{aligned} U &= -c + \frac{1}{\log A u^m}, & V &= -c + \frac{1}{\log B \nu^m}; \\ \frac{W'}{W} + \frac{1}{\nu} + \frac{2m}{\nu \log B \nu^m} &= 0, & W\nu &= C(\log B \nu^m)^2; \\ ds^2 &= du^2 + C m \frac{u}{\nu} \left( \log \frac{A u^m}{B \nu^m} \right)^2 d\nu^2; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{\nu} \left( A_1 \log \frac{u}{\nu} + B_1 \right)^2 d\nu^2.$$

SECOND CAS :  $m = 0$ ,  $c \neq 0$ . — Remplaçons  $h$  par  $2ch$ ; il viendra

$$\frac{dy}{y+h} = 2c \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2c+1}{\nu} = 0;$$

d'où, en intégrant et désignant par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= -h + A u^{2c}, & V &= -h + B \nu^{2c}, & W &= C \nu^{-2c-1}; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{2Ac} \frac{u}{\nu} \left[ A \left( \frac{u}{\nu} \right)^c - B \left( \frac{\nu}{u} \right)^c \right]^2 d\nu^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (10).

TROISIÈME CAS :  $m = 0$ ,  $c = 0$ . — On a simplement

$$dy = h \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{1}{\nu} = 0.$$

L'intégration donne, avec trois constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= \log A u^h, & V &= \log B \nu^h, & W\nu &= C; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{h} \frac{u}{\nu} \left( \log \frac{A u^h}{B \nu^h} \right)^2 d\nu^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (11).

§. En conséquence, *tout élément linéaire de spirale à lignes*

d'égale courbure parallèles, quand on rapporte la surface à ces lignes et aux géodésiques orthogonales, prend l'une des deux formes

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[ A \left( \frac{u}{v} \right)^n + B \left( \frac{v}{u} \right)^n \right]^2 dv^2,$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left( A \log \frac{u}{v} + B \right)^2 dv^2.$$

Ces deux types, dont le second peut être considéré comme une dégénérescence du premier, contiennent la solution complète du problème que nous nous étions proposé. Il suffit de supposer dans le premier  $AB = 0$  pour retrouver l'élément linéaire primitivement obtenu, qui convient à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

6. On peut arriver aux résultats qui précèdent en continuant les transformations commencées au n° 1. A cet effet, reprenons l'élément linéaire (1)', qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 (2mA' - 1) dv^2,$$

moyennant le changement de variable

$$(6) \quad \frac{m A' dx}{\sqrt{2mA' - 1}} = V_0(v) dv - \frac{du}{u},$$

où A désigne la fonction de x définie par la relation (5).

Si nous représentons par dr le second membre de l'équation (6), A sera une fonction de r et nous pourrons poser

$$(12) \quad \frac{A''}{A'} - A = R(r).$$

Mais, en vertu de l'équation (5), il vient

$$R^2 = 2mA' - 1, \quad A' = \frac{R^2 + 1}{2m},$$

d'où, substituant dans la relation (6),

$$(6)' \quad \frac{R^2 + 1}{2R} dx = dr.$$

Or, en prenant la différentielle logarithmique de A', nous trouvons

$$\frac{A''}{A'} dx = \frac{2R}{R^2 + 1} R' dr.$$



ce qui, en tenant compte de (6)', revient à

$$(13) \quad \frac{A''}{A'} = R';$$

d'où, par comparaison avec (12),

$$(14) \quad A = R' - R.$$

Différentions encore, en ayant égard à l'équation (6)'; nous arrivons facilement à la relation

$$(15) \quad m(R'' - R') - R = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'intégration donne R. Une fois cette fonction connue, l'élément linéaire, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 R^2 dv^2,$$

ne dépend plus que de la fonction  $V_0$ . Nous allons déterminer cette fonction de manière que le coefficient de  $dv^2$  soit une fonction homogène et de degré zéro de  $u$  et de  $v$ .

Le coefficient étant égal à  $u^2 V_0^2 (2m A' - 1)$ , nous devons satisfaire à l'identité

$$u \frac{\partial}{\partial u} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] + v \frac{\partial}{\partial v} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] = 0.$$

Mais de l'équation (6), qui définit  $\alpha$  comme fonction de  $u$  et de  $v$ , nous tirons

$$\frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\frac{1}{u}, \quad \frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = V_0.$$

Si l'on substitue ces expressions des dérivées de  $\alpha$  dans l'identité proposée, il vient, tous calculs faits,

$$\sqrt{2m A' - 1} (V_0 v)' + \frac{A''}{A'} V_0 (V_0 v - 1) = 0.$$

7. Cette équation admet, quelle que soit la fonction A, la solution évidente  $V_0 v = 1$ , que nous avons déjà rencontrée. Elle n'en peut d'ailleurs admettre d'autres que celles-ci

$$\frac{-(V_0 v)'}{V_0 (V_0 v - 1)} = \frac{A''}{A' \sqrt{2m A' - 1}} = \text{const.} = n + 1.$$

Cherchons avant tout à déterminer la fonction  $V_0$ ; nous avons

$$\frac{(V_0 v)'}{V_0 v (V_0 v - 1)} + \frac{n+1}{v} = 0,$$

d'où, intégrant et résolvant,

$$(16) \quad V_0 = \frac{v^n}{v^{n+1} - h}, \quad (h = \text{const.}).$$

L'équation (6) donne alors

$$(17) \quad r = \int V_0 dv - \log u = \log \frac{k}{u} (v^{n+1} - h)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (k = \text{const.}).$$

Quant à la fonction  $R$ , nous l'obtiendrons en rapprochant les deux équations que doit vérifier la fonction  $A$ , savoir l'équation (5) et celle qui vient d'être obtenue

$$\sqrt{2mA' - 1} = \frac{A''}{A'} - A, \quad \frac{A''}{A' \sqrt{2mA' - 1}} = n + 1.$$

En multipliant membre à membre, on trouve

$$(18) \quad n \left( \frac{A''}{A'} - A \right) = A = nR,$$

à cause de l'équation (12). Mais en vertu de l'équation (13), ceci peut encore s'écrire

$$R' - nR = R, \quad \frac{R'}{R} = n + 1;$$

d'où, en intégrant et désignant par  $g$  une constante arbitraire,

$$R = g e^{(n+1)r}.$$

D'après l'expression (17), trouvée pour  $r$ , nous aurons

$$R = g^{n+1} \frac{v^{n+1} - h}{u^{n+1}};$$

d'où, substituant  $R$  et  $V_0$  dans l'élément linéaire et désignant par  $C$  une constante arbitraire,

$$(e) \quad ds^2 = du^2 + C \left( \frac{v}{u} \right)^{2n} dv^2.$$

On voit que cet élément linéaire convient à des surfaces de révolution en même temps qu'à des spirales. La fonction A doit satisfaire aux deux équations

$$(18) \quad nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

$$(5) \quad \left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 = 2mA' - 1,$$

dont la combinaison donne successivement

$$n^2(2mA' - 1) - A^2 = 0, \quad mn^2A'' - AA' = 0,$$

en sorte que m doit être égal à l'inverse de  $n(n+1)$ . Dès lors les deux équations (5) et (18) se réduisent à une seule

$$nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

qui, par deux intégrations successives, donne facilement

$$A = n \operatorname{tang} \frac{n+1}{2} (x - x_0).$$

C'est, aux notations près, le résultat que nous avons trouvé précédemment (*loc. cit.*).

8. Revenons maintenant à l'hypothèse  $V_0 v = 1$ , qui laisse à la fonction A toute sa généralité. On en déduit

$$r = \int V_0 dv - \log u = \int \frac{dv}{v} - \log u = \log \frac{u}{v}.$$

L'élément linéaire devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} R^2 dv^2.$$

Il suffit donc, pour le connaître entièrement, de déterminer la fonction R de r que définit l'équation (15). Pour simplifier les notations dans ce qui suivra, nous écrirons

$$(15)' \quad R'' - R' - n(n-1)R = 0, \quad m = \frac{1}{n(n-1)}.$$

De la sorte, l'équation caractéristique sera

$$t(t-1) = n(n-1),$$

et admettra pour racines n et 1 - n. Nous avons donc à distinguer deux cas, suivant que ces racines sont inégales ou égales.

PREMIER CAS :  $2n - 1 \neq 0$ . — Les racines de l'équation caractéristique étant inégales, l'équation (15)' a pour intégrale générale

$$R = Ce^{ur} + De^{(1-n)r},$$

C et D étant deux constantes arbitraires; d'où, en remplaçant  $r$  par son expression,

$$R = C \left(\frac{v}{u}\right)^n + D \left(\frac{v}{u}\right)^{1-n}.$$

L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[ C \left(\frac{v}{u}\right)^{n-\frac{1}{2}} + D \left(\frac{v}{u}\right)^{n-\frac{1}{2}} \right]^2 dv^2;$$

c'est, aux notations près, la formule (10). L'hypothèse  $CD = 0$  donne l'élément linéaire ( $e$ ) trouvé d'abord.

SECOND CAS :  $2n - 1 = 0$ . — L'équation (15)' a pour intégrale

$$R = (Cr + D)e^{\frac{r}{2}};$$

d'où, en ayant égard à l'expression de  $r$ ,

$$R = \sqrt{\frac{v}{u}} \left( C \log \frac{v}{u} + D \right).$$

L'élément linéaire se réduit alors à

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left( C \log \frac{v}{u} + D \right)^2 dv^2.$$

C'est, aux notations près, la formule (11). Nous retrouvons ainsi les conclusions du n° 3.