BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Détermination directe de l'intégrale

$$\int (\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx$$

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 8-11

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__8_1

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Détermination directe de l'intégrale

$$\int (\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx;$$

par M. C.-A. LAISANT.

Au dernier Congrès (1889) de l'Association française pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué une Note dans laquelle se trouve directement déterminée l'intégrale

$$\int \cos^p x \sin^q x dx,$$

sans avoir recours à l'abaissement successif des degrés p et q .

Il est possible de généraliser beaucoup plus la méthode indiquée, et de l'appliquer à la détermination de l'intégrale

$$f(\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx,$$

les nombres $m, m', \dots, p, p', \dots, n, n', \dots, q, q', \dots$ étant supposés entiers et positifs.

Soient

$$\begin{aligned} mp + m'p' + \dots + nq + n'q' + \dots &= M, \\ p + p' + \dots + q + q' + \dots &= P, \\ q + q' + \dots &= Q. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon^{2x} = z$. En remplaçant les cosinus et les sinus par leurs valeurs sous forme exponentielle, en vertu des formules connues $\cos u = \frac{\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}}{2}$, $\sin u = \frac{\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}}{2i}$, on aura, pour la fonction $F(x)$ qui figure sous le signe f ,

$$\frac{1}{2^p i^q \varepsilon^{Mx}} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots$$

Soit

$$(\zeta) \quad \begin{cases} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots \\ = A_0 z^M + A_1 z^{M-1} + \dots + A_{M-1} z + A_M. \end{cases}$$

Les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_M$ de ce développement fini seront par conséquent déterminés uniquement par des multiplications algébriques.

Si Q est pair, il est très aisé de reconnaître qu'on a $A_0 = A_M$, $A_1 = A_{M-1}, \dots$.

Si Q est impair, on a $A_0 = -A_M$, $A_1 = -A_{M-1}, \dots$.

Si M est pair, il y aura, dans le développement, un terme central; mais le coefficient $A_{\frac{M}{2}}$ de ce terme s'annule pour Q impair, puisqu'il faut qu'on ait $A_{\frac{M}{2}} = -A_{\frac{M}{2}}$.

Si M est impair, il n'y aura pas de terme central.

Cela posé, nous considérerons les quatre cas suivants :

1. Q pair, M pair ;
2. Q pair, M impair ;

3. Q impair, M pair ;

4. Q impair, M impair.

Et nous aurons, respectivement, en rétablissant maintenant ε^{2x} à la place de z ,

$$\begin{aligned} 1. \quad F(x) &= \frac{1}{2^P(-1)^{\frac{Q}{2}}\varepsilon^{Mx}} \left\{ A_0(\varepsilon^{2Mx}+1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots + A_{\frac{M}{2}}\varepsilon^{Mx} \right\} \\ &= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos(M-2)x + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \cos 2x + A_{\frac{M}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad F(x) &= \frac{1}{2^P(-1)^{\frac{Q}{2}}\varepsilon^{Mx}} \left\{ A_0(\varepsilon^{2Mx}+1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M-1}{2}}[\varepsilon^{(M+1)x} + \varepsilon^{(M-1)x}] \right\} \\ &= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos(M-2)x + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M-3}{2}} \cos 3x + A_{\frac{M-1}{2}} \cos x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad F(x) &= \frac{1}{2^P i^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \left\{ A_0(\varepsilon^{2Mx}-1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M}{2}-1}[\varepsilon^{(M+2)x} - \varepsilon^{(M-2)x}] \right\} \\ &= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin(M-2)x + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \sin 2x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad F(x) &= \frac{1}{2^P i^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \left\{ A_0(\varepsilon^{2Mx}-1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M-1}{2}}[\varepsilon^{(M+1)x} - \varepsilon^{(M-1)x}] \right\} \\ &= \frac{1}{2^{P-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin(M-2)x + \dots \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + A_{\frac{M-3}{2}} \sin 3x + A_{\frac{M-1}{2}} \sin x \right]. \end{aligned}$$

L'intégration $I = \int F(x) dx$ peut donc se faire immédiatement, grâce à cette décomposition, et nous donne, dans les quatre cas

considérés,

$$I_1 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \sin Mx + \frac{A_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \sin 2x + \frac{A_{\frac{M}{2}}}{2} \right] + c,$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \sin Mx + \frac{A_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-3}}{3} \sin 3x + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \sin x \right] + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \cos Mx + \frac{A_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \cos 2x \right] + c,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \cos Mx + \frac{A_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-3}}{3} \cos 3x + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \cos x \right] + c.$$

Au moyen de ces formules, on peut donc écrire immédiatement l'intégrale, après avoir préalablement effectué le développement (ζ) ci-dessus, qui donne les coefficients $A_0, A_1, \dots$

On aurait très aisément, par les transformations habituelles, des formules analogues répondant aux fonctions hyperboliques Ch et Sh.