BULLETIN DE LA S. M. F.

NANNY LAGERBORG

Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 118-122
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__118_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe ; par Mlle Nanny Lagerborg.

Dans le problème du mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe, on est ramené à exprimer le temps à l'aide d'une quadrature elliptique. On sait que, dans le cas plus étendu où il existe une fonction de force dépendant uniquement de l'angle θ que fait l'axe du corps avec une droite fixe, on est encore ramené à une quadrature. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont des surfaces de révolution autour de la droite fixe. Je me suis proposé de trouver une fonction de force conduisant dans le cas général à des intégrales elliptiques.

L'expression de la force vive est, après un choix convenable des axes de coordonnées,

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

ou, en introduisant les angles d'Euler,

$$p = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$2T = A\left[\sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + C\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\cos\theta \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \cos^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right].$$

Comme la fonction de force est indépendante de ψ et de φ, je peux appliquer la remarque faite par Jacobi, et j'obtiens alors les deux intégrales suivantes

$$(1) \qquad A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + C \cos^2\theta \frac{d\psi}{dt} + C \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} = h,$$

$$(2) \qquad C \frac{d\varphi}{dt} + C \cos\theta \frac{d\psi}{dt} = Ck,$$

où h et k désignent deux constantes.

On a encore, en désignant par U la fonction de force,

$$(3) \qquad 2T = 2(U + H), \qquad H = \text{une const.}$$

Par conséquent,

$$A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = h - Ck \cos\theta,$$

$$A \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + A \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Ck^2 = 2(U + H),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Ck \cos\theta}{A \sin^2\theta},$$

$$A^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2A(U + H) \sin^2\theta - ACk^2 \sin^2\theta - (h - Ck \cos\theta)^2,$$

$$(4) \qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{2A(U + H) \sin^2\theta - ACk^2 \sin^2\theta - (h - Ck \cos\theta)^2}}.$$

Soit

$$U = \Sigma[L(x^2 + y^2) + Mz^2 + 2Nz]m$$

la fonction de force. Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe des z.

Chaque point du corps est donc soumis à une force constante et à une force qui est proportionnelle à la distance du point à un plan fixe. Les composantes de la force sont, en effet,

$$2Lx, \quad 2Ly, \quad 2Mz + 2N,$$

la force est donc la somme de deux autres, ayant pour composantes

$$0, \quad 0, \quad 2(M - L)z$$

et

$$2Lx, \quad 2Ly, \quad 2Lz + 2N.$$

La seconde passe par un point fixe de l'espace, et peut se décomposer en une force passant par le point fixe du corps et en une force constante.

En observant que le corps est de révolution et que les coordonnées du centre de gravité $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ sont nulles, j'obtiens pour U

$$\begin{aligned}
U &= L[(1-\gamma^2)\Sigma\xi^2 m + (1-\gamma'^2)\Sigma\eta^2 m + (1-\gamma''^2)\Sigma\zeta^2 m] \\
&\quad + M(\gamma^2\Sigma\xi^2 m + \gamma'^2\Sigma\eta^2 m + \gamma''^2\Sigma\zeta^2 m) + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\
&= L\Sigma(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)m + (M-L)\gamma^2\Sigma\xi^2 m + (M-L)\gamma'^2\Sigma\xi^2 m \\
&\quad + (M-L)\gamma''^2\zeta^2 + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\
&= L\Sigma(2\xi^2+\zeta^2)m + (M-L)\gamma''^2\Sigma(\zeta^2-\xi^2)m + (M-L)\Sigma\xi^2 m + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\
&= AL + (M-L)(A-C)\gamma''^2 + \frac{MC}{2} + 2N\gamma''\bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Or on a

$$\gamma = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$\gamma' = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$\gamma'' = \cos\theta,$$
$$U = (L-M)(C-A)\cos^2\theta + 2N\bar{\zeta}\cos\theta + \frac{MC}{2} + AL.$$

Désignons par R le polynôme sous le radical dans l'expression (4). L'équation $R=0$ admet toujours deux racines réelles. En effet,

$$\theta = 0, \qquad R = -(h-Ck)^2 < 0$$

pour

$$\theta = \pi, \qquad R = -(h+Ck)^2 < 0.$$

Pour la valeur initiale θ_0, R doit toujours être positif. Nous pouvons supposer que θ soit compris entre 0 et π,

$$\theta = \theta_0, \qquad R > 0.$$

On voit, par conséquent, qu'il existe deux racines réelles comprises entre -1 et $+1$.

Posons $\cos\theta = x$, j'obtiens

$$(5) \qquad t = \int_{x_0}^{x} \frac{-dx}{\sqrt{A'x^4 + B'x^2 + C'x + D}}.$$

Désignons par α, β, γ, δ les racines du polynôme sous le radical dans (5). Pour ramener le polynôme à la forme normale de M. Weierstrass, je pose

$$x = \frac{\alpha x' + b}{x' + d},$$

où b et d sont constantes. J'obtiens alors

$$t = 4k\int_{x'_0}^{x'} \frac{dx'}{\sqrt{4x'^3 - g_2 x' - g_3}}.$$

Les constantes b et d sont déterminées par

$$b - \alpha d = 4,$$
$$\frac{d\delta - b}{\alpha - \delta} + \frac{d\beta - b}{\alpha - \beta} + \frac{d\gamma - b}{\alpha - \gamma} = e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

où e_1, e_2, e_3 sont les trois racines du polynôme $4x'^3 - g_2x' - g_3$. J'ai encore posé

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} = k^2.$$

En faisant l'inversion de l'intégrale, on obtient

$$p\left(v - \frac{t}{4k}\right) = x', \qquad v = \text{une const.},$$

ou

$$v - \frac{t}{4k} = u, \qquad -\frac{dt}{4k} = du,$$

en posant

$$p(u) = x'.$$

Je veux maintenant exprimer ψ et φ en fonction de t,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Ck\cos\theta}{A\sin^2\theta} = \frac{h - Ck\cos\theta}{A(1-\cos^2\theta)} = \frac{h - Ckx}{A(1-x^2)}.$$

Les infinis de $\frac{d\psi}{dt}$ sont simples et donnés par

$$\theta = 0, \qquad \theta = \pi.$$

En vertu de la relation

$$x = \frac{\alpha x' + b}{x' + d} = \frac{\alpha p(u) + b}{p(u) + d},$$

on obtient les valeurs correspondantes de $p(u)$,

$$p(u_1) = \frac{b-d}{1-\alpha}, \qquad p(u_2) = -\frac{(b+d)}{1+\alpha}.$$

Or $p(u)$ est une fonction de degré pair; il existe donc les quatre infinis simples u_1, $-u_1$, u_2, $-u_2$,

$$(6)\quad\begin{cases} d\psi = -\dfrac{4k}{A}\,\dfrac{\{h[p(u)+d]-Ck[\alpha p(u)+b]\}[p(u)+d]\,du}{\{[p(u)+d]^2-[\alpha p(u)+b]^2\}} \\ \quad = \Big[C_0 + C_1\dfrac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + C_2\dfrac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} \\ \qquad + \overline{C}_1\dfrac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)} + \overline{C}_2\dfrac{\sigma'(u+u_2)}{\overline{\sigma}(a+u_2)}\Big]\,du. \end{cases}$$

En prenant les résidus, je vois immédiatement que

$$C_1 = -\overline{C}_1, \qquad C_2 = -\overline{C}_2.$$

Pour déterminer C_0, je pose $u = 0$ dans (6).

En intégrant, on trouve

$$\psi - \psi_0 = C_0(u-u_0) + C_1 \log\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_0+u_1)}{\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u+u_1)} + C_2\log\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_0+u_2)}{\sigma(u_0-u_2)\,\sigma(u+u_2)}.$$

On tire de (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{kA\sin^2\theta - (h - Ck\cos\theta)\cos\theta}{A\sin^2\theta} = \frac{-(Ck+Ak)\cos^2\theta - h\cos\theta + Ak}{A(1-\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{-(Ck+Ak)[\alpha p(u)+b]^2 - h[\alpha p(u)+b][p(u)+d] + Ak[p(u)+d]^2}{A\{[p(u)+d]^2-[\alpha p(u)+b]^2\}},$$

$$\varphi - \varphi_0 = C'_2(u-u_0) + C'_1\log\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_0+u_1)}{\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u+u_1)} + C'_2\log\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_0+u_2)}{\sigma(u_0-u_2)\,\sigma(u+u_2)},$$

Enfin, en réunissant mes résultats trouvés, j'obtiens

$$\cos\theta = \frac{\alpha p(u)+b}{p(u)+d}, \qquad v - \frac{t}{4k} = u,$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\alpha p(u_0)+b}{p(u_0)+d}, \qquad u_0 = v,$$

$$\psi - \psi_0 = C_0(u-u_0) + C_1\log\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_0+u_1)}{\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u+u_1)} + C_2\log\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_0+u_2)}{\sigma(u_0-u_2)\,\sigma(u+u_2)},$$

$$\varphi - \varphi_0 = C'_0(u-u_0) + C'_1\log\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_0+u_1)}{\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u+u_1)} + C'_2\log\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_0+u_2)}{\sigma(u_0-u_2)\,\sigma(u+u_2)}.$$