Bulletin de la S. M. F.

G. Koenigs

Sur les lois de force centrale fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 153-155

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__153_0>

Sur les lois de force centrale fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques; par M. G. Koenigs.

1. Soit $f'(r)$ une loi de force centrale fonction de la distance; le mouvement sur le rayon vecteur est défini par l'équation

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2f(r) + h - \frac{c^2}{r^2}. \tag{1}$$

h est la constante des forces vives, et c est la constante des aires.

Supposons que, dans une zone Z comprise entre les cercles de rayons a et $b > a$ dont les centres sont à l'origine, la force soit attractive, c'est-à-dire que $f'(r)$ soit négative entre a et b. Prenons un point M_0 dont le r sera égal à r_0, et lançons de ce point le mobile avec une vitesse angulaire θ'_0 et une vitesse d'élongation r'_0. On aura

$$c = r_0^2\theta'_0, \qquad h = r_0'^2 - 2f(r_0) + r_0^2\theta_0'^2. \tag{2}$$

Soit r_1 une valeur de r supérieure à r_0, mais comprise entre a et b,

$$b > r_1 > r_0 > a;$$

comme $f'(r) < 0$, la fonction $f(r)$ est décroissante; on a donc

$$f(r_0) - f(r_1) > 0.$$

Il est alors possible de déterminer la quantité θ'_0, de telle sorte que l'expression

$$2[f(r_0) - f(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2\theta_0'^2 > 0 \tag{I}$$

soit positive; choisissons ensuite r'_0 vérifiant l'inégalité

$$r_0'^2 < 2[f(r_0) - f(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2\theta_0'^2. \tag{I'}$$

Cela posé, si nous étudions le mouvement correspondant à ce choix des données initiales, nous verrons que le second membre de (1) est positif pour $r = r_0$, mais négatif pour $r = r_1$, en vertu de l'inégalité (I').

Cela prouve que la trajectoire est tout entière comprise à l'intérieur du cercle de rayon r_1 qui a son centre à l'origine; de là le lemme suivant :

Lemme. — *Si une loi de force centrale fonction de la distance est* attractive *dans une zone* Z, *tous les mouvements dont les données initiales vérifient certaines* inégalités *ont lieu sur des trajectoires comprises à l'intérieur d'un cercle de rayon fini.*

En un mot, ces trajectoires n'ont pas de point à l'infini; représentons par (T) l'ensemble de ces trajectoires soumises, répétons-le, à de simples conditions d'*inégalité* pour les données initiales.

2. Ce lemme conduit au corollaire suivant :

Si une loi de force centrale fonction de la distance a toutes ses trajectoires algébriques et si, de plus, elle est attractive dans une certaine zone, *toutes les trajectoires* (T) *relatives à cette zone étant à distance finie sont* nécessairement fermées *puisqu'elles sont algébriques.*

Il suit de là, d'après un théorème bien connu de M. Bertrand, que la loi de force doit être la loi d'*attraction* de la nature, ou la loi d'*attraction* proportionnelle à la distance.

On peut en effet énoncer le théorème de M. Bertrand sous la forme suivante, immédiatement applicable au cas qui nous occupe.

Si une loi de force centrale fonction de la distance est telle que, sous le bénéfice de certaines inégalités entre les données initiales, *les trajectoires satisfaisant à ces inégalités soient toutes fermées, la loi est justement l'*attraction *de la nature ou l'*attraction *proportionnelle à la distance.*

3. Mais il se peut que la loi de force centrale ne soit attractive dans aucune zone, et alors le raisonnement précédent n'est plus applicable, parce que l'on ne peut plus satisfaire à l'inégalité (I).

Pour lever cette difficulté, il suffit de faire la remarque suivante.

Supposons généralement qu'on ait dans le plan les équations d'un mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda X, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda Y \text{ [1]},$$

[1] Dans une Note aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Appell a attiré le premier l'attention sur l'indifférence du facteur λ vis-à-vis des trajectoires.

où λ est une constante arbitraire et X, Y des fonctions de x, y.

Tous les mouvements qui correspondent à diverses valeurs de λ ont les mêmes trajectoires. On sait en effet qu'on obtient l'équation du troisième ordre des trajectoires en éliminant le temps entre ces deux équations; or il est clair que λ s'élimine en même temps que t.

On peut dire encore que l'on passe d'un mouvement à l'autre en y remplaçant t par $t\sqrt{\lambda}$.

Prenons, en particulier, $\lambda = -1$, et nous arrivons au résultat suivant.

Les mouvements

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -X,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = Y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -Y$$

ont les mêmes trajectoires ou, si l'on veut s'en tenir à la considération du temps réel, les trajectoires de ces deux mouvements constituent en quelque sorte les deux moitiés d'une même famille de courbes à trois paramètres.

Il suit de là que, si les trajectoires d'un mouvement sont algébriques, celles du second le sont aussi. On peut ainsi ramener le cas d'une force centrale répulsive au cas d'une force attractive et retomber sur le problème de M. Bertrand.

On a donc ce théorème général :

*Les seules lois de forces centrales fonctions de la distance pour lesquelles les trajectoires sont toutes algébriques sont l'*attraction *et la* répulsion *en raison inverse du carré de la distance, et l'*attraction *et la* répulsion *proportionnelles à la distance.*