BULLETIN DE LA S. M. F.

F. G. TEIXEIRA

Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 125-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__125_0>

Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre;

par F. Gomes Teixeira.

1. Je vais considérer l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\text{(1)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions de x, y, z, p, q, et où l'on pose, suivant l'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

M. Imschenetsky a fait voir, dans son *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (pages 130 et 131 de la traduction par M. J. Hoüel), que cette équation peut être transformée dans une équation linéaire, quand on connaît une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires. Ensuite, en se basant sur les importantes recherches sur la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles publiées par Ampère dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique,* il fait voir que cette équation se simplifie considérablement quand cette intégrale satisfait à un ou aux deux systèmes d'équations de la *caractéristique,* auxquels Monge et Ampère ramènent le problème de l'intégration de (1).

Comme la théorie d'Ampère, qui ne se prête pas aisément à une exposition succincte, ne se trouve pas dans les Traités systématiques de Calcul intégral, je crois qu'il ne sera pas inutile de voir comme on obtient les mêmes résultats par des considérations directes. C'est le but que nous nous proposons dans cette Note.

2. Soit

$$\text{(2)} \qquad z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \gamma)$$

une intégrale particulière de (1) avec trois constantes arbitraires

α, β, η. Nous avons l'identité

$$(3)\qquad H_1 \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2K_1 \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + L_1 \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + M_1 + N_1 \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] = 0,$$

où H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 représentent des fonctions de ω, x, y, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$.

M. Imschenetsky considère ensuite α, β, η comme variables et introduit en (1), au lieu de la variable dépendante z, la variable η déterminée par (2) et, au lieu des variables indépendantes x et y, les variables α et β déterminées par les équations

$$(4)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0.$$

Pour obtenir l'équation dans laquelle se transforme de cette manière l'équation proposée, on tire de (2)

$$p = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial\beta} + \frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$s = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial p}{\partial\beta} + \frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

$$t = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial\alpha} + \frac{\partial q}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial q}{\partial\beta} + \frac{\partial q}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\beta}{\partial y};$$

ensuite on substitue dans les expressions précédentes de r, s, t les valeurs de $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\beta}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ que l'on tire des équations du premier degré qui résultent de la différentiation des deux équations (4), par rapport à x et à y; et enfin on substitue les valeurs qui résultent pour r, s, t dans l'équation (1). On trouve de cette manière, ayant égard à (3), l'équation suivante :

$$(5)\qquad R\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} + 2S\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + T\frac{\partial^2\eta}{\partial\beta^2} + U = 0,$$

où R, S, T, U sont des fonctions de α, β, η, $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\beta}$ données par les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{R} = &+ (\mathrm{H}+\mathrm{N}t_1)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)^2\\
&+2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s_1)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\\
&+ \mathrm{L}+(\mathrm{N}r_1)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} = &+ (\mathrm{H}+\mathrm{N}t_1)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\\
&+ (\mathrm{K}-\mathrm{N}s_1)\Bigg[\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\Bigg]\\
&+ (\mathrm{L}+\mathrm{N}r_1)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{T} = &+ (\mathrm{H}+\mathrm{N}t_1)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2\\
&+2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s_1)\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\\
&+ (\mathrm{L}+\mathrm{N}r_1)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\mathrm{U} = &+ \mathrm{N}\Bigg[\left(\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)\Bigg]^2\\
&+ \mathrm{R}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2\right]\\
&+2\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)\\
&+ \mathrm{T}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}+2\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

où je pose, pour abréger,

$$
p_1=\frac{\partial\omega}{\partial x},\qquad q_1=\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad r_1=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},\qquad s_1=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y},\qquad t_1=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}.
$$

3. Cela posé, j'entre dans le sujet de cette Note, c'est-à-dire, je vais considérer le cas où l'on obtient l'intégrale (2) au moyen d'une ou de deux intégrales intermédiaires particulières de (1), avec une constante arbitraire chacune.

Soit

$$(6) \qquad f(x, y, z, p, q) = \alpha$$

une intégrale intermédiaire de (1) avec une constante arbitraire α. On sait que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux équations qui résultent de l'élimination de deux des quantités r, s, t entre (1) et les équations suivantes

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} p + \dfrac{\partial f}{\partial p} r + \dfrac{\partial f}{\partial q} s = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \dfrac{\partial f}{\partial p} s + \dfrac{\partial f}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

et que ces équations sont (¹)

$$\begin{aligned} P = H\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} - H\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ - 2K\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + M\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 - N\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = H\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - 2K\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + L\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 \\ - N\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} - N\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant l'équation (2) une intégrale particulière de (6) que l'on peut obtenir, comme on sait, par la méthode de Lagrange et Charpit. La valeur qu'il donne pour z satisfait aux équations précédentes, et par conséquent satisfait aussi à l'équation suivante

$$(8) \qquad (H + Nt)\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + (L + Nr)\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 = 0$$

qui résulte de l'élimination de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$$

dans la seconde au moyen des équations (7).

Mais, en différentiant (6) par rapport à β et considérant z, p, q comme des fonctions de β déterminées par (2), on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right) = 0$$

(¹) C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 365.

ou, en vertu des équations (4),

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)+\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)=0.$$

En substituant maintenant dans l'expression de R la quantité

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}$$

par sa valeur donnée par cette équation, on trouve

$$-R=\frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}\left[(H_1+N_1 t)\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 \right.$$
$$\left. -2(K_1-N_1 s_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+(L_1+N_1 r_1)\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2\right].$$

Donc, en vertu de la formule (8), nous avons $R=0$, et l'équation (5) prend la forme simplifiée suivante :

$$2S\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha\,\partial \beta}+T\frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2}+U=0.$$

4. Soient maintenant

(9) $$f(x,y,z,p,q)=\alpha, \qquad F(x,y,z,p,q)=\beta$$

deux intégrales intermédiaires particulières de (1) avec deux constantes arbitraires α et β. Si chacune d'elles satisfait à un des deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, auxquels la méthode de Monge ramène le problème de l'intégration de l'équation (1), ou à un des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquels la méthode de Boole ramène le même problème, on sait que les valeurs de p et q données par les équations (9) rendent

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

intégrable. De cette intégration résulte l'équation (2).

Dans ce cas, on voit, comme dans le cas antérieur, que $R=0$. Ensuite, en éliminant dans l'expression de T la quantité

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$$

au moyen de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial F}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)=0,$$

et ayant égard à l'équation qui résulte du changement dans (8) de f en F, on voit aussi que $T=0$.

L'équation (5) prend donc la forme suivante :

$$2S\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha\,\partial \beta}+U=0.$$

5. Soit maintenant

$$K^2-HL+MN=0$$

ce qui arrive quand les deux systèmes d'équations de la *caractéristique* coïncident, et soit encore

$$f(x,y,z,p,q)=\alpha \tag{6}$$

une intégrale particulière de (1) avec une constante arbitraire α.

En différentiant cette équation par rapport à α et à β, considérant z, p, q comme des fonctions de α et β déterminées par (2) et ayant égard à (4), on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)+\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)=1.$$

En substituant ensuite dans l'expression de S les valeurs que ces équations donnent pour

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta},\quad \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha},$$

on trouve

$$\begin{aligned}S={}&\frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}\\ &\times\left[(H_1+N_1t_1)\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2\right.\\ &\qquad\left.-2(K_1-N_1s_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+(L_1+N_1r_1)\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2\right]\\ &+\frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}+\frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}\left[-(H_1+N_1t_1)\frac{\partial f}{\partial q_1}+(K_1-N_1s_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}\right],\end{aligned}$$

et par conséquent, en vertu de (8),

$$S = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}\left[-(H_1 + N_1 t_1)\frac{\partial f}{\partial q_1} + (K_1 - N_1 s_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}\right].$$

Mais l'équation (8) donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt}\frac{\partial f}{\partial p}\\ &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt}\frac{\partial f}{\partial p}\\ &= \frac{K - Ns}{H + Nt}\frac{\partial f}{\partial p}.\end{aligned}$$

Donc nous avons $S = 0$, et l'équation (5) prend la forme

$$T\frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2} + U = 0.$$