

BULLETIN DE LA S. M. F.

ISSALY

Étude géométrique sur la courbure des pseudosurfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 84-101

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__84_0

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces;
par M. l'Abbé ISSAÏY.

Préliminaires.

1. De notre Mémoire sur les *congruences de droites* (1), il résulte qu'une pseudo-surface n'est autre qu'un lieu géométrique d'un nouveau genre produit par deux systèmes de courbes variables ne s'entrecoupant qu'aux infiniment petits du second ordre près.

Un tel lieu n'est pas susceptible, à vrai dire, d'être représenté par une équation finie entre trois variables, telles que x, y, z ; mais il peut l'être, implicitement du moins, par une équation différentielle de la forme

$$[dz = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy]$$

jointe à la condition de non-intégrabilité

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} > \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

A ce point de vue, toute surface peut être considérée comme un cas particulier ou, pour mieux dire, comme une limite commune à une double série de pseudo-surfaces infiniment voisines.

On en conclut que, quelle que soit, par exemple, l'expression que l'on adopte pour la mesure de la courbure d'une surface en chacun de ses points, cette expression devra pouvoir se déduire, en y faisant simplement $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ou $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$, suivant la notation adoptée, de celle qui conviendrait à l'une quelconque des pseudo-surfaces voisines. Et, comme nous savons qu'*a priori* cette dernière expression ne dépend aucunement des paramètres E, F, G de Gauss, on peut affirmer que la première n'en saurait dépendre, pour sa part, de nécessité absolue du moins.

A l'appui de cette déduction, nous rappellerons que la forme *primitive* des équations des lignes remarquables d'une surface

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI.

prise en général s'obtient sans le secours de ces paramètres, et que c'est pour la variété seule des applications que la nécessité de leur introduction se fait sentir.

2. Du même Mémoire, il résulte encore qu'en tout point M d'une pseudo-surface on peut concevoir deux surfaces auxiliaires osculatrices F_μ et F_ν correspondant, l'une à la moyenne arithmétique $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)$, l'autre à la moyenne géométrique $\frac{1}{\sqrt{\rho_1'' \rho_2''}}$ des courbures corrélatives des lignes coordonnées.

La première de ces surfaces est étroitement liée aux plans principaux des pseudo-surfaces qui lui sont tangentes, tandis que la seconde se rattache à leurs plans focaux. Or on sait que les plans principaux sont toujours réels, tandis que les plans focaux peuvent être imaginaires. Pour ce motif surtout nous emploierons de préférence la surface F_μ dans tout ce qui va suivre.

I.

Extension aux pseudo-surfaces des principales formules proposées comme mesure de la courbure des surfaces.

3. Rappelons d'abord l'équation de l'indicatrice de la surface F_μ , laquelle est aussi celle des pseudo-surfaces correspondantes [I, n° 19 (1)], savoir :

$$(1) \quad \frac{X^2}{r_1''} + \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) XY + \frac{Y^2}{r_2''} = 1.$$

Cette conique, avons-nous dit, appartient aux genres : ellipse, hyperbole ou parabole, selon que la quantité

$$k_\mu \sin^2 \theta = \frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2$$

est, ou positive, ou négative, ou nulle.

On en déduit, pour l'équation aux rayons principaux R_1'' et R_2'' ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin^2 \theta}{R''^2} - \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta \right] \frac{1}{R''} \\ + \left[\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2 \right] \end{array} \right\} = 0.$$

(1) Cette abréviation est un renvoi au n° 19 de notre premier Mémoire.

Rapportée à ses axes de figure, l'indicatrice prend dès lors la forme réduite

$$(3) \quad \frac{X^2}{R_1''} + \frac{Y^2}{R_2''} = 1,$$

et l'on remarque qu'avec ce choix de coordonnées l'expression de la première courbure verticale de la ligne quelconque S peut s'écrire

$$(4) \quad \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \theta_1}{R_1''} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_2''}.$$

4. Actuellement, de l'origine M comme centre, avec un rayon variable $\sqrt{R''}$, décrivons une sphère; puis, sur le plan horizontal $T_1 M T_2$, considérons les deux courbes du second ordre

$$\begin{aligned} X^2 + 2XY \cos \theta + Y^2 &= R'', \\ \frac{X^2}{r_1''} + \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) XY + \frac{Y^2}{r_2''} &= 1, \end{aligned}$$

où l'on reconnaît, avec l'indicatrice (1), la section de la sphère par le plan horizontal.

Le couple des sécantes communes qui se coupent à l'origine ayant pour équation

$$\left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{r_1''} \right) X^2 + 2 \left[\frac{\cos \theta}{R''} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \right] XY + \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{r_2''} \right) Y^2 = 0$$

ou bien

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0,$$

si l'on pose

$$\delta \sin^2 \theta = AC - B^2,$$

il viendra

$$\delta = \left(\frac{1}{R''} \right)^2 - J_1 \left(\frac{1}{R''} \right) + J_2 = \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R_2''} \right);$$

les coefficients J_1 et J_2 n'étant autres que les invariants

$$J_1 = \frac{\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

$$J_2 = \frac{\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2}{\sin^2 \theta}.$$

Ceci posé, il est facile de voir que, *généralisées*, c'est-à-dire appliquées aux pseudo-surfaces, les formules principales qui ont été présentées, en divers temps, comme mesure de la courbure d'une surface ne sont autres que des fonctions symétriques des racines $\frac{1}{R_1'}$, $\frac{1}{R_2'}$ de l'équation $\delta = 0$ et, par suite, des fonctions rationnelles des invariants J_1 et J_2 . En effet, en ayant égard aux formules de transformation des coordonnées, on a

$$k_{\mu} = \frac{1}{R_1' R_2'} = J_2 \text{ (Gauss),}$$

$$k_{\mu_1} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{1}{R_2'^2} = J_1 - 2J_2,$$

$$k_{\mu_2} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = J_1 \text{ (Sophie Germain),}$$

$$k_{\mu_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) = \frac{1}{2} J_1,$$

$$k_{\mu_4} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{2}{3R_1' R_2'} + \frac{1}{R_2'^2} = J_1^2 - \frac{4}{3} J_2 \text{ (MM. Bourget et Housel).}$$

§. Discutons sommairement la convenance de ces valeurs au point de vue de la mesure de la courbure des pseudo-surfaces :

1° $k_{\mu} = \frac{1}{R_1' R_2'}$. — Ce rapport pourra bien être généralement tenu pour acceptable, tant que R_1' et R_2' seront de même signe ou de signe contraire ; mais, de l'avis d'un grand nombre, à coup sûr, il cessera de paraître tel lorsque l'un de ces rayons deviendra infini, ce qui a lieu lorsque F_{μ} est une surface développable.

2° $k_{\mu_1} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{1}{R_2'^2}$. — En adoptant cette expression, on remplace implicitement la courbure normale $\frac{1}{r''}$ par le carré $\frac{1}{V_2}$ de la déviation verticale relative au pinceau des normales [MN] de la surface F_{μ} ou, si l'on veut, l'indicatrice (3) par la *déviatrice*

$$\frac{X^2}{R_1'^2} + \frac{Y^2}{R_2'^2} = 1$$

de cette surface. Or on rend de la sorte impossible tout moyen de distinguer la concavité d'avec la convexité de F_{μ} autour du point M, chose essentielle, sans contredit, lorsqu'il s'agit de courbure.

3° $k_{\mu_2} = \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''}$. Cette troisième formule tombe en défaut, lorsque F_μ est une surface *minima*, et l'on peut ajouter, en ayant égard aux invariants ci-dessus, lorsque les pseudo-surfaces qu'elle remplace le sont avec elle.

4° $k_{\mu_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_1''} \right)$. — Ceci équivaut à prendre pour mesure de la courbure de la surface F_μ sa courbure sphérique ou moyenne, mais on y rencontre les mêmes inconvénients qu'avec k_{μ_2} .

5° $k_{\mu_4} = \frac{1}{R_1''^2} + \frac{2}{3R_1''R_2''} + \frac{1}{R_2''^2}$. — Seule, cette dernière formule nous a paru particulièrement digne d'attention : aussi n'avons-nous pas hésité, en l'adoptant pour les pseudo-surfaces, à la prendre comme point de départ de nos présentes recherches. Mais il faut auparavant en expliquer l'origine.

6. Supposons que l'on porte sur la normale MN, à partir du point M, les longueurs $\frac{1}{r''} = r''$ des courbures des diverses sections normales de la surface F_μ . Rabattons chacune de ces longueurs suivant l'intersection du plan horizontal T, MT_2 avec le plan normal qui la contient. Leurs extrémités détermineront un arc de courbe dont la forme suffira déjà à rendre sensible la variation des courbures des sections normales successives, et par là même celle de la surface F_μ autour du point choisi.

En convenant de remplacer désormais θ_1 par ψ (à cause de l'ambiguïté qui ne tarderait pas à survenir), l'équation en r'' et ψ de la courbe, dont nous venons d'indiquer la construction, sera

$$(5) \quad \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}.$$

C'est une courbe du quatrième ordre.

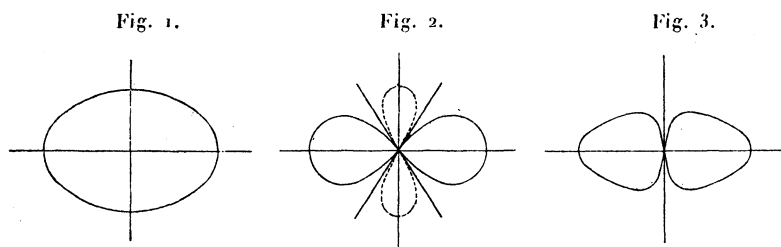
Sa transformée par rayons vecteurs réciproques

$$(6) \quad r'' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}$$

est du sixième. Arrêtons-nous à elle un instant.

On voit qu'elle présente trois variétés, selon que R_1'' et R_2'' sont

de même signe, de signe contraire ou que l'un des deux R_2'' , par exemple, est infini.



Nous l'appellerons *indicatrice (plane) de courbure* pour la distinguer de l'indicatrice proprement dite.

En désignant d'une manière générale par A_{η} son aire, on a

$$(7) \quad \begin{cases} \psi'' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \psi'' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \psi'' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''}. \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} A_{\eta_1} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{R_1''^2} + \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{3}{R_2''^2} \right), \\ A_{\eta_2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{R_1''^2} - \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{3}{R_2''^2} \right), \\ A_{\eta_3} = \frac{\pi}{8} \frac{3}{R_1''^2}. \end{cases}$$

Ainsi c'est par l'aire de la courbe réciproque (6) qu'à l'instar de la méthode introduite par MM. Bourget et Housel nous proposerons, à titre de première approximation, de mesurer en chacun de ses points la courbure d'une pseudo-surface.

7. Et maintenant posons-nous la question suivante :

N'est-il pas possible de remplacer, soit le contour, soit l'aire de la courbe réciproque (6), c'est-à-dire des indicatrices (7), dont la construction artificielle ne fournit qu'une solution approchée du problème, par des surfaces convexes mesurant, en toute exactitude, géométriquement par elles-mêmes d'abord et numériquement par leur aire ensuite, la courbure de la surface F_{μ} en M et, par suite, celle de toutes les pseudo-surfaces infiniment voisines?

On le peut effectivement; mais avouons tout de suite que si, au point de vue théorique, ces surfaces doivent nous donner une expression géométrique *adéquate* de la courbure, pratiquement, le calcul numérique de leur aire offrira des difficultés sérieuses, au point de faire regretter, pour ainsi dire, l'abandon des indicatrices planes. Regret inutile, dirons-nous aussitôt, puisqu'on verra, dès le paragraphe suivant, qu'il est toujours possible et même facile, à l'aide d'une transformation légère (véritable *critérium* par rapport à la première méthode) de faire prendre aux indicatrices convexes une aire rigoureusement égale à celle des indicatrices planes qui leur correspondent.

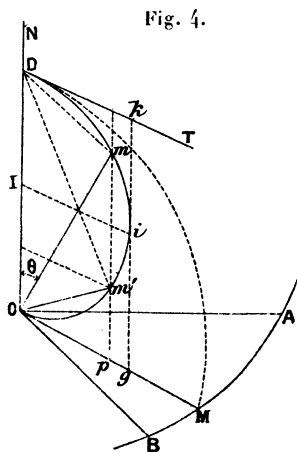
Comme les surfaces annoncées se ramènent à un type général jouissant de la propriété signalée et de quelques autres, non moins remarquables, nous croyons devoir faire connaître tout d'abord et le type lui-même et ces propriétés.

II.

Théorèmes généraux relatifs aux hémicyclides.

8. Nous appelons *surface hémicyclidale* ou simplement *hémicyclide* une surface engendrée par un demi-cercle dans les conditions que voici :

Soient AB un arc de courbe plane algébrique ou transcendante;



AOB le secteur correspondant à un pôle donné O. Relevons sur la

normale au plan menée au pôle chacun des rayons vecteurs qui aboutissent aux divers points de l'arc pour en faire le diamètre OD d'un demi-cercle situé dans le plan du rayon considéré et de la normale :

THÉORÈME I. — *L'aire du secteur donné est exactement égale à celle de la surface transformée que l'on obtient en substituant à chacun des éléments fusiformes de l'hémicyclide construite le fuseau sphérique qui en est la projection sur la sphère d'égal diamètre.*

Soit, en effet, $F(r, \psi) = 0$ l'équation de la courbe plane donnée, rapportée au point O comme pôle et à un axe polaire quelconque.

Pour préciser, prenons sur cette courbe la branche définie par la détermination de r suivante :

$$r = f(\psi).$$

En désignant par ρ un rayon vecteur Om quelconque et par θ l'angle qu'il fait avec ON, on aura pour équation du demi-cercle générateur

$$\rho = r \cos \theta,$$

θ ne variant que de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour équation de l'hémicyclide correspondant à la branche considérée,

$$\rho = f(\psi) \cos \theta.$$

Posons

$$u = \rho \sin \theta;$$

l'aire de la portion de surface transformée qui correspond à l'angle AOM = ψ sera

$$(8) \quad A_{\psi} = 2 \int_0^{\psi} d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u du}{\cos 2\theta},$$

et, comme

$$\sin 2\theta = \frac{2u}{r},$$

il vient

$$A_{\psi} = 2 \int_0^{\psi} d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}}.$$

Mais

$$\int \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}} = -\frac{r^2}{4} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}} + c;$$

donc

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^\psi r^2 d\psi = A_1;$$

ce qui démontre la propriété.

9. Quant à l'aire exacte A de l'hémicyclide, si l'on représente par γ l'angle que fait, avec le plan des XY , le plan tangent mené en un quelconque m de ses points, on aura

$$A = 2 \int_0^\psi d\psi \int_0^{\frac{r}{\cos \gamma}} \frac{u du}{\cos^2 \gamma} = 2 \int_0^\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 2\theta d\psi^2},$$

formule dans laquelle r et dr devront, avant tout calcul, être remplacés par leur valeur en fonction de ψ . On voit après cela que la première des intégrations à effectuer, celle par rapport à θ , dépend déjà des fonctions elliptiques, ce qui justifie ce que nous avons fait pressentir au n° 7 des complications inhérentes au calcul d'une aire semblable.

10. Il est essentiel d'observer, dès à présent, que si le mode de transformation adopté altère l'expression finie de l'aire de la surface, il n'en sera pas de même de l'expression du volume, puisque la somme des éléments solides que l'on néglige est infiniment petite par rapport à ce volume lui-même.

11. THÉORÈME II. — *La portion de volume du cylindre droit circonscrit à une hémicyclide, comprise entre cette dernière surface et sa projection sur le plan horizontal, est exactement le quart de l'onglet correspondant, si on limite le cylindre à la courbe des contacts; elle en est la moitié si l'on n'arrête le cylindre qu'au conoïde que forment les tangentes horizontales de l'hémicyclide.*

En effet, le volume d'angle ψ de l'hémicyclide a pour expres-

sion

$$(9) \quad V = \frac{1}{3} \int_0^\psi d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{12} \int_0^\psi r^3 d\psi.$$

D'autre part, celui du cylindre circonscrit limité à la courbe de contact est

$$(10) \quad U = \int_0^\psi d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} z u du,$$

avec la condition

$$u^2 = z(r - z).$$

Résolvant par rapport à z et substituant dans l'expression de U la plus petite racine, il vient par intégration

$$U = \frac{1}{48} \int_0^\psi r^3 d\psi = \frac{1}{4} V.$$

Doubleant enfin le résultat, puisque la courbe des contacts est une ligne diamétrale, on aura le volume total du cylindre extérieur à l'onglet et arrêté au conoïde qui en forme la base supérieure, c'est-à-dire $\frac{1}{2}V$.

C. Q. F. D.

Ces deux théorèmes constituent une haute généralisation des théorèmes d'Archimède relatifs au rapport qui existe entre la sphère et son cylindre circonscrit.

12. THÉORÈME III. — *La transformée par rayons vecteurs réciproques de toute hémicyclide est un conoïde parallèle à celui que forment ses tangentes horizontales.*

On le démontre sans peine en se souvenant que l'inverse d'une circonférence qui passe par le pôle d'inversion est une droite.

III.

Application des théorèmes précédents à l'indicatrice convexe de courbure d'une pseudo-surface.

13. Aux trois variétés (7) de l'indicatrice plane de courbure correspondant, en coordonnées polaires et rectangulaires, les trois

hémicyclides

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''} \right) \cos \theta, \\ \rho = \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_1''} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2''} \right) \cos \theta, \\ \rho = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} \cos \theta, \end{array} \right.$$

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(R_2'' X^2 + R_1'' Y^2) Z}{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2)}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(R_2'' X^2 - R_1'' Y^2) Z}{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2)}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{X^2 Z}{R_1'' (X^2 + Y^2)}. \end{array} \right.$$

Ce sont trois surfaces fermées. Dans la première, les diamètres des sections normales varient entre un maximum $\frac{1}{R_1''}$ et un minimum $\frac{1}{R_2''}$. Dans la seconde, les plans verticaux, conduits suivant les tangentes à l'origine de l'indicatrice plane correspondante, lui sont tangents et la divisent en quatre parties symétriques deux à deux et situées de part et d'autre du plan horizontal. Enfin la troisième surface dérive de la seconde en ce que les plans tangents dont on vient de parler coïncident.

On peut vérifier, à l'aide de la formule (8), qu'une fois transformées ou, pour mieux dire, *sphéricisées*, ces surfaces sont bien équivalentes aux indicatrices planes (7).

14. *Volumes indicateurs.* — Les volumes des indicatrices convexes (11) étant chacun le lieu géométrique de toutes les composantes orthogonales des courbures des diverses sections normales faites autour du point M dans la surface F_μ représentent par là même (nous ne disons pas mesurent) la courbure de la surface en ce point.

Parcourons successivement ces volumes ; leurs expressions sont intégrables :

1° Le volume de la première des indicatrices (11), calculé au moyen de la formule (9), a pour expression

$$V_1 = \frac{\pi}{9^0} \left(\frac{5}{R_1''} - \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{5}{R_2''} \right) \left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right).$$

2° En ce qui concerne le second, comme l'intégrale qui l'ex-
prime change de signe dans les directions $\text{tang } \psi_1 = \pm \sqrt{\frac{R_2''}{R_1''}}$ qui
sont celles des tangentes à l'origine, il faut user de l'intégrale dé-
doublée

$$\frac{1}{3} \int_0^{\psi_1} r^3 d\psi - \frac{1}{3} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} r^3 d\psi.$$

En posant, pour plus de symétrie,

$$\psi_1 = \frac{\pi}{4} + \psi'_1,$$

$$P = \frac{1}{144} \left(\frac{3.5}{R_1''^2} - \frac{2.7}{R_1'' R_2''} + \frac{3.5}{R_2''^2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1'' R_2''}},$$

$$Q = \frac{1}{48} \left(\frac{5}{R_1''^2} + \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{5}{R_2''^2} \right) \left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right),$$

on trouve, pour le volume total,

$$V_2 = 2P + 2Q_1 \psi'_2,$$

et, pour les volumes partiels,

$$V^2 = P + Q \left(\frac{\pi}{4} + \psi'_1 \right),$$

$$V'^2 = P - Q \left(\frac{\pi}{4} - \psi'_1 \right);$$

le premier étant situé au-dessus du plan horizontal et le second au-
dessous.

Ces divers résultats se simplifient singulièrement lorsque
 $R_1'' = R_2''$, ce qui est le cas (le signe — ayant été explicité) des
pseudo-surfaces minima.

On a alors

$$V^2 = V'^2 = P = \frac{1}{9R_1''^3},$$

valeur que l'on peut du reste vérifier directement en calculant
l'intégrale correspondante

$$\frac{1}{3R_1''^3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\psi d\psi.$$

3° Le troisième volume se tire de l'un quelconque des deux premiers en y faisant $R_2'' = \infty$. On trouve

$$V_3 = \frac{5}{96} \frac{\pi}{R_1^3}.$$

15. Aux volumes des hémicyclides on peut substituer équivallemment ceux des *cylindres indicateurs* correspondants (n° 11), puisque, arrêtés à la courbe de contact, ils sont le quart des premiers. C'est donc au même titre qu'eux qu'ils peuvent servir à *représenter* la courbure au point M.

Il est à remarquer que la base de ces cylindres est homothétique à l'indicatrice plane de MM. Bourget et Housel et, de plus, qu'elle en vaut le quart. On peut donc, pour éviter ce que la construction de celle-ci a d'artificiel, s'en tenir à la considération de ces bases.

16. *Propriétés diverses.* — Nous ferons observer avant tout que ce qui suit n'est applicable qu'au cas où l'indicatrice de la surface F_μ est elliptique.

I. Si l'on retranche de l'aire $A_{v_1} = A_{n_1}$ de la première des indicatrices convexes transformée, l'aire A_σ de la sphère dont le rayon $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right)$ est la moitié de la courbure sphérique au point M, on trouve, pour l'excès relatif de la première de ces surfaces sur la seconde :

$$\varepsilon = \frac{A_{v_1} - A_\sigma}{A_\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2.$$

D'autre part, la comparaison des volumes correspondants (que le premier soit transformé ou non) donne aussi

$$\varepsilon' = \frac{V_1 - V_\sigma}{V_\sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2.$$

On en déduit cette relation simple

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{3}.$$

II. Considérons la courbe infinitésimale

$$(\lambda) \quad d\lambda = \frac{(R_2'' - R_1'') \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{R_1''^2 \sin^2 \psi + R_2''^2 \cos^2 \psi}} ds.$$

C'est la projection sur le plan des XY de la ligne de *striction axiale* (I, n° 28) des génératrices du pinceau [MN] des (vraies) normales de la surface F_μ . Or, si l'on calcule le rapport de son aire à celle du cercle infinitésimal de rayon ds , directrice du pinceau, on trouve

$$\frac{\Omega_\lambda}{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2 = \varepsilon.$$

III. De même, si l'on cherche le volume compris entre la courbe (λ) et la surface conoïdale formée par les plus courtes distances IK, puis que l'on compare ce volume à celui d'un cylindre de révolution qui aurait pour base le cercle de rayon ds et une hauteur égale à $\frac{R_1'' R_2''}{R_1'' + R_2''} + \frac{1}{4} (R_1'' + R_2'')$, on reconnaît que leur rapport est, lui aussi, égal à ε .

17. Hâtons-nous d'ajouter que les calculs d'intégration qui précèdent seraient bien moins simples si, au lieu de considérer le pinceau de normales [MN] de F_μ , nous avions pris le pinceau de pseudo-normales correspondant. Le radical qui figure dans l'équation (λ) n'eût pas été alors indépendant des courbures alternantes $\frac{1}{P_1}$ et $\frac{1}{P_2}$ des lignes coordonnées actuellement tangentes aux axes de l'indicatrice; car si, dans ce cas, on a généralement $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = 0$ pour tout pinceau de pseudo-normales circumaxial de MN, on n'a $\frac{1}{P_1} = 0$ et $\frac{1}{P_2} = 0$ que pour le seul pinceau des vraies normales de la surface F_μ .

IV.

Application à divers lieux géométriques complémentaires relatifs à la courbure de la surface auxiliaire F_μ .

18. Au lieu de rabattre sur le plan horizontal, ainsi que nous l'avons fait au n° 6, les inverses $\frac{1}{r''}$ ou r'' des rayons de courbure des

sections normales de la surface F_μ , rabattons ces rayons eux-mêmes; nous aurons les trois courbes

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''}. \end{cases}$$

On en conclut pour les hémicyclides correspondantes, c'est-à-dire, d'après le théorème de Meusnier, pour le lieu des centres de courbure de toutes les sections normales ou obliques faites autour du point M dans la surface F_μ ,

$$(13) \quad \begin{cases} \rho = \frac{R_1'' R_2''}{R_2'' \cos^2 \psi + R_1'' \sin^2 \psi} \cos \theta, \\ \rho = \frac{R_1'' R_2''}{R_2'' \cos^2 \psi - R_1'' \sin^2 \psi} \cos \theta, \\ \rho = \frac{R_1''}{\cos^2 \psi} \cos \theta, \end{cases}$$

$$(13') \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2) Z}{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2) Z}{R_2'' X^2 - R_1'' Y^2}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R_1'' (X^2 + Y^2) Z}{X^2}. \end{cases}$$

La première de ces surfaces est fermée. Les deux dernières ont des nappes infinies : l'une, dans les directions asymptotiques $\text{tang } \psi_1 = \pm \sqrt{\frac{R_2''}{R_1''}}$; l'autre, dans la direction $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$.

A ces surfaces s'en rattachent d'autres qui leur sont homothétiques et que l'on pourrait qualifier de *surfaces de courbure*, puisqu'elles sont le lieu des *cercles* de courbure de toutes les sections normales faites autour du point M. Comme on les obtient en doublant les rayons vecteurs des précédentes, il suffira de s'occuper de celles-ci.

19. 1° L'application des deux premiers théorèmes généraux du

§ II nous donne, pour le premier cas,

$$A'_{\psi_1} = \pi \left(\frac{R'_1 + R'_2}{2} \right) \sqrt{R'_1 R'_2} \text{ (aire d'une ellipse),}$$

$$V'_1 = \frac{\pi}{48} (3R'_1 + 2R'_1 R'_2 + 3R'_2) \sqrt{R'_1 R'_2}.$$

Lorsque $R'_1 = R'_2$, c'est-à-dire, quand le point M est un *ombilic* pour chacun des points de la surface F_μ , on retrouve l'expression connue de la surface ou du volume de la sphère de rayon R'_1 .

2° Quant à l'aire transformée et au volume de la seconde surface, comme ils deviennent infinis pour $\psi = \psi_1$, il n'y a lieu que d'en calculer un fuseau ou un onglet d'angle inférieur à cette limite. On trouve ainsi, pour l'aire transformée du fuseau,

$$8A'_{\psi_2} = \frac{R'_1 R'_2 (R'_1 + R'_2) \sin^2 \psi}{R'_2 \cos^2 \psi - R'_1 \sin^2 \psi} + (R'_1 - R'_2) \sqrt{R'_1 R'_2} L \left(\frac{R'_2 \cos \psi + R'_1 \sin \psi}{R'_2 \cos \psi - R'_1 \sin \psi} \right).$$

Le cas de $R'_1 = R'_2$, correspondant aux pseudo-surfaces minima, est particulièrement intéressant.

On constate d'abord que la limite du dernier terme de A'_{ψ_2} est zéro. Il vient ensuite

$$A'_{\psi_2} = \frac{R_1'^2}{4} \operatorname{tang} 2\psi.$$

Ceci fait voir que, dans le cas actuel, l'aire totale de la surface que nous considérons est, au point M, la même que celle de *la bande du plan horizontal comprise entre deux parallèles équidistantes de l'origine de la quantité R'_1* .

Passant au volume de l'onglet correspondant à $\psi < \psi_1$, et posant, pour abrégér,

$$P' = [R'_2 (5R'_1 - 3R'_2) \cos^2 \psi + R'_1 (5R'_2 - 3R'_1) \sin^2 \psi] \frac{R'_1 R'_2 (R'_1 + R'_2) \sin^2 \psi}{(R'_2 \cos^2 \psi - R'_1 \sin^2 \psi)^2},$$

$$Q' = (3R_1'^2 - 2R'_1 R'_2 + 3R_2'^2) \sqrt{R'_1 R'_2} L \left(\frac{R'_2 \cos \psi + R'_1 \sin \psi}{R'_2 \cos \psi - R'_1 \sin \psi} \right),$$

on a la relation

$$192V'_2 = P' + Q'.$$

Lorsque $R'_1 = R'_2$, il vient

$$V'_2 = \frac{R_1'^3}{48} \left[\frac{\operatorname{tang} 2\psi}{\cos 2\psi} + L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right) \right].$$

3° Enfin la troisième surface acquiert, elle aussi, une aire et un volume infinis pour $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$; mais, pour un fuseau et un onglet d'angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$, on a

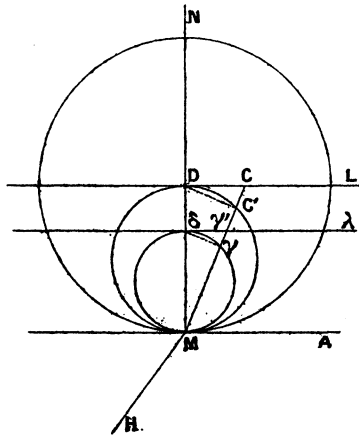
$$A'_3 = \frac{R_1'' \operatorname{tang} \psi}{6} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \psi} \right),$$

$$V'_3 = \frac{R_1''^3 \operatorname{tang} \psi}{180} \left(8 + \frac{4}{\cos^2 \psi} + \frac{3}{\cos^4 \psi} \right).$$

20. *Transformées conoïdales.* — D'après le théorème III (n° 10), toute transformée par rayons vecteurs réciproques d'une hémicyclide est un conoïde à génératrices horizontales. Cherchons les équations de ces conoïdes, d'abord pour les lieux géométriques qui nous occupent, ensuite pour les indicatrices convexes de courbure.

1° Soient $MD = r''$, $M\delta = \frac{1}{r''} = r'$. Désignons par C' le centre de courbure de la section oblique (fig. 5) faite dans la surface F_μ

Fig. 5.



par le plan CMH. Puisque l'on a $MC' \cdot M\gamma' = 1$, la transformée par rayons vecteurs réciproques de la première des surfaces (13') est le conoïde

$$Z = \frac{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2}{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2)},$$

que forment les tangentes horizontales de la première des indicatrices convexes (11'), le module de la transformation étant l'unité.

Quand ce module devient égal à $R_1'' R_2''$, l'équation de la transformée devient

$$(14) \quad Z = \frac{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2}{X^2 + Y^2}.$$

C'est le conoïde de *striction axiale* (I, n° 29) du pinceau [MN] des normales de la surface F_μ .

Dans ce dernier cas, l'intersection des deux surfaces appartient à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_1'' R_2'',$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = (R_2'' - R_1'')(R_1'' \sin^4 \psi - R_2'' \cos^4 \psi).$$

2° Revenons aux indicatrices convexes de courbure (11) ou (11'). Comme l'on a semblablement $MC.M\gamma = 1$, la transformée par rayons réciproques de la première des surfaces (11') est le conoïde

$$Z = \frac{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2)}{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2},$$

lieu des tangentes horizontales de la première des surfaces (13'), la constante étant égale à l'unité.

Lorsque cette constante devient égale à $\frac{1}{R_1'' R_2''}$, on a le conoïde

$$Z = \frac{X^2 + Y^2}{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2},$$

qui ne diffère que par le changement de Z en $\frac{1}{Z}$ du conoïde (14).

Ici l'intersection des surfaces a lieu sur la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{R_1'' R_2''},$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = \left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right) \frac{R_1'' \sin^4 \psi - R_2'' \cos^4 \psi}{(R_1'' \sin^2 \psi + R_2'' \cos^2 \psi)^2}.$$

Des considérations du même genre seraient applicables à la *déviatrice* dont nous avons parlé au n° 3, mais sans utilité pour tout ce qui concerne du moins la courbure des surfaces ou des pseudo-surfaces en chacun de leurs points.