BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Note sur un système de deux courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 172-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__172_1>

Note sur un système de deux courbes planes;
par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 18 juillet 1888.)

Soient, dans un même plan, deux courbes quelconques. A partir d'une origine, choisie arbitrairement sur chacune d'elles, portons des arcs égaux, dont les extrémités X, Y (*fig.* 1) sont variables avec la longueur commune des arcs.

Prenons le milieu Z de la droite XY. Nous nous proposons de déterminer la tangente et le rayon de courbure de la courbe (Z) décrite par ce point.

Rapportant les points à une origine quelconque, nous avons

$$(1) \qquad 2z = y + x,$$

d'où

$$2\,dz = dy + dx.$$

Mais, les arcs décrits par X et Y étant égaux en longueur,

$$(2) \qquad dx = \varepsilon^{\xi}\,ds, \qquad dy = \varepsilon^{\eta}\,ds;$$

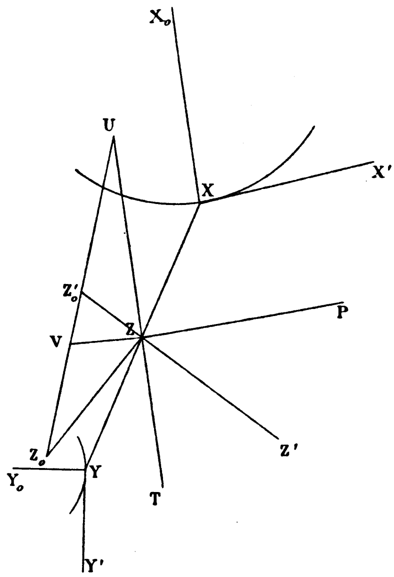
donc

$$(3) \qquad dz = \frac{ds}{2}(\varepsilon^{\xi} + \varepsilon^{\eta}) = ds\cos\frac{\xi-\eta}{2}\,\varepsilon^{\frac{\xi+\eta}{2}}$$

La tangente à la courbe (Z) a par conséquent pour inclinaison $\frac{\xi+\eta}{2}$; c'est-à-dire que si nous menons ZP, ZT parallèles aux tangentes en X et Y, la tangente cherchée sera la bissectrice ZZ′ de l'angle PZT.

Il est à remarquer que, si l'on vient à changer le sens suivant lequel sont comptés les arcs sur l'une des courbes, on aura pour la tangente une direction perpendiculaire à la précédente, puisque

Fig. 1.



l'angle PZT se trouvera remplacé par son adjacent supplémentaire.

Soient maintenant X_0, Y_0, Z_0 les centres de courbure en X, Y, Z des courbes (X), (Y), (Z) respectivement.

Nous avons

$$(4) \qquad XX_0 = i\frac{ds}{d\xi}\varepsilon^{\xi}, \qquad YY_0 = i\frac{ds}{d\eta}\varepsilon^{\eta}.$$

De plus, la longueur de l'élément d'arc dz étant, d'après la formule (3), $ds\cos\frac{\xi-\eta}{2}$, et l'inclinaison de ce même élément $\frac{\xi+\eta}{2}$,

$$(5) \qquad ZZ_0 = 2i\frac{ds\cos\frac{\xi-\eta}{2}}{d\xi+d\eta}\varepsilon^{\frac{\xi+\eta}{2}}.$$

Des relations (4) et (5) on déduit

$$\frac{d\xi}{ds}\,XX_0 + \frac{dy}{ds}\,YY_0 = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\right) ZZ_0,$$

c'est-à-dire, en traçant ZU, ZV respectivement équipollentes à XX_0, YY_0,

$$(6) \qquad \frac{d\xi}{ds}\,ZU + \frac{dy}{ds}\,XV = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\right) ZZ_0.$$

Le point Z_0, centre de courbure cherché, est donc situé sur la droite UV. Nous savons en outre qu'il est situé sur la perpendiculaire à ZZ', c'est-à-dire sur la normale, ce qui le détermine complètement.

Pour la courbe résultant du changement de sens des arcs sur l'une des courbes données (X) et (Y), il n'y aurait rien de changé, si ce n'est, comme nous l'avons vu plus haut, que ZZ' deviendrait maintenant la normale. Le nouveau centre de courbure Z'_0 serait donc à la rencontre des droites UV et ZZ'.

Cette construction très simple se prête à une généralisation assez facile de la manière suivante. Supposons que les arcs portés sur les deux courbes (X) et (Y) soient non plus égaux comme précédemment, mais dans un rapport constant, et qu'on divise la droite XY en Z dans le même rapport. On aura alors

$$(7) \qquad \frac{s_x}{s_y} = \frac{XZ}{ZY} = k,$$

en désignant par s_x, s_y les arcs de deux courbes.

On reconnaît alors immédiatement que la tangente en Z, comme ci-dessus, a une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des tangentes en X et Y.

Quant à la détermination du centre de courbure, on remarquera que l'on a

$$XX_0 = \frac{i\,ds_x}{d\xi}\,\varepsilon^{\xi} = \frac{ik\,ds_y}{d\xi}\,\varepsilon^{\xi},$$

$$YY_0 = \frac{i\,ds_y}{d\eta}\,\varepsilon^{\eta},$$

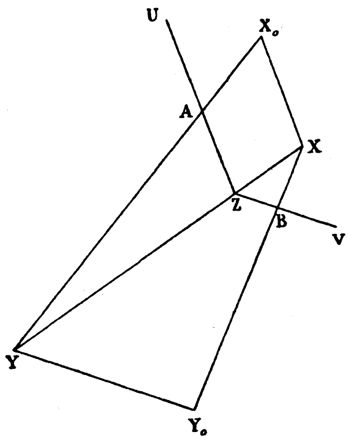
$$ZZ_0 = \frac{2k}{1+k}\,\frac{i\,ds_y}{d\xi + d\eta}\,(\varepsilon^{\xi} + \varepsilon^{\eta});$$

et, par un calcul tout à fait analogue à celui que nous avons indiqué plus haut,

$$(8) \qquad (d\xi + d\eta)ZZ_0 - \frac{2.XX_0}{1+k}\,d\xi + \frac{2k.YY_0}{1+k}\,d\eta.$$

Or, si par le point Z nous menons une parallèle ZA (*fig.* 2)

Fig. 2.



à XX_0 jusqu'à la rencontre de YX_0, puis une parallèle ZB à YY_0 jusqu'à la rencontre de XY_0, et si nous construisons

$$ZU = 2ZA, \qquad ZV = 2ZB,$$

nous aurons

$$ZU = \frac{2.XX_0}{1+k}, \qquad XV = \frac{2k.YY_0}{1+k}.$$

La relation (8) devient alors

$$(9) \qquad (d\xi + d\eta)ZZ_0 = d\xi\,ZU + d\eta\,ZV,$$

c'est-à-dire que le centre de courbure en Z est situé sur la droite joignant les deux points U et V, dont nous venons d'indiquer la construction.