BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 143-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__143_1>

Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilité; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 16 mars 1887.)

M. Weill s'est proposé de résoudre le problème suivant ([1]) :

Étant considérés k événements différents, également probables, et p épreuves consécutives, quelle est la probabilité $X(p)$ *qu'un des événements considérés et désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble des p épreuves ?*

Par un raisonnement ingénieux, M. Weill établit que $X(p)$ est donnée, par voie récurrente, par la formule

$$(1) \qquad X(p) = \frac{k-1}{k} X(p-1) + \frac{k-1}{k^2} X(p-2) + \frac{1}{k^2},$$

et il ajoute :

« L'expression de $X(p)$ est de la forme

$$C\alpha^p + C'\beta^p - \frac{1}{k^2-1},$$

α, β, C, C' étant des constantes que l'on sait déterminer par la méthode de Lagrange. »

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIV, p. 158.

Nous allons intégrer l'équation récurrente (1) par une autre méthode que nous avons donnée dans notre *Théorie élémentaire des séries récurrentes* [1].

Comme on a évidemment

$$X(0) = 0, \qquad X(1) = 0,$$

$X(p)$ sera donnée, en vertu de nos formules [2], par

$$X(p) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{i=p-1} u_i,$$

u_i étant le $i^{\text{ième}}$ terme de la suite

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1,$$

$$u_i = \frac{k-1}{k} u_{i-1} + \frac{k-1}{k^2} u_{i-2}.$$

Or on a [3], en représentant par $E\left(\frac{p}{2}\right)$ la partie entière de $\frac{p}{2}$,

$$u_i = \frac{(k-1)^{i-1}}{k^{i-1}} + C^1_{i-2} \frac{(k-1)^{i-2}}{k^{i-1}} + C^2_{i-3} \frac{(k-1)^{i-3}}{k^{i-1}} + \ldots$$

$$+ C^{i-E\left(\frac{i}{2}\right)-1}_{E\left(\frac{i}{2}\right)} \frac{(k-1)^{E\left(\frac{i}{2}\right)}}{k^{i-1}}$$

Effectuant alors la somme $\sum_{i=1}^{i=p-1} u_i$ et multipliant par $\frac{1}{k^2}$, on obtient

$$X(p) = \frac{1}{k^2} \sum_{\mu=0}^{\mu=E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \left[\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2(\mu+1)} C^{\mu}_{\mu+\lambda} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\lambda} \right].$$

Telle est la formule que nous nous proposions d'établir et qui donne explicitement la probabilité $X(p)$ en fonction de p et de k. Elle complète la solution de M. Weill.

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. III, 1884, p. 65.

(2) *Loc. cit.,* § 37.

(3) *Loc. cit.,* § 8, formule (8).