

# BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

## **Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 14 (1886), p. 131-135

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1886\\_\\_14\\_\\_131\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__131_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur le développement des fonctions elliptiques en séries  
trigonométriques; par M. DE PRESLE.*

(Séance du 7 juillet 1886.)

1. *Expression des fonctions elliptiques en dérivées logarithmiques de sommes de fonctions elliptiques.* — Prenons les relations

$$D \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad D \operatorname{cn} z = -\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z, \quad D \operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z;$$

ajoutons-les deux à deux, après avoir multiplié l'une d'elles par l'une des indéterminées  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} D \operatorname{cn} z + \alpha D \operatorname{dn} z &= \operatorname{sn} z (-\operatorname{dn} z - \alpha k^2 \operatorname{cn} z), \\ D \operatorname{dn} z + \beta D \operatorname{sn} z &= \operatorname{cn} z (-k^2 \operatorname{sn} z + \beta \operatorname{dn} z), \\ D \operatorname{sn} z + \gamma D \operatorname{cn} z &= \operatorname{dn} z (\operatorname{cn} z - \gamma \operatorname{sn} z). \end{aligned}$$

Déterminons  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de manière que les premiers membres soient, à un facteur constant près, les dérivées des seconds facteurs des deuxièmes membres

$$\frac{1}{-\alpha k^2} = \frac{\alpha}{-1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{-k^2}, \quad \frac{1}{-\gamma} = \frac{\gamma}{1};$$

d'où

$$\alpha = \pm \frac{1}{k}, \quad \beta = \pm ik, \quad \gamma = +i;$$

on a donc

$$\begin{aligned} D \operatorname{dn} z \mp k D \operatorname{cn} z &= \pm k \operatorname{sn} z (\operatorname{dn} z \mp k \operatorname{cn} z), \\ D \operatorname{dn} z \pm ik D \operatorname{sn} z &= \pm ik \operatorname{cn} z (\operatorname{dn} z \pm ik \operatorname{sn} z), \\ D \operatorname{cn} z \pm i D \operatorname{sn} z &= \pm i \operatorname{dn} z (\operatorname{cn} z \pm i \operatorname{sn} z), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \pm k \operatorname{sn} z &= D \log(\operatorname{dn} z \mp k \operatorname{cn} z), \\ \pm ik \operatorname{cn} z &= D \log(\operatorname{dn} z \pm ik \operatorname{sn} z), \\ \pm i \operatorname{dn} z &= D \log(\operatorname{cn} z \pm i \operatorname{sn} z). \end{aligned}$$

## 2. Transformation des sommes précédentes en produits. —

Preons les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{k \operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{cn}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{i \operatorname{dn} z}{k \operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{dn}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{ik \operatorname{cn} z}{k \operatorname{sn} z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \alpha &= \frac{2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{dn} \frac{\alpha}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}}, \\ \operatorname{cn} \alpha &= \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}}, \\ \operatorname{dn} \alpha &= \frac{\operatorname{dn}^2 \frac{\alpha}{2} - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cn}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Remplaçons  $\alpha$  par  $z + \frac{\omega'}{2}$  dans les dernières; il vient, en vertu des premières,

$$\frac{1}{k \operatorname{sn} z} = \frac{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-\frac{i \operatorname{dn} z}{k \operatorname{sn} z} = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-\frac{ik \operatorname{cn} z}{k \operatorname{sn} z} = \frac{\operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

ou bien

$$k \operatorname{sn} z = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-i \operatorname{dn} z = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-ik \operatorname{cn} z = \frac{\operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

ce qui donne, pour les valeurs des sommes des fonctions elliptiques,

$$\operatorname{dn} z - k \operatorname{cn} z = -\frac{ik'^2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{dn} z + ik \operatorname{sn} z = \frac{i \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{cn} z + i \operatorname{sn} z = \frac{i \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{k \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}$$

et

$$\operatorname{dn} z + k \operatorname{cn} z = \frac{i \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} z - ik' \operatorname{sn} z &= - \frac{i \operatorname{dn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{sn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}{\operatorname{cn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}, \\ \operatorname{cn} z - i \operatorname{sn} z &= - \frac{ki \operatorname{sn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{cn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}{\operatorname{dn} \left( \frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}; \end{aligned}$$

les trois dernières relations donnent lieu aux mêmes calculs que les trois précédentes; nous ne nous occuperons que de celles-ci.

3. *Dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques.* — Les dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques ont pour expression

$$\begin{aligned} D \log \operatorname{sn} z &= \frac{\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{n+1} \left( e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 + q^{n+1}}, \\ D \log \operatorname{cn} z &= \frac{\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{n+1} \left( e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 + (-1)^{n+1} q^{n+1}}, \\ D \log \operatorname{dn} z &= \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{2n+1} \left( e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 - q^{2(2n+1)}}. \end{aligned}$$

(Ces formules se trouvent dans les *Fundamenta nova* de Jacobi et dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, n° 297, p. 482.)

4. *Expression des fonctions elliptiques.* — Des formules précédentes, on déduit

$$\begin{aligned} D \log \operatorname{sn} z - D \log \operatorname{cn} z - D \log \operatorname{dn} z \\ = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{2n+1} \left( e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 - q^{2n+1}}, \end{aligned}$$

D log cn z — D log dn z — D log sn z

$$= -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{2n+1} \frac{\left( e^{\frac{2(2n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2n+1}},$$

D log dn z — D log sn z — D log cn z

$$= -\frac{2\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}}{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{2(n+1)} \frac{\left( e^{\frac{4(n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{4(n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2(n+1)}}.$$

Remplaçons  $z$  par  $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$ ,  $q$  étant égal à  $e^{\frac{\pi\omega'i}{\omega}}$ , introduisons les facteurs constants  $\frac{1}{k}$ ,  $\frac{1}{ik}$ ,  $\frac{1}{i}$  qui sont les inverses des coefficients de sn z, cn z, dn z dans les deuxièmes équations du premier paragraphe, et multiplions par la dérivée de  $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$  qui est  $\frac{1}{2}$ ; nous aurons, pour les expressions cherchées,

$$\operatorname{sn} z = -\frac{2\pi i \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} q^n \frac{\left( e^{\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 - q^{2n+1}},$$

$$\operatorname{cn} z = \frac{2\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} q^n \frac{\left( e^{\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2n+1}},$$

$$\operatorname{dn} z = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{n+1} \frac{\left( e^{\frac{2(n+1)\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{2(n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2(n+1)}}$$

ou

$$\operatorname{sn} z = \frac{4\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{\omega},$$

$$\operatorname{cn} z = \frac{4\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n+1}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{\omega},$$

$$\operatorname{dn} z = \frac{\pi}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{n+1}}{1 + q^{2(n+1)}} \cos \frac{2(n+1)\pi z}{\omega}.$$