BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur les transformations invariantes des différentielles elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 51-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__51_1>

Sur les transformations invariantes des différentielles elliptiques; par M. Louis Raffy.

(Séance du 4 avril 1884.)

1. *Définitions.* — Soit $f(x)$ une fonction rationnelle, et $R(x)$ un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré. Nous dirons que la différentielle elliptique

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

est susceptible d'une *transformation invariante,* s'il existe une fonction y de x, telle qu'on ait

$$f(x) = -f(y),$$

ainsi que

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

La *transformation invariante* consiste dans le changement de variable qui substitue y à x; elle est déterminée par l'équation qui définit y comme fonction de x.

2. Théorème I. — *Toute différentielle elliptique, susceptible d'une transformation invariante, s'intègre en termes finis.*

D'après leur définition même, les transformations invariantes de la différentielle

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sont toutes (si elles existent) des solutions de l'équation d'Euler,

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Si donc on pose

$$R(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$

elles sont comprises parmi les fonctions y, que définit, pour les diverses valeurs de l'arbitraire G, la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\beta^2 - 4\alpha G + (2\beta\gamma - 4\alpha\delta - 2\beta G)(x+y) + (\gamma^2 - 4\alpha\varepsilon - 2\gamma G + G^2)(x^2+y^2) \\ &+ 2(\gamma^2 - 4\alpha\varepsilon - \beta\delta - G^2)xy + 2(\gamma\delta - 2\beta\varepsilon - \delta G)(x+y)xy + (\delta^2 - 4\varepsilon G)x^2y^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

intégrale générale de l'équation d'Euler [1]. Soit y l'une d'elles. On a

$$f(x) = -f(y),$$

d'où résulte

$$2\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = [f(x) - f(y)]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

---

[1] *Voir* Lagrange, *Œuvres complètes,* t. II, p. 18. (*Sur l'intégration de quelques équations différentielles.*)

Or la différence $f(x) - f(y)$ est égale au produit de $x - y$ par une fonction symétrique de x et de y, c'est-à-dire par une fonction rationnelle de $x + y$ et de xy. Posons

$$s = x + y, \quad p = xy;$$

il vient

$$f(x) - f(y) = (x - y)\varphi(s, p),$$

φ désignant une fonction rationnelle de s et de p. Par suite, on a

$$2\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{x - y}{\sqrt{R(x)}}\varphi(s, p)\,dx.$$

Mais l'intégrale générale de l'équation d'Euler peut se mettre sous l'une des deux formes (¹)

$$\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(y)} = (x - y)\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}, \quad \text{pour } \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{R(y)}},$$

$$\sqrt{R(x)} - \sqrt{R(y)} = (x - y)\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}, \quad \text{pour } \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Dans les deux cas, on peut écrire, en divisant les deux membres par $\sqrt{R(x)}$,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{\sqrt{R(x)}}\sqrt{G + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}.$$

De cette relation, on tire, en écrivant s à la place de $(x + y)$,

$$\frac{x - y}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Substituant dans l'expression de la différentielle proposée, il vient

$$\frac{2f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{\varphi(s, p)}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}(dx + dy) = \frac{\varphi(s, p)\,ds}{\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}.$$

Notre théorème sera évidemment prouvé si nous montrons que

(¹) *Voir* LAGRANGE, *loc. cit.*, p. 17-18. Signalons quelques fautes d'impression dans ce passage; dans toutes les équations des pages 17 et 18 (sauf les deux dernières de la page 18), il faut partout lire G au lieu de G^2. Dans les deux dernières équations de la page 18, le coefficient du terme en $x + y$ doit être pris égal à

$$(2\beta\gamma - 4\alpha\beta - 2\beta G),$$

et non pas à

$$(2\beta\gamma + 4\alpha\delta - 2\beta G).$$

p est une fonction rationnelle de s et du radical $\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}$.

Pour le faire voir, reprenons l'intégrale de l'équation d'Euler, sous la première forme citée plus haut, et introduisons s et p à la place de $(x+y)$ et de xy. Nous trouvons, après avoir ordonné,

$$(2)\quad \begin{cases} (\delta^2 - 4\varepsilon G)p^2 - 2\{[(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s + 2G(G-\gamma) + \beta\delta\}p \\ \qquad + [(G-\gamma)^2 - 4\alpha\varepsilon]s^2 - 2[2\alpha\delta + (G-\gamma)\beta]s + \beta^2 - 4\alpha G = 0; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(3)\quad p = \frac{[(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s + 2G(G-\gamma) + \beta\delta \pm 2\sqrt{\lambda}\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}}{\delta^2 - 4\varepsilon G},$$

en posant

$$\lambda = G[(G-\gamma)^2 - 4\alpha\varepsilon] + (G-\gamma)\beta\delta + \alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2.$$

Ainsi p est bien une fonction rationnelle de s et de $\sqrt{G + \delta s + \varepsilon s^2}$, ce qui démontre notre théorème. Si $\delta^2 - 4\varepsilon G$ était nul, p serait une fonction rationnelle de s : d'où la même conclusion.

3. *Remarque.* — Les raisonnements précédents tombent en défaut lorsque la transformation invariante est définie par l'équation

$$x + y = s = \text{const.} = G.$$

Dans ce cas, le polynôme $R(x)$ ne peut être que du quatrième degré, comme nous l'établirons un peu plus loin. De plus, nous verrons que, si l'on pose

$$R(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

la transformation invariante en question ne peut être que la suivante :

$$x + y = a + b = c + d.$$

Alors on a

$$R(x) = \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + cd - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right],$$

$$p = xy = x(a+b-x) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$x - y = x - (a+b-x) = 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

en sorte que la différentielle considérée prend la forme

$$\frac{2f(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}=\frac{2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\varphi\left[\mathrm{G},\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx}{\sqrt{\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\left(x-\frac{a+b}{\delta}\right)^2+cd-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]}}.$$

Elle devient immédiatement intégrable en prenant pour nouvelle variable $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$.

4. Théorème II. — *Pour qu'une différentielle elliptique*

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}=\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

soit susceptible d'une transformation invariante, il faut et il suffit :

Ou bien que l'équation

$$f(x)+f(y)=0,$$

mise sous la forme entière

$$\mathrm{F}(p,s)=0,\quad (p=xy,\ s=x+y),$$

ait son premier membre divisible par

$$(\delta^2-4\varepsilon\mathrm{G})p-[(\mathrm{G}-\gamma)\delta+2\beta\varepsilon]s-[2\mathrm{G}(\mathrm{G}-\gamma)+\beta\delta],$$

G *étant l'une des racines de l'équation*

$$\lambda(\mathrm{G})=\mathrm{G}[(\mathrm{G}-\gamma)^2-4\alpha\varepsilon]+(\mathrm{G}-\gamma)\beta\delta+\alpha\delta^2+\varepsilon\beta^2=0;$$

Ou bien qu'on puisse disposer de G, *de manière que le premier membre de l'équation* $\mathrm{F}(p,s)=0$ *devienne divisible par le premier membre de l'équation*

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&(\delta^2-4\varepsilon\mathrm{G})p^2-2[(\mathrm{G}-\gamma)\delta+2\beta\varepsilon]ps+[(\mathrm{G}-\gamma)^2-4\alpha\varepsilon]s^2\\&\quad-2[2\mathrm{G}(\mathrm{G}-\gamma)+\beta\delta]p-2[2\alpha\delta+(\mathrm{G}-\gamma)\beta]s+\beta^2-4\alpha\mathrm{G}=0.\end{aligned}\right.$$

En effet, soit y une solution de l'équation (1), telle qu'on ait $f(x)+f(y)=0$. Cette fonction y est une solution commune aux deux équations (1) et $f(x)+f(y)=0$. Le premier membre de l'équation $f(x)+f(y)=0$ est donc divisible par celui de l'équation (1), si cette dernière est irréductible, ou par l'un des facteurs de ce premier membre, si l'équation (1) représente une courbe décomposable.

Voyons ce qui arrive dans ce dernier cas. Pour que l'équation (1) se décompose, il faut et il suffit visiblement qu'il en soit de même de l'équation (2), c'est-à-dire qu'on ait

$$\lambda(G) = 0;$$

mais alors l'équation (2) a pour premier membre le carré de

$$T = (\delta^2 - 4\varepsilon G)p - [(G-\gamma)\delta + 2\beta\varepsilon]s - [2G(G-\gamma) + \beta\delta],$$

et, comme le premier membre de l'équation $f(x) + f(y) = 0$ est divisible par ce que devient le trinôme linéaire T quand on y remplace p par xy et s par $x+y$, le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ est divisible par ce trinôme lui-même, comme nous l'avions annoncé, sous la condition $\lambda(G) = 0$.

Si l'équation (1) est irréductible, son premier membre divise le premier membre de l'équation $f(x) + f(y) = 0$, ce qui revient à dire que le premier membre de l'équation (2) divise le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ quand on attribue à G la valeur particulière qui donne la transformation invariante que nous considérons.

Réciproquement, si l'une des conditions dont nous venons d'établir la nécessité est réalisée, il existe une transformation invariante. En effet, dire que le premier membre de l'équation $F(p, s) = 0$ est divisible par le trinôme T ou par le premier membre de l'équation (2), c'est dire que $f(x) + f(y)$ s'annule quand on y remplace y par sa valeur tirée soit de l'équation $T = 0$, soit de l'équation (2). Dans le premier cas, l'équation $T = 0$ définit une transformation invariante; dans le second, l'équation (2) en définit aussi une. La proposition énoncée est donc établie.

5. Elle fournit, comme on le voit immédiatement, une méthode régulière pour reconnaître si une différentielle elliptique donnée admet ou n'admet pas de transformation invariante. En appliquant cette méthode à une différentielle convenablement choisie,

$$\frac{x-1}{x+2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \tfrac{2}{3}\, d \operatorname{arc\,tang} \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}}$$

par exemple, on s'assure qu'une différentielle elliptique peut être intégrable en termes finis, sans être susceptible d'aucune transformation invariante.

Ce qui fait l'intérêt des transformations invariantes, c'est qu'elles permettent d'indiquer des classes très étendues d'intégrales pseudo-elliptiques, et de retrouver, en les généralisant, certains exemples connus de différentielles en apparence elliptiques, qui s'intègrent en termes finis. Nous allons faire connaître les types les plus simples, ceux qui se rattachent aux transformations invariantes du premier ordre.

A cet effet, nous chercherons toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle elliptique de première espèce, en supposant successivement que le radical porte sur un polynôme du troisième et sur un polynôme du quatrième degré.

6. Proposons-nous de trouver toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}.$$

Nous savons que la nouvelle variable t est liée à z par une équation symétrique en z et t. Soit

$$Ntz = L(t+z) + M$$

la relation qui définit t. On en tire

$$z = \frac{Lt+M}{Nt-L}.$$

Substituons cette valeur dans la différentielle proposée; il vient

$$\frac{(L^2+MN)\,dt}{-(Nt-L)^2\sqrt{\frac{(L-Na)t+La+M}{Nt-L}\,\frac{(L-Nb)t+Lb+M)}{Nt-L}\,\frac{(L-Nc)t+Lc+M}{Nt-L}}},$$

ou bien, en faisant abstraction du signe,

$$\frac{(L^2+MN)\,dt}{\sqrt{(Nt-L)[(L-Na)t+La+M][(L-Nb)t+Lb+M][(L-Nc)t+Lc+M]}}.$$

Je dis d'abord que cette expression ne peut être identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}},$$

si N est nul. En effet, elle prend alors la forme

$$\frac{L^2\,dt}{\sqrt{-L^4 t^3+\ldots}}.$$

Mais, dans ce cas, on peut, sans restreindre la généralité de la transformation, supposer L réel et, par suite, L^2 positif. En divisant haut et bas par L^2, on trouve

$$\frac{dt}{\sqrt{-t^3+\ldots}}.$$

Cette différentielle ne peut jamais être rendue identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}=\frac{dt}{\sqrt{+t^3+\ldots}}.$$

N étant différent de zéro, nous pouvons désormais le supposer égal à 1. Il vient alors

$$\frac{(L^2+M)\,dt}{\sqrt{(t-L)[(L-a)t+La+M][(L-b)t+Lb+M][(L-c)t+Lc+M]}}.$$

Pour que cette expression soit identique à

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}},$$

il faut d'abord que la quantité sous le radical s'abaisse au troisième degré, c'est-à-dire que L ait une des trois valeurs a, b, c. Prenons $L=a$, ce qui donne

$$\frac{(a^2+M)\,dt}{\sqrt{(a^2+M)(t-a)[(a-b)t+ab+M][(a-c)t+ac+M]}}.$$

Il faut encore que le produit

$$[(a-b)t+ab+M][(a-c)t+ac+M]$$

s'annule pour $t=b$ et pour $t=c$, et que son terme en t^2 ait pour coefficient (a^2+M), afin que le facteur (a^2+M) soit commun aux deux termes de la fraction. Cette dernière condition s'exprime par la relation

$$(a-b)(a-c)=a^2+M$$

ou bien

$$(a-b)c+ab+M=0,$$

équation en vertu de laquelle le facteur binôme

$$[(a-b)t+ab+M]$$

s'annule pour $t=c$. Il reste donc à exprimer que le facteur binôme

$$[(a-c)t+ac+M]$$

s'annule pour $t=b$; d'où la relation

$$(a-c)b+ac+M=0,$$

qui n'est autre que la précédente.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la différentielle proposée se reproduise, au signe près, par la transformation

$$z=\frac{at-M}{t-a}$$

est qu'on prenne pour M la valeur

$$M=bc-a(b+c).$$

La transformation cherchée est donc entièrement connue. On en déduira deux autres en permutant les trois lettres a, b, c.

En résumé, l'on a

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}=\frac{\pm dt}{\sqrt{(t-a)t-b)(t-c)}},$$

si l'on prend

$$z=\frac{at+bc-a(b+c)}{t-a},$$

ou bien

$$z=\frac{bt+ca-b(c+a)}{t-b}$$

ou encore

$$z=\frac{ct+ab-c(a+b)}{t-c};$$

et ce sont là, d'après ce qui précède, les trois seules transformations du premier degré qui répondent à la question.

Si l'une des racines a, b, c était nulle, c par exemple, la transformation correspondante serait

$$z=\frac{ab}{t},$$

et les deux autres transformations seraient

$$z = a\,\frac{t-b}{t-a},$$

$$z = b\,\frac{t-a}{t-b}.$$

7. *Remarque.* — Considérons maintenant la différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{\alpha+\beta z^2+\gamma z^2+\delta z^3}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

et soit ζ l'une des racines, supposées distinctes, de l'équation $R(z) = 0$. Un calcul facile donne, pour les trois transformations du premier ordre qui reproduisent, au signe près, la différentielle proposée, cette expression générale

$$z = \zeta - \frac{1}{\delta\zeta(t-\zeta)}\,\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^3 R\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right].$$

Si l'équation $R(z) = 0$ admet une racine nulle, la transformation correspondante est

$$z = \frac{\beta}{\delta t}.$$

8. Proposons-nous maintenant de trouver toutes les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Soit

$$x = \frac{Ly+M}{Ny-L}$$

une telle transformation. Elle change la différentielle proposée $\dfrac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ en

$$\frac{-(L^2+M)\,dy}{\sqrt{[(L-Na)y+La+M][(L-Nb)y+Lb+M][(L-Nc)y+Lc+M][(L-Nd)y+Ld+M]}}.$$

Supposons d'abord que N ne soit pas nul, et prenons $N = 1$, ce qui donne

$$\frac{-(L^2+MN)\,dy}{\sqrt{[(L-a)y+La+M][(L-b)y+Lb+M][(L-c)y+(Lc+M)][(L-d)y+Ld+M]}}.$$

Pour que cette différentielle soit identique à

$$\frac{\pm\, dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}},$$

il faut d'abord qu'on ait

$$(L^2+M)^2 = (L-a)(L-b)(L-c)(L-d).$$

Il faut ensuite que les racines du polynôme sous le radical soient a, b, c, d.

Examinons si le premier binôme peut s'annuler pour $y=a$. Posons

$$y = \frac{La+M}{a-L} = a.$$

La racine a de l'équation $R(x)=0$ vérifie la relation

$$x^2 - 2Lx - M = 0.$$

On ne peut pas admettre que la même relation soit vérifiée par plus de deux racines de l'équation $R(x)=0$; car alors les deux équations

$$R(x)=0, \quad x^2-2Lx-M=0$$

auraient en commun plus de deux racines, ce qui est impossible, puisque la première est supposée avoir toutes ses racines distinctes.

Supposons maintenant que la relation

$$x^2 - 2Lx - M = 0$$

soit vérifiée seulement par deux des racines a, b de l'équation $R(x)=0$. On aura

$$L = \frac{a+b}{2}, \quad M = -ab.$$

Substituons ces valeurs dans la première condition

$$(L^2+M)^2 = (L-a)(L-b)(L-c)(L-d);$$

elle devient

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{a+b-2c}{2}\,\frac{a+b-2d}{2}$$

ou bien, en supprimant le facteur $\frac{(a-b)^2}{16}$, qui n'est pas nul,

$$(a-b)^2 = -(a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + 4cd,$$

ou encore

$$a^2 + b^2 - 2cd = (a+b)(c+d).$$

Mais il faut en outre que la troisième racine $\frac{Lc+M}{c-L}$ du radical soit égale à d, et la quatrième $\frac{Ld+M}{d-L}$ égale à c; ces deux conditions s'expriment par la seule équation

$$L(c+d) = cd - M,$$

ou bien

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

Comparant cette condition avec celle qui vient d'être obtenue, on trouve

$$(a-b)^2 = 0.$$

Ainsi l'hypothèse présente doit être rejetée; il est impossible que deux racines de l'équation $R(x) = 0$ appartiennent à l'équation $x^2 - 2Lx - M = 0$.

Mais je dis même qu'on ne peut pas supposer qu'une seule racine a soit commune à ces deux équations; car, si l'on prend égale à c la seconde racine $\frac{Lb+M}{b-L}$, de l'égalité

$$c = \frac{Lb+M}{b-L}$$

on déduit, en résolvant par rapport à b,

$$b = \frac{Lc+M}{c-L},$$

c'est-à-dire que la troisième racine du radical est égale à b; il faudrait donc que la quatrième $\frac{Ld+M}{d-L}$ fût égale à d. Alors deux racines a et d vérifieraient l'équation $x^2 - 2Lx - M = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

On ne peut donc obtenir l'identification cherchée qu'en groupant les quatre racines a, b, c, d par groupes de deux, tels que si x est une des racines du groupe, $\frac{Lx+M}{x-L}$ est l'autre. Soient a et b les deux racines qui composent un tel groupe. On a, par hypothèse, les deux relations

$$\frac{La+M}{a-L} = b, \quad \frac{Lb+M}{b-L} = a,$$

qui reviennent à la condition unique

$$M = ab - L(a+b).$$

De là résulte

$$L^2 + M = L^2 - (a+b)L + ab = (L-a)(L-b).$$

Portons cette valeur dans l'équation où figure $L^2 + M$; il vient

$$(L-a)^2(L-b)^2 = (L-a)(L-b)(L-c)(L-d),$$

ou bien

$$(L-a)(L-b) = (L-c)(L-d),$$

d'où l'on tire

$$L = \frac{ab - cd}{(a+b)-(c+d)};$$

par suite, on obtient

$$M = ab - (a+b)L = \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{(a+b)-(c+d)}.$$

D'après cela, la transformation cherchée ne peut être que

$$x = \frac{(ab-cd)y + (a+b)cd - (c+d)ab}{[(a+b)-(c+d)]y - (ab-cd)}.$$

Il faut encore vérifier que, si l'on y fait $y = c$, on trouve $x = d$. C'est ce qui a lieu. La symétrie de la formule montre alors que, en y faisant $y = d$, on trouvera $x = c$.

Ainsi les seules transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, sont les trois transformations que fournit la formule précédente quand on y prend successivement, pour a et b, deux quelconques des quatre racines de l'équation $R(x) = 0$, et, par conséquent, pour c et d les deux autres.

9. Il reste pourtant à examiner l'hypothèse $N = 0$. Dans ce cas, L ne peut être nul; nous prendrons $L = 1$, ce qui donne

$$x + y + M = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(y+a+M)(y+b+M)(y+c+M)(y+d+M)}},$$

On ne peut supposer

$$a + M = - a.$$

Car il faudrait qu'un des trois autres binômes $b + M$, $c + M$, $d + M$ fût égal à son premier terme changé de signe, et qu'on eût, par exemple,

$$b + M = - b,$$

d'où résulterait

$$M = 2b = 2a.$$

L'équation $R(x) = 0$ aurait deux racines égales, contrairement à nos hypothèses.

Soit donc

$$a + M = - b;$$

on déduit de là

$$M = -(a + b)$$

et

$$b + M = - a.$$

Il faut encore

$$c + M = - d, \quad d + M = - c,$$

c'est-à-dire

$$M = - (c + d).$$

De la comparaison des deux valeurs trouvées pour M résulte la condition

$$a + b = c + d.$$

Ainsi il n'y a de transformation du type

$$x + y + M = 0$$

que quand les racines de l'équation $R(x) = 0$ vérifient la relation

$$a + b = c + d,$$

et alors on a

$$M = - (a + b) = - (c + d).$$

Il n'y a visiblement qu'une seule transformation de ce type $N = 0$; car les deux formules

$$x + y = a + b, \quad x + y = c + d$$

ne donnent qu'une seule et même transformation, et il est impossible qu'on ait à la fois

$$a + b = c + d, \quad a + c = b + d,$$

car de ces deux équations résulterait

$$2a = 2d.$$

Voyons ce que devient, pour les différentielles de l'espèce particulière qui nous occupe, la transformation trouvée dans le cas général. Introduisant l'hypothèse $c + d = a + b$, on trouve

$$x = \frac{(ab - cd)y - (a + b)(ab - cd)}{-(ab - cd)} = a + b - y,$$

ce qui n'est autre chose que la transformation spéciale à ce cas. Le type général

$$x = \frac{(ab - cd)y + (a + b)cd - (c + d)ab}{[(+ b) - (c + d)]y - (ab - cd)}$$

comprend donc *toutes* les transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

En particulier, pour la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{dx}{k\sqrt{(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{k}\right)\left(x + \frac{1}{k}\right)}},$$

on trouve les trois transformations

$$x = -y, \quad x = \frac{1}{ky}, \quad x = -\frac{1}{ky}.$$

10. Étant donnée une différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, où $R(x)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré, nous pouvons désormais considérer comme connues les trois transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, cette différentielle, et nous les représenterons par

$$x = \frac{Ly + M}{y - L},$$

L et M ayant les valeurs données précédemment.

Il est aisé de voir que les deux fractions

$$\frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}, \quad \frac{x^2 + 2g(x - L) + M}{x^2 - 2Lx - M},$$

dont la seconde contient un coefficient g, complètement arbitraire, se reproduisent, changées de signe, quand on y fait

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

D'après cela, si l'on désigne par $P(u)$ et $Q(u)$ deux polynômes entiers en u de degré $2n$ et ne contenant que des puissances *paires* de u, mais à coefficients quelconques, les deux fonctions

$$f_1(x) = \frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}} \frac{P\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)}{Q\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)},$$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2g(x - L) + M}{x^2 - 2Lx - M} \frac{P\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}}\right)}{Q\left(\dfrac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}}\right)}$$

se reproduiront, changées de signe, par la transformation

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

Par suite, les deux différentielles

$$\frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

admettront la transformation invariante

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}.$$

La fonction $f_1(x)$ est le quotient de deux polynômes d'ordre impair $2n + 1$; la seconde $f_2(x)$ le quotient de deux polynômes d'ordre pair $2n + 2$. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème III. — *Étant donnée la différentielle elliptique* $\dfrac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, *il existe toujours une infinité de fractions rationnelles* $f(x)$ *de degré donné m pair ou impair, telles que la différentielle* $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ *admette une transformation invariante du premier ordre.*

Il n'y a d'exception que pour $m = 1$. On ne trouve, pour $m = 1$, que les six différentielles

$$\frac{x - L \pm \sqrt{L^2 + M}}{x - L \mp \sqrt{L + M^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

11. Nous allons compléter ces résultats en faisant connaître *toutes* les différentielles dépendant d'un radical elliptique donné $\sqrt{R(x)}$,qui admettent des transformations invariantes du premier ordre, et conséquemment s'intègrent en termes finis.

Théorème IV. — *Étant donnée une différentielle elliptique* $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, *toutes les différentielles de la forme* $\frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, *qui admettent une transformation invariante du premier ordre, sont comprises dans le type*

$$\left(x - \frac{Lx + M}{x - L}\right) \psi\left(x + \frac{Lx + M}{x - L}\right) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

le symbole ψ *désignant une fonction rationnelle quelconque, et*

$$x = \frac{Ly + M}{y - L}$$

étant l'une des trois transformations du premier ordre, qui reproduisent, au signe près, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

En effet, la transformation invariante qu'admet la différentielle $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ ne peut être qu'une des trois transformations

$$y = \frac{Lx + M}{x - L},$$

dont nous avons appris à calculer les coefficients. Mais on a, en général, pour l'expression de la fonction $f(x)$,

$$2f(x) = f(x) - f(y) = (x - y)\,\varphi(x + y, xy),$$

ainsi que nous l'avons montré à propos du théorème I. Or comme ici l'on a

$$xy = L(x + y) + M,$$

il vient

$$2f(x) = (x - y)\,\varphi[x + y, L(x + y) + M];$$

ce qu'on peut écrire

$$f(x) = (x - y)\,\psi(x + y).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I. — Il est aisé de voir que les différentielles qui font l'objet du théorème précédent peuvent aussi être mises sous la forme équivalente

$$\frac{x - \mathrm{L} + \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}}}{x - \mathrm{L} - \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}}}\,\psi\left(\frac{x^2 + \mathrm{M}}{x - \mathrm{L}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}.$$

Remarque II. — Si l'équation $\mathrm{R}(x) = 0$ est telle que les racines a, b, c, d vérifient la relation

$$a + b = c + d,$$

il faut adjoindre aux deux types dérivés de la relation

$$2f(x) = (x - y)\,\varphi[x + y, \mathrm{L}(x + y) + \mathrm{M}]$$

le type signalé dans la remarque du n° 3.

12. *Applications.* — Nous allons retrouver et généraliser certains résultats connus concernant les intégrales pseudo-elliptiques :

1° Considérons la différentielle $\dfrac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$. La valeur de L relative à la racine nulle du radical est $\mathrm{L} = 0$; la valeur correspondante de M est $\mathrm{M} = ab$. Donc, d'après ce qu'on vient de voir, toutes les différentielles de la forme

$$\frac{z \pm \sqrt{ab}}{z \mp \sqrt{ab}}\,\psi\left(\frac{z^2 + ab}{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$$

s'intègrent en termes finis, quelle que soit la fonction rationnelle ψ. En prenant avec les signes supérieurs $\psi = 1$, on retrouve un résultat donné dans le *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. Tisserand, p. 127.

Pareillement, les deux différentielles

$$\frac{z - a + \sqrt{a(a-b)}}{z - a - \sqrt{a(a-b)}}\,\psi\left(\frac{z^2 - ab}{z - a}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}},$$

$$\frac{z - b + \sqrt{b(b-a)}}{z - b - \sqrt{b(b-a)}}\,\psi\left(\frac{z^2 - ab}{z - b}\right)\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$$

s'intègrent en termes finis, quelle que soit la fonction rationnelle ψ.

2°. Considérons la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}}$. On voit immédiatement, sans recourir aux formules établies plus haut, qu'elle se reproduit, au signe près, quand on y change x en $\frac{1}{x}$. Donc, si on la multiplie par une fonction rationnelle quelconque changeant de signe quand on change x en $\frac{1}{x}$, on aura une différentielle intégrable en termes finis. La différentielle

$$\frac{1\pm x^n}{1\mp x^n}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}},$$

signalée par M. Réalis (¹), est une des différentielles de cette classe qu'il serait facile d'étendre encore.

13. Voici, pour terminer, une proposition qui va nous permettre, connaissant une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, d'en déduire une infinité d'autres jouissant de la même propriété, et qui, par suite, s'intégreront en termes finis.

Si, dans une intégrale pseudo-elliptique, on remplace la variable par une fonction rationnelle quelconque, on obtient encore une intégrale qui s'exprime en termes finis; mais elle a en général l'apparence d'une intégrale hyperelliptique. Si l'on effectue le changement de variable spécial auquel on donne, d'après Jacobi et Abel, le nom de *transformation*, l'intégrale pseudo-elliptique se change en une autre intégrale pseudo-elliptique.

Si l'on effectue une *transformation* d'ordre quelconque sur une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, on obtiendra une nouvelle différentielle, également elliptique et également intégrable en termes finis. Nous allons voir qu'elle est également susceptible d'une transformation invariante.

Théorème V. — *Toute transformation* (au sens de Jacobi), *effectuée sur une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante, donne une différentielle elliptique susceptible d'une transformation invariante.*

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 389; 1882.

Soit $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ une différentielle elliptique que la transformation $z = \psi(x)$ change en $\frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

Cette même transformation changera la différentielle $\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ en $\frac{f[\psi(x)]\,dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

La transformation $t = \psi(y)$ changera $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ en $\frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}$ et $\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}$ en $\frac{f[\psi(y)]\,dy}{\sqrt{R_1(y)}}$.

Donc, si l'on suppose t tel que l'on ait

$$f(z) + f(t) = 0$$

avec

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

on aura, par suite,

$$f[\psi(x)] + f[\psi(y)] = 0,$$

ainsi que

$$\frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}.$$

Donc, si z et t sont liés par la relation $\varphi(z, t) = 0$, la relation $\varphi[\psi(x), \psi(y)] = 0$ définira une transformation invariante de la différentielle $\frac{f[\psi(x)]\,dx}{\sqrt{R_1(x)}}$.

Application. — Il résulte des formules du n° 6 que la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)\left(z-\frac{1}{k^2}\right)}}$ admet les trois transformations invariantes

$$z = \frac{1}{k^2 t}, \quad z = \frac{1-k^2 t}{k^2(1-t)}, \quad z = \frac{1-t}{1-k^2 t}.$$

Considérons maintenant la différentielle

$$du = \frac{f(z)\,dz}{2k\sqrt{z(z-1)\left(z-\frac{1}{k^2}\right)}}.$$

Si l'on a

$$f\left(\frac{1}{k^2 z}\right) = -f(z),$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1}{k^2 t}$.

Si l'on a

$$f\left[\frac{1 - k^2 z}{k^2(1 - z)}\right] = -f(z);$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1 - k^2 t}{k^2(1 - t)}$.

Si l'on a

$$f\left(\frac{1 - z}{1 - k^2 z}\right) = -f(z),$$

la différentielle admet la transformation invariante $z = \frac{1 - z}{1 - k^2 z}$.

Effectuons maintenant la *transformation*

$$z = x^2.$$

Il vient

$$du = \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Donc, si la fonction $f(x^2)$ vérifie l'une des trois relations

$$f\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right) = -f(x^2), \quad f\left[\frac{1 - k^2 x^2}{k^2(1 - x^2)}\right] = -f(x^2), \quad f\left(\frac{1 - x^2}{1 - k^2 x^2}\right) = -f(x^2),$$

la différentielle du s'intègre en termes finis. C'est là le résultat donné par M. Hermite dans son Mémoire *Sur une formule d'Euler* (*Journal de Liouville,* 1880).

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}$$

est

$$\begin{aligned} -4G + [(k^2 - 1)^2 + 2(k^2 + 1)G + G^2](x^2 + y^2) \\ + 2[(k^2 - 1)^2 - G^2]xy - 4k^2 G x^2 y^2 = 0. \end{aligned}$$

Les trois transformations invariantes, considérées par M. Hermite, s'en déduisent, la première en faisant $G = -(k \pm 1)^2$, la deuxième en faisant $G = k^2 - 1$, la troisième en faisant $G = 1 - k^2$.