BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Sur les fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 136-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__136_0>

Sur les fonctions entières; par M. H. Poincaré.

(Séance du 20 juillet 1883.)

Lorsqu'une série développée suivant les puissances de x est convergente pour toutes les valeurs de cette variable, elle définit une fonction entière; mais on peut aussi mettre une pareille fonction sous la forme du produit d'une infinité de facteurs primaires, comme le fait M. Weierstrass. Un facteur primaire est une expression de la forme

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{P(x)},$$

$P(x)$ étant un polynôme entier en x, et le facteur est de genre n, si $P(x)$ est de degré n.

Une fonction entière est alors de genre n si elle ne contient que des facteurs de genre n ou de genre inférieur.

Bien des questions se posent au sujet de cette classification des fonctions entières; on peut se demander, par exemple :

1° *Si la somme de deux fonctions de genre n est aussi de genre n*;

2° *Si la dérivée d'une fonction de genre n est aussi de genre n*;

Ces théorèmes, en admettant qu'ils soient vrais, seraient très difficiles à démontrer. Je crois que je serai utile à ceux qui en chercheront plus tard la démonstration en publiant quelques résultats sur la façon dont se comportent à l'infini les fonctions de genre n.

Leurs propriétés à cet égard dépendent en effet, dans une certaine mesure, de leur genre. Par exemple, si l'on considère une fonction entière dont tous les zéros soient réels positifs, et que l'on fasse tendre x vers l'infini par valeurs réelles négatives, la fonction tendra vers l'infini si elle est de genre 0, et vers zéro si elle est de genre 1. Voici d'autres propriétés analogues :

Considérons une transcendante de genre zéro

$$F(x) = \Pi_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right),$$

et supposons que x tende vers l'infini avec un argument déterminé; soit α un nombre, aussi petit que l'on voudra, mais d'argument tel que

$$\lim e^{\alpha x} = 0.$$

Je dis que

$$\lim F(x) e^{\alpha x} = 0.$$

En effet, posons

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

(α_1, α_2, ..., α_ν ayant même argument que α), d'où

$$e^{\alpha x} F(x) = \Pi \left[e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) \right].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right)$$

reste plus petit que 1 quand x varie de zéro à l'infini en conservant l'argument que nous lui avons attribué? Nous pouvons toujours supposer que $\alpha_\nu x$ est réel et négatif, sans quoi on se bornerait à la partie réelle de $\alpha_\nu x$, la partie imaginaire ne devant rien changer au module.

Cela posé, il faut satisfaire à l'inégalité

$$\alpha_\nu x + \text{partie réelle } L\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) < 0. \tag{1}$$

Or

$$\text{partie réelle } L\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) < L\left(1 + \operatorname{mod} \frac{x}{a_\nu}\right) < \operatorname{mod} \frac{x}{a_\nu},$$

de sorte que l'inégalité (1) sera satisfaite si l'on a

$$\operatorname{mod} \alpha_\nu > \operatorname{mod} \frac{1}{a_\nu}. \tag{2}$$

On peut choisir les α_ν de telle sorte que, pour toutes les valeurs de ν supérieures à une certaine limite k, cette inégalité soit satisfaite.

On a alors

$$e^{\alpha x} F(x) = F_1(x) F_2(x),$$

$$F_1(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=k} \left[e^{\alpha_\nu x}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)\right],$$

$$F_2(x) = \prod_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} \left[e^{\alpha_\nu x}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)\right],$$

$$\lim F_1(x) = 0, \quad \operatorname{mod} F_2(x) < 1;$$

d'où

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty F(z) e^{zx} dz$$

a une valeur finie toutes les fois que le chemin d'intégration est tel que $\lim e^{zx} = 0$. Cette intégrale définit donc une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Soit

$$F(z) = \sum A_m z^m,$$

il viendra

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{(-1)^{m+1} m!\, A_m}{x^{m+1}},$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod}(m!\, A_m) = 0, \quad \text{pour } m = \infty.$$

On déduit de là

$$2 i\pi F(x) = \int \Phi(-z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z^2},$$

cette intégrale étant prise le long d'un contour entourant l'origine.

Si l'on se reporte maintenant au savant Mémoire de M. Halphen intitulé *Sur une série d'Abel* [1], on reconnaîtra que $F(x)$,

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 67.

c'est-à-dire une fonction quelconque du genre zéro, peut être représentée par la série d'Abel dont il est question dans ce Mémoire, et cela quelle que soit la constante β.

Malheureusement ce n'est pas là une propriété caractéristique des fonctions de genre zéro. En effet, la fonction

$$F(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right),$$

qui est du genre 1, jouit de la même propriété.

En effet, je dis que l'on a

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0,$$

si l'on fait tendre x vers l'infini avec un argument donné et si α est un nombre tel que αx soit réel et négatif. Pour cela, il suffit de faire voir que

$$\lim \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} = 0,$$

puisque, dans ces circonstances, on a

$$\lim e^{\alpha x} \sin i\alpha x = \frac{1}{2i}.$$

Or on a

$$\frac{F(x)}{\sin i\alpha x} = \frac{1}{i\alpha x} \Pi \left(\frac{1 - \dfrac{x^2}{n^2 L^2 n}}{1 + \dfrac{\alpha^2 x^2}{n^2 \pi^2}} \right),$$

d'où, si x est assez grand et que ξ soit son module et a celui de α,

$$\operatorname{mod} \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} < \Pi \left(\frac{1 + \dfrac{\xi^2}{n^2 L^2 n}}{1 + \dfrac{a^2 \xi^2}{n^2 \pi^2}} \right) = \Pi(H_n);$$

on peut toujours prendre n assez grand pour que

$$\frac{1}{n^2 L^2 n} < \frac{a^2}{n^2 \pi^2},$$

et, par conséquent, pour que le facteur H_n correspondant soit plus petit que 1. Nous poserons alors

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{H}_n)=\prod_{n=1}^{n=k}(\mathrm{H}_n)\times\prod_{n=k+1}^{n=\infty}(\mathrm{H}_n).$$

Nous pourrons prendre k assez grand pour que

$$\mathrm{H}_n < 1 \quad \text{quand} \quad n > k.$$

On aura alors

$$\operatorname{mod}\frac{\mathrm{F}(x)}{\sin i\alpha x} < \prod_{n=1}^{n=k}(\mathrm{H}_n).$$

Mais, quand ξ tend vers l'infini, H_n tend vers

$$\mathrm{G}_n = \frac{\pi^2}{a^2\,\mathrm{L}^2 n};$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod}\frac{\mathrm{F}(x)}{\sin i\alpha x} \leq \prod_{n=1}^{n=k}(\mathrm{G}_n).$$

Or on peut prendre n assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on le veut.

On a donc

$$\lim \operatorname{mod}\frac{\mathrm{F}(x)}{\sin i\alpha x} = 0;$$

d'où

$$\lim \mathrm{F}(x)e^{\alpha x} = 0.$$

De là on déduit que la fonction $\mathrm{F}(x)$ jouit de toutes les propriétés que nous avons démontrées plus haut pour les fonctions entières de genre zéro.

Considérons maintenant une fonction du genre 1 :

$$\mathrm{F}(x) = \Pi e^{\varepsilon_\nu x}(1-\varepsilon_\nu x).$$

Je dis que, si α *est choisi de telle façon que*

$$\lim e^{\alpha x^2} = 0,$$

on aura

$$\lim e^{\alpha x^2}\mathrm{F}(x) = 0.$$

En effet, posons encore

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots;$$

nous aurons

$$F(x)e^{\alpha x^2} = \Pi[e^{\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x}(1 - \varepsilon_\nu x)].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x}(1 - \varepsilon_\nu x) < 1$$

ou pour que

$$(1) \qquad \text{partie réelle } (\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x) + \text{partie réelle } L(1 - \varepsilon_\nu x) < 0?$$

Supposons qu'on ait choisi α_ν de telle façon que, à partir d'une certaine valeur de ν que j'appelle k, 1° $\alpha_\nu x^2$ soit réel et négatif; 2° $\operatorname{mod} \alpha_\nu = h \operatorname{mod} \varepsilon_\nu^2$; h étant une quantité indépendante de ν et que nous allons déterminer. Je dis d'abord qu'on peut choisir h de façon à satisfaire à (1).

En effet, si l'on pose

$$\varepsilon_\nu x = \xi + i\eta,$$

l'inégalité (1) s'écrira

$$h(\xi^2 + \eta^2) > \xi + \tfrac{1}{2} L[(1 - \xi)^2 + \eta^2].$$

Je dis qu'on peut prendre h assez grand pour satisfaire à cette inégalité, quels que soient ξ et η.

En effet, la fonction

$$\Phi = \frac{\xi + \frac{1}{2} L[(1 - \xi)^2 + \eta^2]}{\xi^2 + \eta^2}$$

reste inférieure à une certaine limite, car elle ne pourrait devenir infinie que si ξ ou η tendaient vers l'infini, mais alors la fonction tend vers 0; ou si ξ et η tendaient vers 0, mais alors, en posant

$$\xi = \rho \cos \omega, \quad \eta = \rho \sin \omega,$$

on trouve

$$\Phi = -\frac{\cos 2\omega}{2} - \frac{\rho \cos 3\omega}{3} - \frac{\rho^2 \cos 4\omega}{4} - \ldots,$$

qui reste finie. Nous avons donc pour h une limite inférieure finie. C. Q. F. D.

Posons alors

$$\arg \alpha_\nu x^2 = \pi, \quad \bmod \alpha_\nu = h \bmod \varepsilon_\nu^2 \quad (\nu > k),$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} \alpha_\nu x^2 = \beta x^2.$$

Nous aurons

$$e^{\alpha x^2} F(x) = F_1(x) F_2(x),$$

$$F_1(x) = e^{(\alpha-\beta)x^2} \prod_{\nu=1}^{\nu=k} e^{t_\nu x}(1 - \varepsilon_\nu x),$$

$$F_2(x) = \prod_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} e^{\alpha_\nu x^2 + t_\nu x}(1 - \varepsilon_\nu x).$$

On peut prendre k assez grand pour que la valeur absolue de βx^2 soit aussi petite que l'on veut et, par conséquent, pour que la partie réelle de $(\alpha - \beta)x^2$ soit négative; on aura alors

$$\lim F_1 = 0, \quad \bmod F_2 < 1,$$

d'où

$$\lim e^{\alpha x^2} F(x) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En général, si $F(x)$ est une fonction de genre n, on aura

$$\lim F(x) e^{\alpha x^{n+1}} = 0$$

toutes les fois que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0.$$

Il suit de là que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz$$

représente une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Posons

$$\int_0^\infty e^{z^{n+1}} z^p\, dz = C_p.$$

Nous aurons, en changeant z en zx,

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^p \, dz \, x^{p+1} = C_p$$

ou

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^p \, dz = \frac{C^p}{x^{p+1}}.$$

En différentiant cette relation, on trouve

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^{n+1}(n+1)x^{n+2} z^p \, dz = \frac{-(p+1)C_p}{x^{p+2}}.$$

ou, faisant $x = 1$,

$$C_{p+n+1} = \int_0^\infty e^{z^{n+1}} z^{p+n+1} \, dz = -\frac{p+1}{n+1} C_p.$$

Si donc on pose

$$p = a(n+1) + r, \quad r < n+1,$$

il vient

$$C_p = (-1)^a C_r \frac{(r+1)[(r+1)+(n+1)][(r+1)+2(n+1)]\ldots[(r+1)+(a-1)(n+1)]}{(n+1)^a},$$

ou, posant

$$\frac{r+1}{n+1} = s,$$

$$C_p = (-1)^a C_r \quad s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1),$$

Or, quand a tend vers l'infini

$$\lim \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1)}{1.2\ldots(a-1)} = \infty.$$

Si l'on pose

$$F(z) = \sum A_m z^m, \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{B_m}{x^{m+1}},$$

il vient

$$\operatorname{mod} B_p = \operatorname{mod} C_r \operatorname{mod} A_p \quad s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1),$$

d'où

$$\lim A_p \, 1.2\ldots(a-1) = 0 \quad \text{pour} \quad a = \infty,$$

car

$$\lim B_p = 0.$$

Mais, comme on a aussi

$$\lim p\,B_p = 0,$$

on aura

$$\lim a\,B_p = 0,$$
$$\lim A_p\,a! = 0.$$

Or nous avons

$$p! < (n+1)^{n+1}[2^{n+1}(n+1)^{n+1}][3^{n+1}(n+1)^{n+1}]\ldots[a^{n+1}(n+1)^{n+1}]p^r,$$
$$p! < (a!)^{n+1}(n+1)^p p^r$$

ou

$$A_p \sqrt[n+1]{p!} < A_p a!(n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}} < A_p(a-1)!(n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1}$$

ou

$$< \frac{B_p}{C_r}\frac{s(s+1)\ldots(s+a-1)}{(a-1)!}(n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1} < \frac{1}{C_r s} B_p (n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1},$$

dont la limite est zéro.

Donc

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{p!} = 0.$$

Ainsi, dans une fonction entière de genre n, le coefficient de x^p multiplié par la racine $n+1$ ième du produit des p premiers nombres tend vers zéro quand p croît indéfiniment.