

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FONCTIONS ENTIÈRES À VALEURS DANS UN CORPS DE NOMBRES

Mohammed Ably

Tome 139

Fascicule 2

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 243-270

FONCTIONS ENTIÈRES À VALEURS DANS UN CORPS DE NOMBRES

PAR MOHAMMED ABLY

RÉSUMÉ. — Soit Γ un sous-groupe de rang maximal d'un corps de nombres \mathbf{k} . On montre qu'une fonction entière, envoyant Γ dans l'anneau des entiers d'une extension finie de \mathbf{k} , de croissance analytique et arithmétique faibles est un polynôme. Ce résultat étend un théorème bien connu de Pólya. On montre également que ce résultat est à constante près optimal.

ABSTRACT (*Entire functions with values in a number field*). — Let Γ be a subgroup of maximal rank in a number field \mathbf{k} . We prove that any entire function on Γ with integer values in a finite extension of \mathbf{k} which has slow analytic and arithmetic growth is a polynomial. This extends the well-known Pólya's theorem. We show also that this result is optimal up to a constant.

1. Introduction

En 1915, G. Pólya [7] montra grâce à une méthode d'interpolation qu'une fonction entière f vérifiant $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$ et dont la croissance est plus faible que la fonction $z \rightarrow 2^z$ est un polynôme.

Texte reçu le 17 septembre 2009, accepté le 19 mai 2010

MOHAMMED ABLY, UFR de mathématiques - Laboratoire Paul Painlevé - UMR 8524 du CNRS, Bât. M2, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve D'Ascq Cedex (France) • *E-mail* : `ably@math.univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11C08, 11H06, 30D15.

Mots clefs. — Corps de nombres, fonction entière, polynôme, réseau, interpolation.

En 1978, M. Waldschmidt [10] introduisit les méthodes de transcendance dans l'étude des fonctions entières à valeurs entières et redémontra en particulier une version non optimale du résultat de Pólya ci-dessus.

En développant la preuve de Waldschmidt, F. Gramain [4] améliora en 1980 les résultats antérieurs sur l'analogue du résultat de Pólya pour les entiers de Gauss. Si \mathbf{K} est un corps quadratique imaginaire et $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ l'anneau des entiers de \mathbf{K} , il montra qu'une fonction entière f d'ordre de croissance ≤ 2 de type de croissance suffisamment petit en fonction du discriminant de \mathbf{K} et vérifiant $f(\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ est un polynôme.

Par ailleurs, d'après un résultat de P. Stäckel [8] que F. Gramain a étendu dans [5], si S est une partie dénombrable de \mathbf{C} (resp. \mathbf{R}) et T une partie dense dans \mathbf{C} (resp. \mathbf{R}), alors il existe une fonction entière d'ordre de croissance arbitrairement petit qui envoie S dans T .

Dans le cadre général d'un corps de nombres \mathbf{K} , exceptés les cas $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ et \mathbf{K} quadratique imaginaire, le groupe $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ considéré plongé dans \mathbf{C} est dense dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} selon que \mathbf{K} est réel ou complexe. Alors, en dehors de ces cas exceptionnels, vu le résultat de Stäckel, si f est une fonction entière laissant stable $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$, une hypothèse de nature analytique portant sur la croissance de f ne suffit pas pour montrer que f est algébrique.

Ce problème a été traité dans [1] par une méthode d'interpolation polynomiale.

Dans ce texte, nous obtenons, en utilisant une méthode de transcendance un résultat qui raffine et généralise les résultats antérieurs dans ce domaine.

Soient \mathbf{k} un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur \mathbf{Q} et \mathbf{K} une extension finie de \mathbf{k} . Soient $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ l'anneau des entiers de \mathbf{K} et $S_{\mathbf{K},\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de \mathbf{K} . Pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$, on note $n_v = 1$ (resp. 2) si v est réelle (resp. complexe) et σ_v un plongement associé à v .

Soit Γ un sous-groupe de \mathbf{k} de rang n sur \mathbf{Z} . On identifie Γ (voir le paragraphe 2) à un réseau de \mathbf{R}^n et on désigne par $D(\Gamma)$ le déterminant de ce réseau. On note $\nu(\Gamma) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)D(\Gamma)}$, où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur \mathbf{R}^n est définie sur Γ via l'identification de Γ à un réseau de \mathbf{R}^n .

Si f est une fonction entière, on note $|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|$.

On obtient comme corollaire du théorème 5.1 de ce texte, le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.1. — *Soient \mathbf{k} un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur \mathbf{Q} et \mathbf{K} une extension finie de \mathbf{k} que l'on considère plongée dans \mathbf{C} par σ_{v_0} . Soit Γ un sous-groupe de \mathbf{k} de rang n sur \mathbf{Z} . Soient f une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}}$ des nombres réels > 0 satisfaisant les conditions suivantes :*

$$(1) e^{\frac{n(2-nv_0)}{(n-1)^{nv_0}}} \alpha_{v_0} \prod_{\substack{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \\ v \neq v_0}} e^{\frac{nn_v \alpha_v}{\nu(\Gamma)^{nv_0}}} < \frac{\nu(\Gamma)}{ne},$$

$$(2) \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^n} \leq \alpha_{v_0},$$

(3) pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ et tout nombre réel r assez grand,

$$\max_{\substack{x \in \Gamma \\ \|x\| \leq r}} \log |\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

Alors f est un polynôme.

Si le corps \mathbf{K} est quadratique, ce corollaire s'énonce selon que \mathbf{K} est imaginaire ou réel de la manière suivante :

COROLLAIRE 1.2. — Soient \mathbf{K} un corps quadratique imaginaire que l'on considère plongé dans \mathbf{C} et Γ un sous-groupe de \mathbf{K} de rang 2. Soit f une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et satisfaisant la condition

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^2} < \frac{\pi}{2D(\Gamma)e}.$$

Alors f est un polynôme.

Ainsi, quand Γ est l'anneau des entiers de \mathbf{K} , on retrouve le résultat de F. Gramain cité ci-dessus.

COROLLAIRE 1.3. — Soient \mathbf{K} un corps quadratique réel, que l'on considère plongé dans \mathbf{C} par σ_{v_0} et Γ un sous-groupe de \mathbf{K} de rang 2. Soit σ_{v_1} l'autre plongement de \mathbf{K} dans \mathbf{C} . Soient f une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et α_0, α_1 deux nombres réels positifs satisfaisant les conditions :

(i) $\alpha_0 \exp\left(\frac{2D(\Gamma)\alpha_1}{\pi}\right) < \frac{\pi e^{-3}}{2D(\Gamma)},$

(ii) $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^2} \leq \alpha_0,$

(iii) pour tout nombre réel r assez grand,

$$\max_{\substack{u \in \Gamma \\ \|u\| \leq r}} \log |\sigma_{v_1}(f(u))| \leq \alpha_1 r^2.$$

Alors f est un polynôme.

Dans le cas où \mathbf{k} est un corps cyclotomique premier, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4. — Soit p un nombre premier $\neq 2$. Soient ζ une racine primitive p -ième de 1 et \mathbf{K} un corps de nombres contenant ζ que l'on considère plongé dans \mathbf{C} par σ_{v_0} . On pose :

$$\kappa = (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! (p-1)p^{\frac{p-2}{2}}.$$

Soient f une fonction entière telle que $f(\mathbf{Z}[\zeta]) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}}$ des nombres réels positifs satisfaisant les conditions :

- (i) $\alpha_{v_0} \prod_{\substack{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \\ v \neq v_0}} e^{\kappa \alpha_v} < \frac{1}{\kappa e},$
- (ii) $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^{p-1}} \leq \alpha_{v_0},$
- (iii) pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ et tout nombre réel r assez grand,

$$\max_{\substack{u \in \Gamma \\ \|u\| \leq r}} \log |\sigma_v(f(u))| \leq \alpha_v r^{p-1}.$$

Alors f est un polynôme.

D'autre part, le théorème 5.2 (voir le paragraphe 5) montre que le théorème 5.1 est à constante près optimal. Une version simplifiée du théorème 5.2 est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5. — Soient \mathbf{k} un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur \mathbf{Q} et \mathbf{K} une extension finie de \mathbf{k} , non quadratique imaginaire, que l'on considère plongée dans \mathbf{C} par σ_{v_0} . Soit Γ un ordre de \mathbf{k} . Alors, il existe une fonction entière non polynomiale f , une constante $C = C(\mathbf{k}, \mathbf{K}, \Gamma) > \frac{\nu(\Gamma)}{ne}$ effectivement calculable et des nombres réels positifs $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}}$ satisfaisant :

$$e^{\frac{n(2-n_{v_0})}{(n-1)n_{v_0}}} \alpha_{v_0} \prod_{\substack{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \\ v \neq v_0}} e^{\frac{n n_v \alpha_v}{\nu(\Gamma) n_{v_0}}} \leq C$$

et tels que l'on ait les propriétés suivantes :

- (i) $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}},$
- (ii) $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^n} \leq \alpha_{v_0}$
- (iii) pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ et tout nombre réel r assez grand,

$$\max_{\substack{x \in \Gamma \\ \|x\| \leq r}} \log |\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

La preuve du théorème 5.1 relève d'une méthode de transcendance. On montre selon une idée de F.Gramain qu'une fonction satisfaisant les conditions du corollaire 1.1 vérifie des équations aux différences finies. Cela permet de montrer qu'elle est de croissance suffisamment lente pour conclure qu'elle

est polynomiale. La partie analytique de la preuve est basée sur l'utilisation des polynômes d'interpolation sur Γ étudiés dans la section 3 de ce texte.

Le plan de ce texte est le suivant : dans la section 2, on présente les notations et les lemmes auxiliaires. Dans la section 3, on définit des polynômes d'interpolation sur Γ . Dans la section 4, on étudie les séries d'interpolation, selon une base formée de polynômes d'interpolation sur Γ , associées à une fonction entière. La section 5 est consacrée à la preuve des énoncés ci-dessus.

2. Notations et lemmes auxiliaires

On note $S_{\mathbf{K}}$ l'ensemble des places v de \mathbf{K} normalisées de telle sorte qu'on ait : si v est archimédienne, $|x|_v = |x|$ pour $x \in \mathbf{Q}$ et si v est p -adique, $|p|_v = \frac{1}{p}$. On désigne par \mathbf{K}_v le complété de \mathbf{K} pour la valeur absolue $|\cdot|_v$ et on pose : $n_v = [\mathbf{K}_v : \mathbf{Q}_v]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$, on a la formule du produit : $\prod_{v \in S_{\mathbf{K}}} |x|_v^{n_v} = 1$.

Pour $v \in S_{\mathbf{k}, \infty}$, on considère, selon que v est réelle ou complexe, le plongement de \mathbf{k} dans \mathbf{C} associé à v ou l'un des deux plongements conjugués associés à v qu'on note σ_v et pour x dans \mathbf{k} , on pose :

$$x_v = \begin{cases} \left(\operatorname{Re}(\sigma_v(x)), \operatorname{Im}(\sigma_v(x)) \right) & \text{si } v \text{ est complexe} \\ \sigma_v(x) & \text{si } v \text{ est réelle.} \end{cases}$$

On désigne par \underline{x} le vecteur $(x_v)_{v \in S_{\mathbf{k}, \infty}}$ de \mathbf{R}^n et par $\|x\|$ la norme euclidienne de ce vecteur.

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de Γ sur \mathbf{Z} . On a : $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Les vecteurs $\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_n$ forment une base de l'espace vectoriel \mathbf{R}^n . Notons \mathcal{R}_{Γ} le réseau $\mathbf{Z}\underline{\gamma}_1 + \dots + \mathbf{Z}\underline{\gamma}_n$ de \mathbf{R}^n .

Les matrices de changement de bases de Γ étant unimodulaires, la valeur absolue du déterminant de $(\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_n)$ ne dépend pas de la base de Γ choisie, c'est le déterminant du réseau \mathcal{R}_{Γ} . Notons $D(\Gamma)$ ce déterminant.

Soient $D_{\mathbf{k}}$ le discriminant du corps \mathbf{k} et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n plongements de \mathbf{k} dans \mathbf{C} . Par multilinéarité, on a :

$$|\det(\sigma_i(\gamma_j)_{1 \leq i, j \leq n})| = 2^s |\det(\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_n)|$$

où s désigne le nombre de places complexes de \mathbf{k} .

Ainsi, dans le cas particulier où Γ est l'anneau des entiers de \mathbf{k} , on a :

$$(2.1) \quad |D_{\mathbf{k}}| = (2^s D(\Gamma))^2.$$

En identifiant \mathbf{C} à \mathbf{R}^2 par le morphisme $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, on identifie l'espace $\prod_{v \in S_{\mathbf{k}, \infty}} \mathbf{k}_v$ à l'espace \mathbf{R}^n . Pour $v \in S_{\mathbf{k}, \infty}$, on associe la projection

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{k}_v \\ t &\mapsto t_v. \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, si f et g sont deux fonctions réelles positives, on note $f \ll g$ s'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de \mathbf{K} et Γ tel que pour tout nombre réel x assez grand, on ait $f(x) \leq Cg(x)$.

On utilisera aussi les symboles o et O de Landau.

Soit F le domaine fondamental du réseau \mathcal{R}_Γ relatif à la base $(\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_n)$. On note F_x le translaté de F par le vecteur x de \mathbf{R}^n et $V(F) = D(\Gamma)$ son volume. On pose $\delta = \max_{\substack{t, t' \in F \\ t \neq t'}} \|t - t'\|$.

On note $B(0, R)$ la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon R de \mathbf{R}^n . Si Γ' est une partie de Γ , on note $\Gamma'_R = \psi(\Gamma') \cap B(0, R) \setminus \{0\}$, où ψ est l'isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_i \mathbf{Z}\gamma_i \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma \\ \sum_i \lambda_i \gamma_i &\mapsto \sum_i \lambda_i \underline{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Comme \mathcal{R}_Γ est un réseau de \mathbf{R}^n , on a :

$$(2.2) \quad \operatorname{Card}(\Gamma_R) = \nu(\Gamma)R^n + O(R^{n-1}).$$

Le lemme suivant permet de ramener l'estimation asymptotique de certaines sommes discrètes portant sur Γ_R à l'estimation de sommes continues sur $B(0, R)$.

LEMME 2.1. — *Soit Γ' une partie de Γ . Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable au sens de Lebesgue.*

Soient h et $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions positives telles que la fonction g soit localement intégrable au sens de Lebesgue et telles que les conditions suivantes soient satisfaites

$$(2.3) \quad \sum_{x \in \Gamma'_R} h(x) = o(R^n)$$

$$(2.4) \quad \int_{B(0, R+\delta)} g(t) dt = o(R^n).$$

(i) *On suppose que pour tout $x \in \Gamma'_R$, pour presque (au sens de Lebesgue) tout $t \in F_x$,*

$$f(x) - h(x) \leq f(t) + g(t)$$

et on suppose en plus que l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$(2.5) \quad \int_{B(0, R+\delta) \setminus \bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x} |f(t)| dt = o(R^n)$$

$$(2.6) \quad f \text{ est positive sur } B(0, R + \delta).$$

Alors on a :

$$\sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) \leq \frac{1}{D(\Gamma)} \int_{B(0, R+\delta)} f(t) dt + o(R^n).$$

(ii) Réciproquement, si pour tout $x \in \Gamma'_R$, pour presque tout $t \in F_x$,

$$f(t) - g(t) \leq f(x) + h(x)$$

et si en plus la condition (2.5) est satisfaite, alors on a :

$$\frac{1}{D(\Gamma)} \int_{B(0, R+\delta)} f(t) dt \leq \sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) + o(R^n).$$

Démonstration. — (i) Pour $x \in \Gamma'_R$, on a :

$$f(x) \int_{F_x} dt \leq \int_{F_x} f(t) dt + \int_{F_x} g(t) dt + h(x) \int_{F_x} dt.$$

Comme la réunion $\bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x$ est disjointe et $\bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x \subset B(0, R + \delta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) &\leq \frac{1}{V(F)} \int_{\bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x} f(t) dt + \frac{1}{V(F)} \int_{B(0, R+\delta)} g(t) dt \\ &\quad + \sum_{x \in \Gamma'_R} h(x). \end{aligned}$$

Les conditions (2.3), (2.4), (2.5) (ou (2.6)) étant satisfaites, on en déduit que

$$\sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) \leq \frac{1}{V(F)} \int_{B(0, R+\delta)} f(t) dt + o(R^n).$$

(ii) Dans l'autre sens, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(F)} \int_{\bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x} f(t) dt &\leq \sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) + \frac{1}{V(F)} \int_{B(0, R+\delta)} g(t) dt \\ &\quad + \sum_{x \in \Gamma'_R} h(x) \\ &\leq \sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) + o(R^n). \end{aligned}$$

Cette inégalité jointe à la condition (2.5) entraîne

$$\frac{1}{V(F)} \int_{B(0,R+\delta)} f(t)dt \leq \sum_{x \in \Gamma'_R} f(x) + o(R^n). \quad \square$$

L'objet du lemme suivant est de calculer $\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt$, pour un nombre complexe z et une place complexe v . Le calcul de cette intégrale fait intervenir la fonction réelle définie par :

$$\phi_0(x) = \int_0^x \frac{1 - (1 - y^2)^{\frac{n}{2}}}{y} dy.$$

On pose : $\phi_0(1) = c_0(n)$.

LEMME 2.2. — Soient $R > 0$ un nombre réel, $z \neq 0$ un nombre complexe et v une place complexe. Alors, on a :

- (i) si $|z| \geq R$, $\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n (\log \frac{|z|}{R} + c_0(n))$
- (ii) si $|z| \leq R$, $\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n \phi_0(\frac{|z|}{R})$

Démonstration. — Notons $V_n(\rho)$ le volume de la boule euclidienne de \mathbf{R}^n de rayon ρ . On a :

$$\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho V_{n-2}(\sqrt{R^2 - \rho^2}) \log \left| \frac{z - \rho e^{i\theta}}{\rho} \right| d\rho d\theta.$$

La formule de Jensen ([9], 1.5.3) entraîne

$$\int_0^{2\pi} \log |z - \rho e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \max(\log |z|, \log \rho).$$

Par conséquent, si $|z| \geq R$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt &= 2\pi \int_0^R \rho V_{n-2}(\sqrt{R^2 - \rho^2}) \log \left| \frac{z}{\rho} \right| d\rho \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^n \int_0^1 x(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} \log \frac{|z|}{Rx} dx. \end{aligned}$$

Si $|z| \leq R$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt &= 2\pi \int_0^{|z|} \rho V_{n-2}(\sqrt{R^2 - \rho^2}) \log \left| \frac{z}{\rho} \right| d\rho \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^n \int_0^{\frac{|z|}{R}} x(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} \log \frac{|z|}{Rx} dx. \end{aligned}$$

Or, pour un nombre réel $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^\alpha x(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx = \frac{1}{n} (1 - (1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}}).$$

D'autre part, à l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$-\int_0^\alpha x(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} \log x dx = \frac{1}{n} \int_0^\alpha \frac{1 - (1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{x} dx + \frac{1}{n} ((1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}} - 1) \log \alpha.$$

Ainsi, en tenant compte de l'égalité $\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$, on obtient :

$$\text{si } |z| \geq R, \int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n (\log \frac{|z|}{R} + c_0(n))$$

et

$$\text{si } |z| \leq R, \int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n \phi_0 \left(\frac{|z|}{R} \right)$$

Dans le cas où v est réelle, pour avoir un énoncé analogue au précédent, on introduit la fonction réelle définie par

$$\phi_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \left(\frac{x^2 + y^2}{y^2} \right) dy.$$

L'estimation de cette intégrale fait intervenir la fonction Bêta d'Euler qui est définie par

$$B(\alpha, \lambda) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\lambda-1} dx; \quad \alpha > 0, \lambda > 0.$$

On rappelle que cette fonction est liée à la fonction Gamma par la formule d'Euler ([3], p. 128) suivante

$$(2.7) \quad B(\alpha, \lambda) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha + \lambda)}.$$

On pose : $c_1(n) = \phi_1(1)$.

LEMME 2.3. — Soient $R > 0$ un nombre réel, $z \neq 0$ un nombre complexe non nul et v est une place réelle. Alors, on a :

(1)

$$\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n \phi_1 \left(\frac{|z|}{R} \right).$$

De plus, on a :

- (i) si $|z| \leq R$, $\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} c_1(n) R^n$
- (ii) si $|z| \geq R$, $\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z-t_v}{t_v} \right| dt \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n (c_1(n) + \log \frac{|z|}{R})$.

(2) Si $|z| \geq R$, on a :

$$\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z - t_v}{t_v} \right| dt \geq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n \left(c_1(n) + \log \frac{|z|}{R} - \frac{1}{n-1} \right).$$

Démonstration. — En utilisant le changement de variable $t_v \rightarrow -t_v$ quand $t_v < 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z - t_v}{t_v} \right| dt &= \int_0^R V_{n-1}(\sqrt{R^2 - t_v^2}) \log \frac{|z^2 - t_v^2|}{t_v^2} dt \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} R^n \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \frac{|z^2 - R^2 y^2|}{R^2 y^2} dy \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z - t_v}{t_v} \right| dt \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n \phi_1 \left(\frac{|z|}{R} \right).$$

De plus, si $|z| \leq R$, on a : $\phi_1(\frac{|z|}{R}) \leq \phi_1(1)$, d'où le résultat (i).

Si $|z| \geq R$, on a :

$$\phi_1 \left(\frac{|z|}{R} \right) \leq \phi_1(1) + A \log \frac{|z|}{R},$$

où $A = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy$.

Or, on a :

$$\int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^{\frac{n-1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

et on déduit de (2.7) que $A = 1$. Ainsi on a le résultat (ii).

Si $|z| \geq R$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \frac{|z^2 - R^2 y^2|}{R^2 y^2} dy &\geq \log \frac{|z^2|}{R^2} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy + \\ &+ \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \left(\frac{1 - y^2}{y^2} \right) dy \end{aligned}$$

Afin de pouvoir comparer avec la majoration obtenue dans la première partie de ce lemme, on remarque que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \left(\frac{1 - y^2}{y^2} \right) dy &\geq \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \left(\frac{1 + y^2}{y^2} \right) dy \\ &+ \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log \left(1 - \frac{2y^2}{1 + y^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Or, pour un nombre réel x tel que $0 \leq x < 1$, on a : $\log(1 - x) \geq \frac{-x}{1-x}$, donc

$$\int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \log\left(1 - \frac{2y^2}{1 + y^2}\right) dy \geq -2 \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}} y^2 dy \geq -B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Par conséquent, on déduit de (2.8) que :

$$\int_{B(0,R)} \log \left| \frac{z - t_v}{t_v} \right| dt \geq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n \left(A \log \frac{|z|}{R} + \phi(1) - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\right) \right).$$

D'après (2.7), on a :

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi, on obtient le résultat (2) du lemme. □

3. Polynômes d'interpolation

Dans ce paragraphe, nous allons exhiber une famille de polynômes d'interpolation sur Γ qui constitue une base de polynômes et montrer que ces polynômes vérifient certaines estimations asymptotiques.

Le groupe Γ étant dénombrable, on note $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ les éléments de $\Gamma \setminus \{0\}$ rangés par norme euclidienne croissante puis par arguments en coordonnées sphériques successifs croissants.

Considérons les polynômes de $\mathbf{k}[X]$ suivants :

$$P_0(X) = 1, \quad P_k(X) = \prod_{i \leq k} \frac{X - x_i}{x_i} \quad \text{si } k \geq 1.$$

Pour une place archimédienne v de \mathbf{k} , notons $P_{k,v}(X)$ les polynôme de $\sigma_v(\mathbf{k})[X]$ suivants :

$$P_{0,v}(X) = 1, \quad P_{k,v}(X) = \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{X - x_{i,v}}{x_{i,v}} ; k \geq 1.$$

Le polynôme $P_{k,v}$ étant de degré k , la famille $(P_{k,v})_{k \in \mathbf{N}}$ forme une base de polynômes de $\sigma_v(\mathbf{k})[X]$ sur le corps $\sigma_v(\mathbf{k})$.

Remarquons que, vu l'ordre défini sur Γ , on a :

$$\{x_i, 1 \leq i \leq k\} = \{x \in \Gamma \setminus \{0\}; \|x\| \leq \|x_k\|\} \setminus \{x_i; i > k, \|x_i\| = \|x_k\|\}$$

et d'après (2.2), on obtient :

$$(3.1) \quad k = \nu(\Gamma) \|x_k\|^n + O(\|x_k\|^{n-1}).$$

Afin de donner un énoncé commun aux cas v complexe ou réelle, on note

$$\psi_v := \begin{cases} \phi_0 & \text{si } v \text{ est complexe} \\ \phi_1 & \text{si } v \text{ est réelle} \end{cases}$$

et on pose $c_v(n) = \psi_v(1)$.

PROPOSITION 3.1. — *Soient v une place archimédienne de \mathbf{k} et $z \neq 0$ un nombre complexe. Alors, on a les estimations asymptotiques, où les restes $o(\|x_k\|^n)$ sont uniformes en z , suivantes :*

(i) Si $|z| \geq \|x_k\| + \delta$,

$$\log |P_{k,v}(z)| \leq \nu(\mathbf{\Gamma})(\|x_k\| + \delta)^n \log\left(\frac{|z|}{\|x_k\|}\right) + c_v(n)\nu(\mathbf{\Gamma})\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n).$$

(ii) Si $|z| \leq \|x_k\| + \delta$,

$$\begin{aligned} \log |P_{k,v}(z)| &\leq \nu(\mathbf{\Gamma})\|x_k\|^n \psi_v\left(\frac{|z|}{\|x_k\| + \delta}\right) + o(\|x_k\|^n) \\ &\leq c_v(n)\nu(\mathbf{\Gamma})\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n) \end{aligned}$$

(iii) Soient $E > 1$ une constante et z un nombre complexe tel que $|z| = E\|x_k\|$. Alors, si v est complexe, on a :

$$\log |P_{k,v}(z)| = \nu(\mathbf{\Gamma})(\log E + c_v(n))\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n)$$

et si v est réelle, on a :

$$\log |P_{k,v}(z)| \geq \nu(\mathbf{\Gamma})\left(\log E + c_v(n) - \frac{1}{n-1}\right)\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n).$$

Démonstration. — Soient z un nombre complexe non nul et v une place archimédienne de \mathbf{k} . Soient $\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{\Gamma} \setminus \{\{x \in \mathbf{\Gamma}; x_v = z\} \cup \{0\}\}$ et $f_z : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f_z(t) = \log \left| \frac{z - t_v}{t_v} \right|.$$

On a :

$$\{x_i; i \leq k, x_{i,v} \neq z\} = \mathbf{\Gamma}'_{\|x_k\|} \setminus \{x_i; i > k, \|x_i\| = \|x_k\|\},$$

donc

$$(3.2) \quad \sum_{x \in \mathbf{\Gamma}'_{\|x_k\|}} f_z(x) = \log |P_k(z)| + \sum_{\substack{i > k \\ \|x_i\| = \|x_k\|}} f_z(x_i).$$

Notons que, pour tout k assez grand et tout $x \in \mathbf{\Gamma}'_{\|x_k\|}$, on a :

$$\log |x|_v \gg -\log \|x_k\|,$$

en effet ; soient $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de Γ sur \mathbf{Z} et d un dénominateur commun de $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Alors, dx est un entier non nul de \mathbf{k} et d'après la formule du produit, on obtient

$$|x_v|^{n_v} \geq d^{-[\mathbf{k}:\mathbf{Q}]} \prod_{\substack{w \in S_{\mathbf{k}, \infty} \\ w \neq v}} |x_w|^{-n_w} \geq d^{-[\mathbf{k}:\mathbf{Q}]} \|x_k\|^{n_v - [\mathbf{k}:\mathbf{Q}]}$$

Si $|z| \leq 2\|x_k\|$, on en déduit l'estimation

$$\sum_{\substack{i > k \\ \|x_i\| = \|x_k\|}} |f_z(x_i)| \ll \|x_k\|^{n-1} \log \|x_k\|$$

Par ailleurs, si $|z| > 2\|x_k\|$, alors pour tout $x \in \Gamma'_{\|x_k\|}$, on a $f_z(x) \geq 0$.

Par suite, on déduit de (3.2) que

$$(3.3) \quad \log |P_k(z)| \leq \sum_{x \in \Gamma'_{\|x_k\|}} f_z(x) + o(\|x_k\|^n),$$

où $o(\|x_k\|^n)$ est uniforme en z .

Pour un nombre complexe z tel que $|z| = E\|x_k\|$, avec E une constante > 1 , on a :

$$\sum_{\substack{i > k \\ \|x_i\| = \|x_k\|}} |f_z(x_i)| \ll \|x_k\|^{n-1} \log \|x_k\|$$

et dans ce cas on déduit de (3.2) l'égalité

$$(3.4) \quad \log |P_{k,v}(z)| = \sum_{x \in \Gamma'_{\|x_k\|}} f_z(x) + o(\|x_k\|^n).$$

Nous allons estimer $\sum_{x \in \Gamma'_R} f_z(x)$ pour R assez grand, à l'aide du lemme 2.1 appliqué aux fonctions suivantes :

$$g_z(t) = \log \left(1 + \frac{\delta}{|z - t_v|} \right), \quad h(t) = \log \left(1 + \frac{\delta}{|t_v|} \right).$$

Pour $x \in \Gamma'_R$ et $t \in F_x \setminus \{0\}$ tel que $t_v \neq z$, on a :

$$f_z(x) \leq f_z(t) + \log \frac{|t_v|}{|x_v|} + \log \frac{|z - x_v|}{|z - t_v|} \leq f_z(t) + h(x) + g_z(t).$$

La fonction h satisfait la condition (2.3) du lemme 2.1 ; en effet, si x vérifie $|x_v| > 3\delta$, pour tout $t \in F_x \setminus \{0\}$, on a :

$$|t_v| \geq |x_v| - \delta > 2\delta, \quad |x_v| \geq |t_v| - \delta,$$

on en déduit que

$$\sum_{\substack{x \in \Gamma'_R \\ |x_v| > 3\delta}} h(x) \leq \frac{1}{V(F)} \int_{B^*(0, R+\delta)} \log \left(1 + \frac{\delta}{|t_v| - \delta} \right) dt$$

$$\ll (R + \delta)^n \log \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)$$

où $B^*(0, R + \delta) = B(0, R + \delta) \setminus \{t \in B(0, R + \delta); |t_v| \leq 2\delta\}$.

Par ailleurs, pour $x \in \Gamma'_R$, grâce à la formule du produit, on obtient

$$\log |x_v| \gg -\log R$$

et par suite

$$\sum_{\substack{x \in \Gamma'_R \\ |x_v| \leq 3\delta}} h(x) \ll \sum_{\substack{x \in \Gamma'_R \\ |x_v| \leq 3\delta}} \log R \ll R^{n-n_v} \log R.$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{x \in \Gamma'_R} h(x) = o(R^n).$$

D'autre part, selon que $|z| \geq 2(R + \delta)$ ou $|z| < 2(R + \delta)$, on a :

$$\int_{B(0, R+\delta)} g_z(t) dt \leq \int_{B(0, R+\delta)} \log \left(1 + \frac{\delta}{R} \right) dt \ll R^n \log \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)$$

ou

$$\int_{B(0, R+\delta)} g_z(t) dt \ll R^{n-n_v} \int_0^{3(R+\delta)} \rho^{n_v-1} \log \left(1 + \frac{\delta}{\rho} \right) d\rho \ll R^n \log \left(1 + \frac{\delta}{R} \right).$$

Donc on a :

$$\int_{B(0, R+\delta)} g_z(t) dt = o(R^n),$$

où $o(R^n)$ est uniforme en z .

Par ailleurs, selon que $|z| > 2(R + \delta)$ ou $|z| \leq 2(R + \delta)$, la fonction f_z est positive sur $B(0, R + \delta)$ ou on a l'estimation suivante :

$$\int_{B(0, R+\delta) \setminus \cup_{x \in \Gamma'_R} F_x} |f_z(t)| dt \leq \log R \int_{B(0, R+\delta) \setminus B(0, R-\delta)} dt$$

$$\ll R^{n-1} \log R$$

Donc la fonction f_z satisfait la condition la condition (2.6) ou (2.5) du lemme 2.1. Alors, grâce à la partie (i) du lemme 2.1, on obtient

$$(3.5) \quad \sum_{x \in \Gamma'_R} f_z(x) \leq \frac{1}{D(\Gamma)} \int_{B(0, R+\delta)} f_z(t) + o(R^n),$$

où $o(R^n)$ est uniforme en z .

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = ER$, avec $E > 1$ un réel indépendant de R . Pour $x \in \Gamma'_R$ et $t \in F_x \setminus \{0\}$, on a l'inégalité dans l'autre sens

$$f_z(t) \leq f_z(x) + \log \frac{|x_v|}{|t_v|} + \log \frac{|z - t_v|}{|z - x_v|} \leq f_z(x) + h(t) + \log\left(1 + \frac{\delta}{(E - 1)R}\right).$$

La fonction h satisfait l'estimation (2.4) du lemme 2.1 car

$$\int_{B(0, R+\delta)} h(t) dt \ll R^n \log\left(1 + \frac{\delta}{R}\right).$$

D'autre part, la condition (2.3) du lemme 2.1 est satisfaite puisque

$$\sum_{x \in \Gamma'_R} \log\left(1 + \frac{\delta}{(E - 1)R}\right) = o(R^n).$$

La fonction f_z satisfait la condition (2.5) du lemme 2.1 car

$$\int_{B(0, R+\delta) \setminus \bigcup_{x \in \Gamma'_R} F_x} |f_z(t)| \ll \log R \int_{B(0, R+\delta) \setminus B(0, R-\delta)} dt \ll R^{n-1} \log R.$$

Par conséquent, dans ce cas, on déduit de la partie (ii) du lemme 2.1, l'inégalité

$$(3.6) \quad \frac{1}{D(\Gamma)} \int_{B(0, R+\delta)} f_z(t) dt \leq \sum_{x \in \Gamma'_R} f_z(x) + o(R^n).$$

En définitive, les estimations (3.3) et (3.5) jointes au lemme 2.2 si v est complexe (resp. au lemme 2.3 si v est réelle) entraînent les estimations (i) et (ii) de la proposition 3.1.

Les estimations (3.4), (3.5) et (3.6) jointes au lemme 2.2 si v est complexe (resp. au lemme 2.3 si v est réelle) entraînent l'estimation (iii) de la proposition 3.1. □

Remarque 3.1. — Dans la section 5, on est amené à utiliser l'inégalité

$$c_v(n) \geq \frac{1}{n}.$$

L'objet de cette remarque est de montrer cette minoration.

Si v est une place complexe, $c_v(n) := c_0(n) = \int_0^1 \frac{1 - (1 - t^2)^{\frac{n}{2}}}{t} dt$. Donc, on a :

$$c_0(n) \geq \int_0^1 \frac{1 - (1 - t^2)}{t} dt \geq \frac{1}{2}.$$

Si v est une place réelle,

$$c_v(n) := c_1(n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \log\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \log\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt &\geq \log 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \\ &\geq \frac{\log 2}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

et grâce à (2.7), on obtient

$$c_1(n) \geq \frac{\log 2}{2}.$$

Donc, si $n \geq 3$, la minoration est satisfaite.

Par ailleurs, quand $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} c_1(2) &\geq -\frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \log t^2 dt \geq -\frac{4}{\pi} \int_0^1 (1-t) \log t dt \\ &\geq \frac{3}{\pi}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Séries d'interpolation

A une fonction entière f et une place archimédienne v de \mathbf{K} , on associe la série d'interpolation $S(f, v)$ définie par

$$S(f, v)(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} b_{k,v} P_{k,v}(z),$$

où la suite $(b_{k,v})_{k \in \mathbf{N}}$ des coefficients d'interpolation associée à la fonction f et à la place v est définie par : $b_{k,v} = \frac{1}{2i\pi x_{k+1,v}} \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{P_{k+1,v}(\zeta)} d\zeta$ et où C_k est un cercle de centre 0 et de rayon $r_k > \|x_{k+1}\|$.

Par ailleurs, à une suite de nombres complexes $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et une place archimédienne v de \mathbf{K} , on associe la série formelle $S((a_k), v) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k P_{k,v}$.

PROPOSITION 4.1. — (1) *Soit $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :*

$$(4.1) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_k|}{k} = a < -c_v(n).$$

Alors, la série $S((a_k), v)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbf{C} . La somme g_v de cette série satisfait

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |g_v|_r}{r^n} \leq \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp\left(n(c_v(n) + a) - 1\right).$$

De plus, la suite des coefficients d'interpolation associée à la fonction g_v et la place v est la suite $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$.

(2) Soient $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$ et f une fonction entière telles que :

$$(4.2) \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_r}{r^n} = \rho < \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp\left(-1 - \frac{n(2 - n_v)}{n - 1}\right).$$

Alors, la série d'interpolation $S(f, v)$ converge uniformément sur tout compact vers f . De plus, la suite $(b_{k,v})_{k \in \mathbf{N}}$ des coefficients d'interpolation associée à f et v satisfait

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \log \frac{|b_{k,v}|}{k} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \log\left(\frac{n\rho}{\nu(\Gamma)}\right)\right) - c_v(n).$$

Démonstration. — (1) Soit $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes satisfaisant (4.1). Soit a' un nombre réel tel que $a < a' < -c_v(n)$. Alors, il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $|a_k| \leq e^{a'k}$.

Soient $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$ et r un nombre réel suffisamment grand par rapport à k_0 . Soit α_v un nombre réel > 0 tel que $\psi_v(\alpha_v) < \psi_v(1)$. Rappelons que $\psi_v(1) = c_v(n)$.

Puisque, la fonction ψ_v est strictement croissante, on a : $\alpha_v < 1$.

Si $\|x_k\| + \delta \geq \frac{r}{\alpha_v}$, on déduit de l'estimation (ii) de la proposition 3.1 et de l'égalité (3.1) que

$$\begin{aligned} \log |a_k P_{k,v}|_r &\leq \nu(\Gamma)(\psi_v(\alpha_v) + a')\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n) \\ &\leq (\psi_v(\alpha_v) + a')k + o(k) \end{aligned}$$

comme $\psi(\alpha_v) + a' < c_v(n) + a' < 0$, la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k P_{k,v}$ converge uniformément sur le disque complexe fermé $D(0, r)$. Notons g_v la somme de cette série.

On a :

$$|g_v|_r \leq \sum_{\substack{k \\ \|x_k\| + \delta < \frac{r}{\alpha_v}}} |a_k P_{k,v}|_r + \sum_{\substack{k \\ \|x_k\| + \delta \geq \frac{r}{\alpha_v}}} |a_k P_{k,v}|_r.$$

L'estimation (ii) de la proposition 3.1 et l'estimation (3.1) entraînent

$$\sum_{r < \|x_k\| + \delta \leq \frac{r}{\alpha_v}} |a_k P_{k,v}|_r \leq \sum_{r < \|x_k\| + \delta \leq \frac{r}{\alpha_v}} \exp\{\nu(\Gamma)\|x_k\|^n (\psi_v(\frac{r}{\|x_k\| + \delta}) + a') + o(\|x_k\|^n)\}.$$

Dans cette somme, on a : $\psi_v(\frac{r}{\|x_k\| + \delta}) + a' < \psi_v(1) + a' < 0$.

D'autre part, l'estimation (i) de la proposition 3.1 et l'estimation (3.1) entraînent

$$\sum_{\substack{\|x_k\| + \delta \leq r \\ k \geq k_0}} |a_k P_{k,v}|_r \leq \sum_{\substack{\|x_k\| + \delta \leq r \\ k \geq k_0}} \exp\{\nu(\Gamma)\|x_k\|^n (\log \frac{r}{\|x_k\|} + c_v(n) + a') + o(r^n)\}.$$

La fonction h_v définie par

$$h_v(t) := \begin{cases} t^n (\log \frac{1}{t} + c_v(n) + a') & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

atteint son maximum en $t = \exp(a' + c_v(n) - 1/n)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Par conséquent, on a :

$$\frac{\log |g_v|_r}{r^n} \leq \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp\left(n(c_v(n) + a') - 1\right) + \frac{o(r^n)}{r^n}.$$

On obtient, par passage à la limite, l'estimation du type de croissance de g_v .

En utilisant la formule des résidus, on montre que (a_k) est la suite des coefficients d'interpolation associée à la fonction g_v et la place v .

(2) Soient v une place dans $S_{\mathbf{K},\infty}$ et f une fonction entière satisfaisant (4.2). Soit $(b_{k,v})_{k \in \mathbf{N}}$ la suite des coefficients d'interpolation associée à f et v définie au début de ce paragraphe.

Soit E une constante > 1 que l'on précisera dans la suite. Notons $C_k(E)$ le cercle de centre 0 et de rayon $E\|x_{k+1}\|$.

Par définition, on a : $b_{k,v} = \frac{1}{2\pi i x_{k+1,v}} \int_{C_k(E)} \frac{f(\zeta)}{P_{k+1,v}(\zeta)} d\zeta$.

Posons :

$$c'_v(n) = c_v(n) - \frac{2 - n_v}{n - 1}.$$

Soit ρ' tel que : $\rho < \rho' < \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp(-1 - \frac{n(n_v-2)}{n-1})$.

L'estimation (iii) de la proposition 3.1 jointe à l'égalité (3.1) entraîne

$$|P_{k+1,v}|_{E\|x_{k+1}\|} \geq \exp\{k(\log E + c'_v(n)) + o(k)\}.$$

D'où

$$|b_{k,v}| \leq \exp\left\{\left(\frac{\rho'}{\nu(\Gamma)} E^n - \log E - c'_v(n)\right)k + o(k)\right\}.$$

La fonction $t \rightarrow \frac{\rho'}{\nu(\Gamma)} t^n - \log t - c'_v(n)$ atteint son minimum en $t = (\frac{\nu(\Gamma)}{n\rho'})^{\frac{1}{n}}$ qui est > 1 par hypothèse. Par conséquent, par passage à la limite, on obtient :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |b_{k,v}|}{k} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \log \frac{n\rho}{\nu(\Gamma)}\right) - c'_v(n).$$

Or, $\rho < \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp(-1 - \frac{n(2-n_v)}{n-1})$, donc on a :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |b_{k,v}|}{k} < -c_v(n).$$

Par suite, d'après la partie 1 de la proposition 4.1, la somme $g_v(z)$ de la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} b_{k,v} P_{k,v}(z)$ est une fonction entière satisfaisant :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |g_v|_r}{r^n} \leq \frac{\nu(\Gamma)}{ne}.$$

Pour achever la preuve, nous allons montrer que : $f = g_v$. La fonction $f - g_v$ s'annule évidemment sur $\Gamma \setminus \{0\}$.

Si $n \geq 3$ alors le groupe Γ n'est pas discret donc il est dense dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} selon qu'il est réel ou complexe, par conséquent on a $f = g_v$.

Si $n = 2$ et $\Gamma \subset \mathbf{R}$, alors Γ est dense dans \mathbf{R} et par conséquent $f = g_v$.

Considérons le cas $n = 2$ et Γ complexe. Dans ce cas, on a :

$$(4.3) \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |f - g_v|_r}{r^2} \leq \frac{\nu(\Gamma)}{2e} \leq \frac{\pi}{2eD(\Gamma)}.$$

D'autre part, la fonction $f - g_v$ s'annule sur Γ_r qui est contenu dans le disque complexe $D(0, r)$.

Si $f - g_v$ est non nulle on déduit de la formule de Jensen ([9], 1.5.3) que pour r assez grand, on a :

$$\log |f - g_v|_r \geq \sum_{x \in \Gamma_r} \log \frac{r}{|x_v|}.$$

Nous allons estimer cette somme en utilisant le lemme 2.1. Pour $x \in \Gamma \setminus \{0\}$ et $t \in F_x$, on a :

$$\log \frac{r}{|t_v|} \leq \log \frac{r}{|x_v|} + \log(1 + \frac{\delta}{|t_v|})$$

Les conditions de la partie (ii) du lemme 2.1 sont satisfaites. On en déduit que

$$\frac{1}{D(\Gamma)} \int_{B(0,r)} \log \frac{r}{|t_v|} dt \leq \sum_{x \in \Gamma_r} \log \frac{r}{|x_v|} + o(r^2),$$

donc

$$\frac{\pi r^2}{2D(\Gamma)} \leq \sum_{x \in \Gamma_r} \log \frac{r}{|x_v|} + o(r^2),$$

cela contredit l'inégalité (4.3). □

Les deux lemmes qui suivent sont dus à F. Gramain et M. Mignotte. Nous les énonçons ici avec les données et les notations de notre problème. On remplace notamment les notions de mesures $|\bar{x}|$ ou $M(x)$ d'un entier x de \mathbf{K} utilisés dans [6] par la mesure équivalente $\max_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty}} |x|_v$. On remplace aussi l'ensemble $\Gamma(r) = \{k_1\gamma_1 + \dots + k_n\gamma_n, k_i \in \mathbf{Z}, |k_i| \leq r\}$ dépendant d'une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de Γ sur \mathbf{Z} considéré dans [6] et [4] par l'ensemble $\Gamma_r = \{u \in \Gamma, \|u\| \leq r\}$ vu qu'il existe des constantes $c_1 = c_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0, c_2 = c_2(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ telles qu'on ait : $\Gamma_{c_1 r} \subset \Gamma(r) \subset \Gamma_{c_2 r}$.

LEMME 4.1. — Soient \mathbf{K} un corps de nombres de degré ≥ 2 sur \mathbf{Q} , que l'on considère plongé dans \mathbf{C} et $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ l'anneau des entiers de \mathbf{K} . Soient Γ un sous-groupe de \mathbf{K} de rang n sur \mathbf{Z} et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de Γ sur \mathbf{Z} . Soit f une fonction définie sur \mathbf{C} tel que $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et satisfont n équations fonctionnelles de la forme

$$\sum_{0 \leq j \leq N_i} Q_{i,j}(z) f(z + j\gamma_i) = 0 ; i = 1, \dots, n.$$

où pour tout i fixé, les $Q_{i,j}$ sont des polynômes non tous nuls à coefficients dans \mathbf{Z} .

Alors, on a : $\max_{\substack{u \in \Gamma_r \\ v \in S_{\mathbf{K},\infty}}} \log |f(u)|_v \ll r \log r$.

De plus, si Γ est un sous-groupe complexe de rang 2, alors

$$\log |f|_R \ll R \log R.$$

Démonstration. — La première estimation du lemme découle de la proposition A2 de [6].

Dans le cas où Γ est un sous-groupe complexe de rang 2, si (γ_1, γ_2) est une base de Γ sur \mathbf{Z} , alors γ_1 et γ_2 sont linéairement indépendants sur \mathbf{R} et on applique le lemme 5 de [4] pour obtenir la majoration annoncée de $\log |f|_R$. \square

LEMME 4.2. — Soient \mathbf{K} un corps de nombres de degré ≥ 2 sur \mathbf{Q} , que l'on considère plongé dans \mathbf{C} et $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ l'anneau des entiers de \mathbf{K} . Soit Γ un sous-groupe de \mathbf{K} de rang $n \geq 2$. Soit f une fonction entière qui satisfait les conditions :

- (i) $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$
- (ii) $\begin{cases} \log |f|_R \ll R \log R & \text{si } n = 2 \text{ et } \Gamma \text{ est complexe} \\ \log |f|_R \ll R^n & \text{sinon} \end{cases}$
- (iii) $\max_{\substack{u \in \Gamma_r \\ v \in S_{\mathbf{K},\infty}}} \log |f(u)|_v \ll r \log r$.

Alors f est un polynôme.

Démonstration. — Si Γ n'est pas discret le lemme découle de la proposition A3 de [6].

Si le groupe Γ est discret, alors $n = 2$ et Γ est complexe, dans ce cas la preuve est la même que celle du théorème 2 de [10]. \square

5. Résultats

Rappelons qu'on note $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ les éléments de $\Gamma \setminus \{0\}$ rangés dans l'ordre croissant (en coordonnées sphériques dans \mathbf{R}^n) et pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$, on note $x_{k,v} := \sigma_v(x_k)$ où σ_v est un plongement de \mathbf{K} dans \mathbf{C} associé à v .

On considère \mathbf{K} plongé dans \mathbf{C} par σ_{v_0} . Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière telle que

$$f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}} \text{ et } \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f|_R}{R^n} < \frac{\nu(\Gamma)}{n} \exp\left(-1 - \frac{n(2 - n_{v_0})}{n - 1}\right).$$

On omet dans les notations, quand il n'y a pas d'ambiguïté, les indices relatifs à la place privilégiée v_0 .

D'après la proposition 4.1, la fonction f est la somme de la série $S(f, v_0)(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} b_k P_k(z)$, où $b_k = \frac{1}{2i\pi x_{k+1}} \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{P_{k+1}(\zeta)} d\zeta$.

On déduit de la formule des résidus que $b_k \in \mathbf{K}$. Ainsi, pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$, on note $S_v(f)$ la série formelle $\sum_{k \in \mathbf{N}} \sigma_v(b_k) P_{k,v}(z)$. On a : $S_v(f)(\sigma_v(x_s)) = \sum_{k \leq s} \sigma_v(b_k) P_{k,v}(\sigma_v(x_s)) = \sum_{k \leq s} \sigma_v(b_k P_k(x_s)) = \sigma_v(f(x_s))$ donc $S_v(f)$ est bien définie sur $\sigma_v(\Gamma)$ et $S_v(f)(\sigma_v(\Gamma)) \subset \sigma_v(\mathbf{Z}_{\mathbf{K}})$.

Pour une partie non vide \mathcal{J} de $S_{\mathbf{K},\infty}$, on note $r_{\mathcal{J}}$ le nombre de places réelles contenues dans \mathcal{J} et $n_{\mathcal{J}} = \sum_{v \in \mathcal{J}} n_v$.

THÉORÈME 5.1. — Soient \mathbf{k} un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur \mathbf{Q} et \mathbf{K} une extension finie de \mathbf{k} que l'on considère plongé dans \mathbf{C} par σ_{v_0} . Soit Γ un sous-groupe de \mathbf{k} de rang n sur \mathbf{Z} .

Soit \mathcal{J} une partie de $S_{\mathbf{K},\infty}$ contenant v_0 . Soient $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ et $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}}$ des nombres réels > 0 satisfaisant les conditions :

- (i) $\max_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v < \frac{\nu(\Gamma)}{n}$,
- (ii) $e^{\frac{nr_{\mathcal{J}}}{(n-1)n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v^{\frac{n_v}{n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{nn_v \alpha_v}{\nu(\Gamma)n_{\mathcal{J}}}} < \frac{\nu(\Gamma)}{ne}$,
- (iii) pour tout $v \in \mathcal{J}$, la série $S_v(f)$ se prolonge en une fonction entière notée f_v satisfaisant $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f_v|_R}{R^n} \leq \alpha_v$
- (iv) pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$ et tout nombre réel r assez grand

$$\max_{\substack{x \in \Gamma \\ \|x\| \leq r}} \log |\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

Alors f est un polynôme.

Remarque 5.1. — Les conditions (iii) et (iv) ne sont pas de la même nature. La première est de nature analytique portant sur le type de croissance de la somme de la série entière $S_v(f)$ pour $v \in \mathcal{J}$. La seconde est de type arithmétique. Pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$, on n'exige même pas que la série $S_v(f)$ soit définie en dehors de $\sigma_v(\Gamma)$.

La preuve du théorème repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. — Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de Γ sur \mathbf{Z} . Sous les hypothèses du théorème 5.1, il existe un entier $N > 1$ et une place v dans \mathcal{J} tels que pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe des polynômes $(Q_{i,j})_{1 \leq j \leq N}$ à coefficients dans \mathbf{Z} non tous nuls tels que :

$$\sum_{0 \leq j \leq N} Q_{i,j}(z) f_v(z + j\gamma_{i,v}) = 0.$$

Preuve de la proposition 5.1. — Soient $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}}$ des nombres réels > 0 vérifiant les conditions du théorème. Soient $(\tilde{\alpha}_v)_{v \in \mathcal{J}}$ des nombres réels tels que : pour tout $v \in \mathcal{J}$, $\tilde{\alpha}_v > \alpha_v$ et tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$(5.1) \quad \max_{v \in \mathcal{J}} \tilde{\alpha}_v < \frac{\nu(\Gamma)}{n}$$

et

$$(5.2) \quad e^{\frac{nr_j}{(n-1)n_j}} \prod_{v \in \mathcal{J}} \tilde{\alpha}_v^{\frac{n_v}{n_j}} \prod_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{nn_v \alpha_v}{\nu(\Gamma)n_j}} < \frac{\nu(\Gamma)}{ne}.$$

Pour homogénéiser les notations, si $v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}$, on pose : $\tilde{\alpha}_v = \alpha_v$.

PREMIER PAS. Soit γ l'un des γ_i . Soit S_0 un réel assez grand, posons :

$$M := M(S_0) = \lceil S_0^n / (\log S_0)^2 \rceil, N := N(S_0) = \lceil (\log S_0)^5 \rceil.$$

Il existe des entiers $q_{j,k}$ ($0 \leq j < N, 0 \leq k < M$) non tous nuls de valeurs absolues majorées par $\exp(\frac{S_0^n}{\log S_0})$ et tels que la fonction définie par

$$F(z) = \sum_{\substack{j < N \\ k < M}} q_{j,k} z^k f(z + j\gamma)$$

soit identiquement nulle sur Γ_{S_0} . En effet, si d est le dénominateur commun de $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, cela revient à résoudre le système : $\{d^M F(u) = 0; u \in \Gamma_{S_0}\}$. Ce système en les inconnues $q_{j,k}$ est un système linéaire homogène à $K := NM$ inconnues et dont le nombre d'équations L vérifie $L = \text{card}(\Gamma_{S_0}) \leq 2\nu(\Gamma)S_0^n$.

Les coefficients $d^M u^k f(u + j\gamma)$ de ce système sont dans $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$. On déduit des conditions (iii) et (iv) du théorème 5.1 que

$$\max_{\substack{v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \\ \|u\| \leq S_0}} \sum_{\substack{j < N \\ k < M}} |\sigma_v(d^M u^k f(u + j\gamma))| \leq A$$

où $A = \exp\{\log NM + M \log dS_0 + (S_0 + N\|\gamma\|)^n \max_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty}} |\tilde{\alpha}_v|\}$.

Comme S_0 est assez grand, on a $K > nL$ et on déduit du lemme de Siegel ([9], lemme 1.3.1) qu'il existe une solution non nulle $(q_{j,k})$ dans \mathbf{Z}^{MN} vérifiant : $\max_{j,k} |q_{j,k}| \leq (\sqrt{2}A)^{\frac{nL}{K-nL}}$.

Vu le choix des paramètres, on en déduit que

$$\log \max_{j,k} |q_{j,k}| \leq \frac{S_0^n}{\log S_0}.$$

SECOND PAS. Pour $v \in \mathcal{J}$, posons

$$F_v(z) = \sum_{\substack{j < N \\ k < M}} q_{j,k} z^k f_v(z + j\gamma_v).$$

Par définition $F_{v_0} = F$. Pour tout $u \in \Gamma$, on a $F_v(u_v) = \sigma_v(F(u))$, par conséquent F_v est nulle sur $\sigma_v(\Gamma_{S_0})$.

Considérons alors les propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_1(S) : F \text{ est nulle sur } \Gamma_S$$

$$\mathcal{P}_2(S) : \log |F_v|_S \leq \frac{\nu(\Gamma)}{n} \left(1 + \log \frac{\tilde{\alpha}_v n}{\nu(\Gamma)} + \frac{n(2 - n_v)}{n - 1} \right) S^{n+o(S^n)}, \text{ pour tout } v \in \mathcal{J}.$$

Montrons d'abord que pour $S \geq S_0 : \mathcal{P}_1(S) \Rightarrow \mathcal{P}_2(S + 1)$.

Notons : $d_S = \text{card}(\Gamma \cap B(0, S))$, on a : $d_S = \nu(\Gamma)S^n + o(S^n)$.

Or, d'après (3.1), on a :

$$d_S = \nu(\Gamma)\|x_{d_S}\|^n + o(\|x_{d_S}\|^n).$$

D'où

$$(5.3) \quad \|x_{d_S}\| = S + o(S).$$

Pour $v \in \mathcal{J}$, posons : $G_v(z) = \frac{F_v(z)}{P_{d_S, v}(z)}$,

Si $\mathcal{P}_1(S)$ est satisfaite alors F_v est nulle sur $\sigma_v(\Gamma \cap B(0, S))$ donc G_v est une fonction entière.

Soit $E > 1$ une constante que l'on précisera dans la suite. Comme S_0 est assez grand, on a : $S + 1 \leq E\|x_{d_S}\|$. Le principe du maximum appliqué à G_v montre que :

$$(5.4) \quad |G_v|_{(S+1)} \leq |G_v|_{E\|x_{d_S}\|}.$$

Or, on a :

$$|F_v|_{E\|x_{d_S}\|} \leq NM \exp\left(\frac{S_0^n}{\log S_0} + M \log(E\|x_{d_S}\|) + \tilde{\alpha}_v(E\|x_{d_S}\| + N\|\gamma\|)^n\right).$$

D'où

$$|F_v|_{E\|x_{d_S}\|} \leq \exp(\tilde{\alpha}_v(ES)^n + o(S^n)).$$

D'autre part, les estimations de la proposition 3.1 jointes à (5.3) entraînent les inégalités

$$\log |P_{d_S, v}|_{S+1} \leq \nu(\Gamma)c_v(n)S^n + o(S^n)$$

et pour tout nombre complexe z tel que $|z| = E\|x_{d_S}\|$,

$$\log |P_{d_S, v}(z)| \geq \nu(\Gamma)S^n \left(\log E + c_v(n) - \frac{2 - n_v}{n - 1}\right) + o(S^n).$$

Par suite, on déduit de (5.4) que

$$\log |F_v|_{S+1} \leq \left(-\nu(\Gamma) \log E + \tilde{\alpha}_v E^n + \frac{\nu(\Gamma)(2 - n_v)}{n - 1}\right)S^n + o(S^n).$$

La fonction $h(x) = -\nu(\Gamma) \log x + \tilde{\alpha}_v x^n + \frac{\nu(\Gamma)(2 - n_v)}{n - 1}$ atteint son minimum en $x = \left(\frac{\nu(\Gamma)}{n\tilde{\alpha}_v}\right)^{\frac{1}{n}}$ qui est > 1 d'après la condition (5.1). Par conséquent, on obtient $\mathcal{P}_2(S + 1)$.

Montrons que $\mathcal{P}_2(S) \Rightarrow \mathcal{P}_1(S)$. Supposons que $\mathcal{P}_2(S)$ est satisfaite et qu'il existe $u \in \Gamma$ tel que $\|u\| \leq S$ et $F(u) \neq 0$.

Pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$ et $u \in \Gamma$, posons $F_v(u_v) = \sigma_v(F(u))$. On déduit de la condition (iv) du théorème 5.1 l'inégalité

$$\begin{aligned} \log |F_v(u_v)| &\leq \log(NM) + \frac{S_0^n}{\log S_0} + M \log S + \tilde{\alpha}_v(S + N\|\gamma\|)^n \\ &\leq \tilde{\alpha}_v S^n + o(S^n). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après $\mathcal{P}_2(S)$, on a pour tout $v \in \mathcal{J}$

$$\log |F_v(u_v)| \leq \frac{\nu(\Gamma)}{n} \left(1 + \frac{n(2 - n_v)}{n - 1} + \log \frac{\tilde{\alpha}_v n}{\nu(\Gamma)} \right) S^n + o(S^n).$$

Or, le nombre $d^M F(u)$ est un entier non nul de \mathbf{K} , donc d'après la formule du produit, on a :

$$\prod_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}} |d^M F_v(u_v)|^{n_v} \geq 1.$$

Cette inégalité jointe aux estimations de $|F_v(u_v)|$ précédentes entraîne :

$$e^{\frac{nr_j}{(n-1)n_j}} \prod_{v \in \mathcal{J}} \tilde{\alpha}_v^{\frac{n_v}{n_j}} \prod_{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{nn_v}{\nu(\Gamma)n_j} \tilde{\alpha}_v} \geq \frac{\nu(\Gamma)}{ne}.$$

Cela contredit la condition(5.2).

On en déduit que pour tout $S \geq S_0$, F s'annule sur Γ_S .

Si Γ en tant que sous-groupe de \mathbf{C} n'est pas discret, alors il est dense dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} selon que Γ est réel ou non. Dans ce cas la fonction F est la fonction nulle donc la proposition 5.1 est vérifiée par f_{v_0} .

Si Γ est discret, alors $n = 2$ et Γ est un groupe complexe. Dans ce cas, toutes les places archimédiennes de \mathbf{K} sont complexes et la condition (5.2) entraîne

$$\prod_{v \in \mathcal{J}} \tilde{\alpha}_v < \left(\frac{\nu(\Gamma)}{ne} \right)^{\#\mathcal{J}}.$$

Par suite, il existe $w \in \mathcal{J}$ tel que $\tilde{\alpha}_w < \frac{\nu(\Gamma)}{ne}$ et on déduit de $\mathcal{P}_2(S)$ que la fonction entière F_w est bornée donc elle est constante d'après le théorème de Liouville. Comme elle s'annule, elle est identiquement nulle, donc dans ce cas la proposition 5.1 est vérifiée par f_w . □

Preuve du théorème 5.1. — Sous les hypothèses du théorème 5.1, on déduit de la proposition 5.1 qu'il existe une place v dans \mathcal{J} tel que f_v vérifie n équations fonctionnelles non triviales

$$\sum_{0 \leq j \leq N} Q_{i,j}(z) f_v(z + j\gamma_{i,v}) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

où les $Q_{i,j}$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels.

Par suite, le lemme 4.1 appliqué à la fonction f_v et au sous-groupe $\sigma_v(\Gamma)$ du corps $\sigma_v(\mathbf{K})$ donne

$$\max_{\substack{u \in \sigma_v(\Gamma), \|u\| \leq r \\ w \in S_{\sigma_v(\mathbf{K}), \infty}}} \{\log(|f_v(u)|_w)\} \ll r \log r.$$

De plus, si Γ est un sous-groupe complexe de rang 2, le lemme 4.1 montre l'inégalité

$$\log |f_v|_R \ll R \log R.$$

La fonction f_v satisfait alors les conditions du lemme 4.2, donc f_v est un polynôme et par suite f est un polynôme. □

Preuve des corollaires

Corollaire 1.1. — On prend $\mathcal{J} = \{v_0\}$. On a : $r_{\mathcal{J}} = 2 - n_{v_0}, n_{\mathcal{J}} = n_{v_0}$. La condition (iii) du théorème 5.1 se traduit dans ce cas par la condition 1 de ce corollaire. La condition (i) du théorème 5.1 est contenue dans cette condition 1.

Corollaires 1.2 et 1.3. — Les corollaires 1.2 et 1.3 se déduisent du corollaire 1.1 de la façon suivante : Quand \mathbf{K} est quadratique imaginaire, l'ensemble $S_{\mathbf{K}, \infty}$ est réduit à une seule place complexe v_0 . On a : $n_{v_0} = 2$ et la condition 3 du corollaire 1.1 dans ce cas est vide.

Quand \mathbf{K} est quadratique réel, on a : $S_{\mathbf{K}, \infty} = \{v_0, v_1\}$ et $n_{v_0} = n_{v_1} = 1$.

Corollaire 1.4. — Dans le cas cyclotomique, on prend $\Gamma = \mathbf{Z}[\zeta]$ l'anneau des entiers du corps $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\zeta)$.

D'après (2.1), on a :

$$D(\Gamma)^2 = 2^{1-p} |D_{\mathbf{k}}|$$

et

$$|D_{\mathbf{k}}| = |N_{\mathbf{k}/\mathbf{Q}}(P'(\zeta))| = p^{p-2},$$

où $P(X)$ est le polynôme $P(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$.

Donc on a :

$$D(\Gamma) = 2^{\frac{1-p}{2}} p^{\frac{p-2}{2}} \text{ et } \nu(\Gamma) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{(\frac{p-1}{2})! p^{\frac{p-2}{2}}}.$$

Si \mathbf{K} est une extension de \mathbf{k} , pour tout $v \in S_{\mathbf{K}, \infty}$, on a : $n_v = 2$. On obtient le résultat en appliquant le corollaire 1.1. □

Pour illustrer un exemple d'application du théorème 5.1, lorsque l'ensemble \mathcal{J} n'est pas réduit à une place, on considère le cas cyclotomique ci-dessus. On a, dans ce cas, $r_{\mathcal{J}} = 0$ et $n_{\mathcal{J}} = 2 \text{card}(\mathcal{J})$ et les conditions (i) et (ii) du théorème 5.1 s'écrivent :

$$\max_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v < \frac{\nu(\Gamma)}{p-1},$$

$$\prod_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v \prod_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{(p-1)\alpha_v}{\nu(\Gamma)}} < \left(\frac{\nu(\Gamma)}{(p-1)e}\right)^{\text{card}(\mathcal{J})}.$$

THÉORÈME 5.2. — Soient \mathbf{k} un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur \mathbf{Q} et \mathbf{K} une extension finie de \mathbf{k} , non quadratique imaginaire, que l'on considère plongée dans \mathbf{C} par σ_{v_0} .

Soient Γ un ordre de \mathbf{k} et $\mathcal{J} \subsetneq S_{\mathbf{K}, \infty}$ un ensemble de places contenant v_0 . Alors, il existe une fonction entière non polynomiale f et une constante $C = C(\mathbf{k}, \mathbf{K}, \Gamma) > \frac{\nu(\Gamma)}{ne}$ effectivement calculable et des nombres réels positifs $(\alpha_v)_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty}}$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \max_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v &< \frac{\nu(\Gamma)}{n}, \\ e^{\frac{n r_{\mathcal{J}}}{(n-1)n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v^{\frac{n_v}{n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{nn_v \alpha_v}{\nu(\Gamma)n_{\mathcal{J}}}} &\leq C \end{aligned}$$

et tels qu'on ait les propriétés suivantes :

- (i) $f(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$
- (ii) pour tout $v \in \mathcal{J}$, la série $S_v(f)$ se prolonge en une fonction entière f_v satisfaisant $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f_v|_R}{R^n} \leq \alpha_v$
- (iii) pour tout $v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}$ et tout nombre réel r assez grand,

$$\max_{\substack{x \in \Gamma \\ \|x\| \leq r}} \log |\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

Démonstration. — On reprend les notations du paragraphe 3; en particulier on note $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ les éléments de $\Gamma \setminus \{0\}$ rangés par norme euclidienne croissante puis par arguments en coordonnées sphériques successifs croissants et on considère de nouveau la base (P_k) de polynômes d'interpolation sur Γ définie dans le paragraphe 3. Notons δ_k le dénominateur commun des nombres

$$\{P_k(x_i); i \leq k\}.$$

On montre ([1], proposition 4.1 (iii)) que pour $k \geq k_0$, on a :

$$\delta_k \leq e^{ck}$$

où c est un réel positif ne dépendant que de \mathbf{k} et Γ .

Soit $\epsilon > 0$. On déduit du lemme de Minkowski sur les ensembles convexes ([2] theorem 4, ch. 2) que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, il existe $a'_k \in \mathbf{Z}_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ satisfaisant :

$$(5.5) \quad |a'_k|_v^{n_v} \leq e^{-n_v(c+c_v(n)+\epsilon)k}; v \in \mathcal{J}$$

et

$$(5.6) \quad \left(\max_{v \in S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J}} |a'_k|_v^{n_v}\right)^{\text{card}(S_{\mathbf{K}, \infty} \setminus \mathcal{J})} \leq A_k(\epsilon),$$

où $A_k(\epsilon) = (\frac{4}{\pi})^s D_{\mathbf{K}} \exp\left(k \sum_{w \in \mathcal{J}} n_w (c + c_w(n) + \epsilon)\right)$, s étant le nombre de places complexes de \mathbf{K} et $D_{\mathbf{K}}$ le discriminant de \mathbf{K} .

Posons $a_k = \delta_k a'_k$. On déduit de l'inégalité (5.5) que, pour tout $v \in \mathcal{J}$,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_k|_v}{k} < -c_v(n).$$

Par suite, la proposition 4.1 montre que pour tout $v \in \mathcal{J}$, la série $\sum_k a_{k,v} P_{k,v}(z)$ se prolonge en une fonction entière f_v satisfaisant :

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log |f_v|_R}{R^n} \leq \frac{\nu(\Gamma)}{ne}.$$

Posons alors $\alpha_v = \frac{\nu(\Gamma)}{ne}$, pour $v \in \mathcal{J}$. Notons f la fonction f_{v_0} .

D'autre part, pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$, posons :

$$\beta_v = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_{k,v}|}{k}$$

On déduit de l'estimation (3.1) que $\limsup_{\|x_k\| \rightarrow +\infty} \frac{\log |a_{k,v}|}{\|x_k\|^n} = \nu(\Gamma)\beta_v$.

Par ailleurs, on a : $\sigma_v(f(x_k)) = \sum_{i \leq k} a_{i,v} P_{i,v}(x_{k,v})$. Donc, on a :

$$|\sigma_v(f(x_k))| \leq \sum_{\substack{i \leq k \\ \|x_{k,v}\| \leq \|x_i\| + \delta}} |a_{i,v} P_{i,v}(x_{k,v})| + \sum_{\substack{i \leq k \\ \|x_i\| + \delta < \|x_{k,v}\|}} |a_{i,v} P_{i,v}(x_{k,v})|.$$

On majore les valeurs $|P_{i,v}(x_{k,v})|$ dans le premier terme de cette somme à l'aide de l'estimation (ii) de la proposition 3.1, en tenant compte de l'inégalité $\|x_i\| \leq \|x_k\|$ puis dans le second terme à l'aide de l'estimation (i) de la proposition 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} |\sigma_v(f(x_k))| &\leq \exp\left(\nu(\Gamma)c_v(n)\|x_k\|^n + o(\|x_k\|^n)\right) \sum_{\substack{i \leq k \\ \|x_{k,v}\| \leq \|x_i\| + \delta}} |a_{i,v}| \\ &+ \sum_{\substack{i \leq k \\ \|x_i\| + \delta < \|x_{k,v}\|}} |a_{i,v}| \exp\left(\nu(\Gamma)\|x_i\|^n (c_v(n) + \log \frac{\|x_{k,v}\|}{\|x_i\|}) + o(\|x_k\|^n)\right). \end{aligned}$$

Considérons la fonction définie sur l'intervalle $[0, \|x_{k,v}\|]$ par :

$$h_v(t) = t^n \left(\log\left(\frac{\|x_{k,v}\|}{t}\right) + c_v(n)\right).$$

Vu la remarque 3.1, on a : $c_v(n) \geq \frac{1}{n}$, donc $h'_v(t) \geq 0$, d'où :

$$h_v(t) \leq c_v(n) \|x_{k,v}\|^n.$$

On en déduit que pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$,

$$\limsup_{\|x_k\| \rightarrow +\infty} \frac{\log |\sigma_v(f)(x_k)|}{\|x_k\|^n} \leq \nu(\Gamma)(\beta_v + c_v(n)).$$

On déduit de l'inégalité (5.6) que

$$\text{card}(S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}) \times \max_{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}} (n_v \beta_v) \leq 2c + n_{\mathcal{J}}(c + \epsilon) + \sum_{w \in \mathcal{J}} n_w c_w(n).$$

Pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}$, posons : $\alpha_v = \nu(\Gamma)(\beta_v + c_v(n) + \epsilon)$.

Les nombres (α_v) satisfont alors la condition

$$e^{\frac{nr_{\mathcal{J}}}{(n-1)n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in \mathcal{J}} \alpha_v^{\frac{n_v}{n_{\mathcal{J}}}} \prod_{v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \mathcal{J}} e^{\frac{n n_v \alpha_v}{\nu(\Gamma) n_{\mathcal{J}}}} \leq C(\epsilon)$$

où $C(\epsilon) = \frac{\nu(\Gamma)}{ne} \exp\left(\frac{nr_{\mathcal{J}}}{(n-1)n_{\mathcal{J}}} + \frac{2nc}{n_{\mathcal{J}}} + nc + \frac{n}{n_{\mathcal{J}}} \sum_{v \in S_{\mathbf{K},\infty}} n_v c_v(n) + 2n\epsilon\right)$.

La fonction f n'est pas un polynôme car les coefficients a_k ne sont pas nuls. D'où le théorème 5.2.

On obtient le corollaire 1.5 à partir du théorème 5.1 en prenant $\mathcal{J} = \{v_0\}$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABLY & M. M'ZARI – « Interpolation polynômiale sur un ordre d'un corps de nombres », *Ramanujan J.* **17** (2008), p. 281–304.
- [2] A. I. BOREVICH & I. R. SHAFAREVICH – *Number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Academic Press, 1966.
- [3] J. DIEUDONNÉ – *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1968.
- [4] F. GRAMAIN – « Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond », *Invent. Math.* **63** (1981), p. 495–506.
- [5] ———, « Fonctions entières arithmétiques : un aperçu historique », *Publications I.R.M.A., Université de Lille 1* **6** (1984), p. 1–21.
- [6] F. GRAMAIN & M. MIGNOTTE – « Fonctions entières arithmétiques », in *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, Progr. Math., vol. 31, Birkhäuser, 1983, p. 99–124.
- [7] G. PÓLYA – « Über ganzwertige ganze Funktionen », *Rend. Circ. Math. Palermo* **40** (1915), p. 1–16.
- [8] P. STÄCKEL – « Über arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen », *Math. Annalen* **46** (1895), p. 513–520.
- [9] M. WALDSCHMIDT – *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math., vol. 402, Springer, 1974.
- [10] ———, « Pólya's theorem by Schneider's method », *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **31** (1978), p. 21–25.