BULLETIN DE LA S. M. F.

DAVID

Sur deux séries nouvelles qui expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 72-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__72_0>

Sur deux séries nouvelles qui expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné; par M. DAVID.

(Séance du 16 mars 1883.)

Ces séries sont les suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{4x^2}{1.2\pi^2} + \frac{4x^2(4x^2-2^2\pi^2)}{1.2.3.4\pi^4} \\ &\quad - \frac{4x^2(4x^2-2^2\pi^2)(4x^2-4^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6\pi^6} + \ldots, \\ \sin x &= \frac{2x}{\pi} - \frac{2x(4x^2-\pi^2)}{1.2.3\pi^3} + \frac{2x(4x^2-3^2\pi^2)}{1.2.3.4.5\pi^5} \\ &\quad - \frac{2x(4x^2-\pi^2)(4x^2-3^2\pi^2)(4x^2-5^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6.7\pi^7} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

Elles expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné x en mettant en évidence, dans les numérateurs de leurs termes, successivement, les racines des équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Pour une valeur de x comprise entre deux racines, les deux termes consécutifs correspondants ont le même signe; à partir de là les signes des termes ne changent plus, et ceux-ci vont en diminuant. Ces formules sont d'ailleurs convergentes, comme les formules connues, pour une valeur finie quelconque de x; et la convergence ne devient manifeste qu'à partir du moment où tous les termes ont le même signe.

Pour les démontrer, je pars des formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} e^{\pm m\alpha i} = e^{\pm\frac{(2k+1)m\pi}{2}i} \Bigg\{ & 1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2\alpha + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4\alpha - \ldots \\ & \mp \frac{i}{\sin\frac{m(2k+1)\pi}{2}}\left[\frac{m}{1}\cos\alpha - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\cos^3\alpha + \ldots\right]\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} e^{\pm m\alpha i} = e^{\pm mk\pi i} \Bigg\{ & 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2\alpha + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4\alpha - \ldots \\ & \pm \frac{i}{\cos mk\pi}\left[\frac{m}{1}\sin\alpha - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\sin^3\alpha + \ldots\right]\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

qui développent l'exponentielle en puissances des sinus ou cosinus de l'arc α; la première formule ayant lieu pour l'arc α compris entre les arcs limites $k\pi$ et $(k+1)\pi$; la seconde pour l'arc α compris entre les arcs limites $\frac{(2k-1)\pi}{2}$ et $\frac{(2k+1)\pi}{2}$; les signes supérieurs devant être pris ensemble, et de même pour les signes inférieurs; sous cette réserve, le nombre quelconque m, l'arc α et par suite le nombre entier k sont toujours positifs.

Leur démonstration est très simple.

Par exemple, pour la formule (1), on pose

$$x = \cos\alpha, \quad y = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

ce qui donne l'équation algébrique

$$y^2 - 2xy + 1 = 0,$$

laquelle fait connaître que les deux valeurs de y et leurs puissances sont développables en série par rapport aux puissances entières et croissantes de x, tant que le module de x est plus petit que 1. En posant ensuite $v = e^{m\alpha i} = y^m$, on forme l'équation différentielle

$$(x^2-1)\frac{d^2v}{dx^2} + x\frac{dv}{dx} - m^2 v = 0.$$

De là on déduit, en remplaçant x par sa valeur $x = \cos\alpha$,

$$v = A\left[1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2\alpha + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4\alpha + \ldots\right]$$
$$+ A_1\left[\frac{m}{1}\cos\alpha - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\cos^3\alpha + \ldots\right];$$

les constantes arbitraires A, A_1 se déterminent ensuite en donnant à α la valeur particulière $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, comprise entre les limites déterminées ci-dessus, savoir $k\pi$ et $(k+1)\pi$.

La démonstration de la formule (2) a lieu d'une manière analogue, en posant $x = \sin\alpha$, ce qui fournit l'équation algébrique

$$y^2 - 2ixy + 1 = 0,$$

pour déterminer les limites, et la même équation différentielle pour déterminer la série.

En séparant les imaginaires, on retrouve les quatre formules de Poinsot, pour exprimer le sinus et le cosinus d'un multiple de l'arc;

et il est clair que réciproquement celles-ci pourraient servir à remonter aux formules (1) et (2). Seulement, dans la marche que nous suivons, le nombre k est déterminé *a priori*, parce qu'on suppose que c'est l'arc α qui est donné, tandis qu'en supposant avec Poinsot que l'on donne $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$, l'arc et par suite le nombre k restent indéterminés.

Les formules (1) et (2) ne sont établies par là que pour les valeurs de α comprises entre les limites indiquées. Il y a lieu d'examiner si la convergence subsiste à ces limites, et c'est cet examen qui donne la démonstration des deux séries (A) dont il s'agit. Il suffit de considérer la formule (1), attendu que la formule (2) conduit aux mêmes résultats.

Les limites sont données par $\alpha = k\pi$ et $\alpha = (k+1)\pi$; en faisant cette substitution, on a les deux séries

$$G = 1 - \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$H = \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + \ldots,$$

dont la convergence n'est pas démontrée; et par suite on ne peut affirmer l'existence des deux formules

$$(3)\qquad \begin{cases} e^{mk\pi i} = e^{\frac{(2k+1)m\pi}{2}}(G \mp iH), \\ e^{m(k+1)\pi i} = e^{\frac{(2k+1)m\pi}{2}}(G \pm iH), \end{cases}$$

déduites de (1), les signes supérieurs étant relatifs au cas de k pair et les signes inférieurs au cas de k impair.

Les séries G et H rentrent précisément dans la catégorie de celles pour lesquelles le rapport $\frac{u_n+1}{u_n}$ de deux termes consécutifs est égal à l'unité pour une valeur de n infiniment grande. Si l'on considère la série G, on a

$$\frac{u_n+1}{u_n} = -\frac{m^2-2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+4)} = \frac{n^2+2n+1-\frac{m^2}{4}}{n^2+\frac{7}{2}n+3}.$$

La règle de Gauss est applicable, puisque tous les termes de la série finissent par avoir le même signe. On voit alors que $2-\frac{7}{2}+1$

est négatif, d'où l'on conclut que la série est convergente. En ce qui concerne la série H, on a de même

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{m^2-(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n^2+n+\dfrac{1-m^2}{4}}{n^2+\dfrac{5}{2}n+\dfrac{3}{2}};$$

en considérant encore les coefficients de n, on reconnaît que $1-\frac{5}{2}+1$ est négatif, et par suite il y a toujours convergence.

Ceci posé, les équations (3) déterminent les séries G et H, et l'on en tire les deux formules

$$\cos\frac{m\pi}{2} = 1 - \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\sin\frac{m\pi}{2} = \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + \ldots,$$

qui deviennent les formules (A), en remplaçant m par $\frac{2x}{\pi}$, ce qui est permis, le nombre m ne comportant aucune restriction.

En remplaçant m par $2n$ et $2n+1$, n nombre entier, on a les identités et les séries numériques suivantes, qu'il convient peut-être de noter :

$$\pm 1 = 1 - \frac{4n^2}{1.2} + \frac{4n^2(4n^2-2^2)}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots[4n^2-4(n-1)^2]}{1.2.3\ldots 2n};$$

$$\pm 1 = \frac{2n+1}{1} - \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1]}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1]\ldots[(2n+1)^2-(2n-1)^2]}{1.2.3\ldots(2n+1)};$$

les signes supérieurs de ces deux formules étant relatifs au cas où n est pair et les signes inférieurs à celui où n est impair :

$$1 - \frac{(2n+1)^2}{1.2} + \frac{(2n+1)^2[(2n+1)^2-2^2)]}{1.2.3.4} - \ldots = 0,$$

$$\frac{2n}{1} - \frac{2n(4n^2-1)}{1.2.3} + \frac{2n(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} - \ldots = 0.$$

Les séries qui forment le premier membre sont identiquement nulles.