BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. LUCAS

Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt, sur les nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 69-71

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__69_1>

Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt, sur les nombres de Bernoulli; par M. Édouard Lucas.

(Séance du 6 avril 1883.)

Clausen et Staudt ont découvert en même temps sur les nombres de Bernoulli un théorème fort remarquable que l'on peut énoncer ainsi : *On a pour les nombres de Bernoulli l'expression*

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \cdots - \frac{1}{\lambda},$$

dans laquelle $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *désignent des nombres entiers, et* $2, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *tous les nombres premiers qui surpassent de l'unité tous les diviseurs de n.* Nous donnerons de ce théorème une démonstration directe qui repose, d'une part, sur la méthode de sommation des puissances que l'on doit à Fermat et, d'autre part, sur les théorèmes de Fermat et de Wilson. Posons

$$X_p = x(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1),$$

et désignons par Γ_p^q la somme des p premiers nombres pris q à q,

nous aurons

$$x^p + \Gamma^1_{p-1}\, x^{p-1} + \Gamma^2_{p-1}\, x^{p-2} + \ldots + \Gamma^{p-1}_{p-1}\, x = X_p;$$

si l'on remplace successivement p par $1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient n équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$x^{n-1},\quad x^{n-2},\quad x^{n-3},\quad \ldots,\quad x,\quad 1.$$

En développant leur déterminant, suivant les éléments de la dernière colonne, on a

$$(1)\qquad x^n = X_n + \Delta_1 X_{n-1} + \ldots + \Delta_{n-p+1} X_{p-1} + \ldots + \Delta_{n-1} X_1,$$

après avoir posé

$$(-1)^{n-p+1}\Delta_{n-p+1} = \begin{vmatrix} \Gamma^1_{n-1} & \Gamma^2_{n-1} & \Gamma^3_{n-1} & \ldots & \Gamma^{n-p+1}_{n-1} \\ 1 & \Gamma^1_{n-2} & \Gamma^2_{n-2} & \ldots & \Gamma^{n-p}_{n-2} \\ 0 & 1 & \Gamma^1_{n-3} & \ldots & \Gamma^{n-p-1}_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Gamma^1_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'après la théorie des combinaisons,

$$\Gamma^r_q = \Gamma^{r-1}_{q-1} + q\,\Gamma^{r-2}_{q-1};$$

par conséquent, si l'on retranche respectivement des éléments de la première ligne ceux de la deuxième multipliés par $n-1$, de la deuxième ceux de la troisième multipliés par $n-2$, etc., on pourra ramener tous les indices inférieurs de Γ à $p-1$. Donc

$$(-1)^{n-p+1}\Delta_{n-p+1} = \begin{vmatrix} \Gamma^1_{p-1} & \Gamma^2_{p-1} & \Gamma^3_{p-1} & \ldots & \Gamma^{n-p+1}_{p-1} \\ 1 & \Gamma^1_{p-1} & \Gamma^2_{p-1} & \ldots & \Gamma^{n-p}_{p-1} \\ 0 & 1 & \Gamma^1_{p-1} & \ldots & \Gamma^{n-p-1}_{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Gamma^1_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, désignons par p un nombre premier impair; la congruence

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) + 1 - x^{p-1} \equiv 0,\quad (\mathrm{mod.}\, p),$$

de degré $p-2$, étant vérifiée par $p-1$ valeurs non congrues de x, savoir : $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$, est identique; par suite,

$$\Gamma^1_{p-1} \equiv 0,\quad \Gamma^2_{p-1} \equiv 0,\quad \Gamma^3_{p-1} \equiv 0,\quad \ldots,\quad \Gamma^{p-1}_{p-1} \equiv -1,$$

et, d'ailleurs, Γ_{p-1}^{q} est nul pour $q > p-1$. En portant ces résultats dans l'expression de Δ_{n-p+1}, on obtient un déterminant dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de deux lignes obliques parallèles à la diagonale principale, dont l'une a tous ses éléments égaux à $+1$, et l'autre à -1. On voit très simplement que ce déterminant est égal à 1 ou à 0, suivant que le nombre des colonnes $n-(p-1)$ du déterminant est ou n'est pas multiple de $p-1$.

Par suite,

$$\Delta_{n-p+1} \equiv 1 \text{ ou } \equiv 0, \pmod{p},$$

suivant que $p-1$ est ou n'est pas diviseur de n.

Mais si, dans la formule (1), on remplace x par $1, 2, 3, \ldots, x$, et si l'on fait la somme S_n, on obtient par la méthode de Fermat

$$S_n = \frac{X_{n+1}}{n+1} + \Delta_1 \frac{X_n}{n} + \ldots + \Delta_{n-q+1} \frac{X_q}{q} + \ldots + \Delta_{n-1} \frac{X_2}{2}$$

En prenant avec Bernoulli (*Ars conjectandi*) le coefficient de x dans S_n, on a pour le nombre de Bernoulli l'expression

$$B_n = \frac{1.2.3\ldots n}{n+1} + \ldots + \Delta_{n-q+1} \frac{\Gamma_{q-1}^{q-1}}{q} + \ldots + \Delta_{n-1} \frac{1}{2}.$$

En laissant de côté les dénominateurs 2 et 4, que l'on traite immédiatement, on voit qu'en supprimant les entiers la fraction

$$\Delta_{n-q+1} \frac{\Gamma_{q-1}^{q-1}}{q}$$

se réduit : 1° à zéro, pour q composé, puisque $1.2.3\ldots(q-2)$ est divisible par q; 2° à zéro, pour q premier, lorsque $q-1$ n'est pas un diviseur de n; 3° à $\frac{-1}{p}$, pour q égal à un nombre premier p impair tel que $p-1$ divise n, puisque alors

$$\Delta_{n-p+1} \equiv 1, \quad \Gamma_{p-1}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$