

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **FAISCEAUX $l$ -ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX**

**Weizhe Zheng**

**Tome 136**

**Fascicule 3**

**2008**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique  
pages 465-503

## SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX $l$ -ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX

PAR WEIZHE ZHENG

---

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement des faisceaux  $l$ -adiques entiers sur les schémas de type fini sur un corps local par les six opérations et le foncteur des cycles proches.

ABSTRACT (*On the cohomology of integral  $l$ -adic sheaves over local fields*)

We study the behavior of integral  $l$ -adic sheaves on schemes of finite type over a local field under the six operations and the nearby cycle functor.

### 1. Introduction

Soient  $R$  un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ ,  $K$  son corps des fractions. Un tel corps sera appelé *corps local*. Soit  $\eta = \text{Spec } K$ .

Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ . On désigne par  $|X|$  l'ensemble de ses points fermés. Pour  $x \in |X|$ , le corps résiduel  $\kappa(x)$  de  $X$  en  $x$  est une extension finie de  $K$ . On note  $R_x$  son anneau des entiers,  $x_0$  le point fermé de  $\text{Spec } R_x$ . Soient  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$  au-dessus de  $x$  de corps résiduel  $\kappa(\bar{x})$  une clôture séparable de  $\kappa(x)$ ,  $R_{\bar{x}}$  la normalisation de  $R_x$  dans  $\kappa(\bar{x})$ ,  $\bar{x}_0$  le point

---

*Texte reçu le 12 mars 2007, révisé le 4 septembre 2007*

WEIZHE ZHENG, Université Paris-Sud 11, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France. • *E-mail* : [weizhe.zheng@math.u-psud.fr](mailto:weizhe.zheng@math.u-psud.fr)

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14G20, 11G25, 14D05.

Mots clefs. — Intégralité, cohomologie  $l$ -adique, cycles proches.

fermé de  $\text{Spec } R_{\bar{x}}$ . Soit  $F_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0))$  le Frobenius géométrique qui envoie  $a$  sur  $a^{1/q}$ , où  $q = \#\kappa(x_0)$ .

Fixons un nombre premier  $l \neq p$ . On désigne par  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_l$ . Soit  $\mathcal{F}$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau sur  $X$ . D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres d'un relèvement  $\Phi_x \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$  de  $F_x$  agissant sur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité [5, 1.7.4].

Rappelons qu'on dit que  $\mathcal{F}$  est *entier* [7, 0.1] si les valeurs propres de  $\Phi_x$  sont des entiers algébriques pour tout  $x \in |X|$ . Cette intégralité est stable par image directe à support propre [*ibid.*, 0.2]. La démonstration utilise l'analogie de ce résultat sur un corps fini [22, XXI 5.2.2].

L'objet de cet article est d'étudier, plus généralement, le comportement de l'intégralité par les foncteurs usuels : les six opérations et le foncteur des cycles proches. De façon plus précise, on examine le comportement par ces foncteurs de la divisibilité des valeurs propres des  $\Phi_x$  par des puissances de  $q$ . On introduit pour cela une mesure de la  $q$ -divisibilité inspirée des « jauges » de Mazur-Ogus. On prouve notamment les résultats espérés dans [13, 5.5].

Dans un travail ultérieur [19], on examine le comportement de la rationalité et de l'indépendance de  $l$  par les mêmes opérations.

Les résultats concernant les six opérations sont exposés au § 2. Au § 3 on traite le cas crucial de  $Rj_*\mathcal{F}$ , pour l'inclusion  $j : U \rightarrow X$  du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux  $D$  dans un schéma  $X$  lisse sur  $\eta$  et d'un faisceau  $\mathcal{F}$  lisse sur  $U$  et modérément ramifié le long de  $D$ . Les démonstrations des résultats du § 2 sont données au § 4. L'ingrédient essentiel est un théorème de de Jong, grâce auquel on se réduit au cas traité au § 3 par les techniques usuelles de descente cohomologique. Le résultat principal du § 5 est la stabilité de l'intégralité par le foncteur des cycles proches  $R\Psi$ . À nouveau, l'ingrédient clé est un théorème de de Jong, qui permet de se ramener au cas d'un couple strictement semi-stable et d'un faisceau lisse sur le complémentaire du diviseur  $D$  réunion de la fibre spéciale et des composantes horizontales et modérément ramifié le long de  $D$ . L'étude de ce cas, plus délicate qu'on ne pouvait s'y attendre, repose sur une compatibilité technique (5.6 (ii)) généralisant [11, 1.5 (a)]. Au § 6 on généralise la notion d'intégralité aux champs algébriques.

Je remercie chaleureusement L. Illusie pour m'avoir suggéré ce sujet, pour son aide à la composition de cet article, et pour sa lecture minutieuse des diverses versions du manuscrit. Je suis reconnaissant à G. Laumon pour une simplification de la démonstration de 5.6 (ii). Je remercie également O. Gabber, F. Orgogozo et le rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

## 2. Intégralité et six opérations

On conserve les notations du § 1. On désigne par  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $r \in \mathbb{Q}$ , on note  $q^r$  l'unique élément de  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{>0}$  vérifiant  $(q^r)^b = q^a$ , où  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont tel que  $r = \frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ . Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ .

DÉFINITION 2.1. — Fixons un plongement  $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ . On dit qu'un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) si pour tout point fermé  $x$  de  $X$ , et toute valeur propre  $\alpha$  de  $\Phi_x$  agissant sur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ,  $\alpha/\iota(q^r)$  (resp.  $\iota(q^r)/\alpha$ ) est entier sur  $\mathbb{Z}$ , où  $q = \#\kappa(x_0)$ . Cette définition ne dépend pas des choix de  $\Phi_x$  et de  $\iota$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est entier (resp. entier inverse) s'il est 0-entier (resp. 0-entier inverse).

Les  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux entiers (resp.  $r$ -entiers, resp. entiers inverses, resp.  $r$ -entiers inverses) sur  $X$  forment une sous-catégorie épaisse [9, 1.11] de  $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ , notée  $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}}$

(resp.  $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}}$ , resp.  $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}^{-1}}$ , resp.  $\text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}^{-1}}$ ).

Soient  $K'$  une extension finie de  $K$ ,  $Z$  un schéma de type fini sur  $K'$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Z, \overline{\mathbb{Q}_l})$ . Alors  $\mathcal{G}$  est  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) relativement à  $K'$  si et seulement s'il est  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) relativement à  $K$ .

Rappelons que pour les schémas  $X$  séparés de type fini sur un schéma  $S$  régulier de dimension  $\leq 1$ , et en particulier sur  $\eta$ , on dispose, par [6, § 6], d'une catégorie triangulée  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$  et d'un formalisme de six opérations :  $Rf_*$ ,  $Rf_!$ ,  $f^*$ ,  $Rf^!$ ,  $\otimes$ ,  $R\text{Hom}$ . La catégorie  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$  est la 2-limite inductive des catégories  $D_c^b(X, E_\lambda)$ , où  $E_\lambda$  parcourt les extensions finies de  $\mathbb{Q}_l$  contenues dans  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ . Si  $\mathcal{O}_\lambda$  est l'anneau des entiers de  $E_\lambda$ ,  $D_c^b(X, E_\lambda)$  est déduite de la catégorie  $D_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$  définie dans [ibid.] par extension des scalaires de  $\mathcal{O}_\lambda$  à  $E_\lambda$ . Le formalisme construit dans [ibid.] pour  $D_c^b(-, \mathcal{O}_\lambda)$  se transpose trivialement.

Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur  $S$  (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ( $Rf_!$  et  $Rf^!$ ) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. Pour un formalisme sans hypothèse de séparation, voir l'appendice (§ 6).

La définition qui suit est inspirée de la notion des « jauges » de Mazur-Ogus [2, 8.7].

DÉFINITION 2.2. — Soit  $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  une fonction. On dit qu'un objet  $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$  est entier (resp.  $\epsilon$ -entier, resp. entier inverse, resp.  $\epsilon$ -entier inverse) si pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^i(K)$  est entier (resp.  $\epsilon(i)$ -entier, resp. entier inverse, resp.  $\epsilon(i)$ -entier inverse).

On désigne la sous-catégorie pleine de  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  formée des objets entiers (resp.  $\epsilon$ -entiers, resp. entiers inverses, resp.  $\epsilon$ -entiers inverses) par

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} \text{ (resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}, \text{ resp. } D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}).$$

Lorsque  $\epsilon$  est constant,  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}}$  et  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$  sont des sous-catégories triangulées. On abrège parfois  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  en  $D_c^b(X)$ .

On note  $I$  la fonction d'inclusion de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q}$ .

2.3. — Soient  $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ .

Pour  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$ , on a

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

Pour  $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1)\text{-ent}}$ ,  $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_2)\text{-ent}}$ , on a

$$K \otimes L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(rI+r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

De même pour « entier inverse ».

Pour  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}^{-1}}$  lisse,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}}$ , on a

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}}.$$

Pour  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_1\text{-ent}}$  lisse,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{r_2\text{-ent}^{-1}}$ , on a

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(r_2-r_1)\text{-ent}^{-1}}.$$

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas de type fini sur  $\eta$ . Alors  $f^*$  préserve les complexes  $\epsilon$ -entiers (resp.  $\epsilon$ -entiers inverses).

**THÉORÈME 2.4.** — *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de schémas de type fini sur  $\eta$ ,  $\mathcal{F}$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau entier (resp. entier inverse) sur  $X$ . Alors pour tout point fermé  $y$  de  $Y$ ,  $(Rf_! \mathcal{F})_y$  est entier et  $(I - n)$ -entier (resp.  $I$ -entier inverse et  $n$ -entier inverse), où  $n = \dim(f^{-1}(y))$ . En particulier,  $Rf_!$  induit*

$$(2.4.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.4.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(2.4.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.4.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_r\text{-ent}^{-1}},$$

où  $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$  est la dimension relative.

Le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est un théorème de Deligne-Esnault [7, 0.2].

THÉORÈME 2.5. — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de schémas de type fini sur  $\eta$ ,  $d_X = \dim X$ . Alors  $Rf_*$  induit

$$(2.5.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{\text{ent}},$$

$$(2.5.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}},$$

$$(2.5.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.5.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

Sans hypothèse de séparation de  $f$ , (2.5.1), (2.5.3) et (2.5.4) sont encore vrais.

L'hypothèse de séparation est également superflue pour (2.5.2). On peut l'éliminer ou bien en étudiant la  $q$ -divisibilité en dehors d'un sous-schéma de dimension fixée, ou bien en utilisant une théorie de  $Rf_!$  sans hypothèse de séparation (voir 6.5).

THÉORÈME 2.6. — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de schémas de type fini sur  $\eta$ ,  $d_Y = \dim Y$ ,  $d_r = \max_{y \in |Y|} \dim f^{-1}(y)$ . Alors  $Rf^!$  induit

$$(2.6.1) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{-d_r\text{-ent}},$$

$$(2.6.2) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}},$$

$$(2.6.3) \quad D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_r)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.6.4) \quad D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}.$$

Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $a_X : X \rightarrow \eta$ . Rappelons que  $Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l$  est globalement défini (pas de problème dans le cas séparé, dans le cas général par [1, 3.2.4]). On pose  $D_X = R\mathcal{H}om(-, Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l)$ .

THÉORÈME 2.7. — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $d_X = \dim X$ . Alors  $D_X$  induit

$$(2.7.1) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}},$$

$$(2.7.2) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{I\text{-ent}},$$

$$(2.7.3) \quad D_c^b(X)_{I\text{-ent}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}},$$

$$(2.7.4) \quad D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}.$$

De plus, pour  $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}^{-1}}$ ,  $\mathcal{H}^a(DK)$  est  $(a + 1)$ -entier,  $-d_X \leq a \leq -1$ .

THÉORÈME 2.8. — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $d_X = \dim X$ . Alors  $R\mathcal{H}om_X(-, -)$  induit

$$\begin{aligned}
 (2.8.1) \quad & D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{\text{ent}}, \\
 (2.8.2) \quad & D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^b(X)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\
 (2.8.3) \quad & D_c^b(X)_{I\text{-ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}, \\
 (2.8.4) \quad & D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.
 \end{aligned}$$

### 3. Diviseurs à croisements normaux

PROPOSITION 3.1. — Soient  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme fini de schémas de type fini sur  $\eta$ ,  $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . Alors  $g_*L$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse) si et seulement si  $L$  l'est.

Démonstration. — On peut supposer que  $Y$  est réduit à un seul point  $y$ ,  $X$  est réduit à un seul point  $x$  et  $L = \mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . Soient  $G_y = \text{Gal}(\kappa(\overline{y})/\kappa(y))$ ,  $G_x = \text{Gal}(\kappa(\overline{x})/\kappa(x))$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  correspond à une représentation  $\rho : G_x \rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\overline{x}})$ . Soient  $K'$  une extension finie quasi-galoisienne (i. e., normale) de  $\kappa(y)$  contenant  $\kappa(x)$ ,  $x' = \text{Spec } K'$ . Pour  $s \in G_y$ , soit  $\mathcal{F}_s$  le faisceau sur  $x'$  correspondant à la représentation

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\kappa(\overline{x'})/K') &\rightarrow \text{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\mathcal{F}_{\overline{x}}) \\
 h &\mapsto \rho(s^{-1}hs).
 \end{aligned}$$

Ce faisceau ne dépend, à isomorphisme près, que de l'image de  $s$  dans  $G_y/G_x$ . D'après la formule de Mackey ([18, 7.3]), on a  $(g_*\mathcal{F})_{x'} \simeq \bigoplus_s \mathcal{F}_s$ , où  $s$  parcourt un système de représentants de  $G_y/G_x$ . Donc

$$\begin{aligned}
 g_*\mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} &\Leftrightarrow (g_*\mathcal{F})_{x'} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier} \\
 &\Leftrightarrow \text{les } \mathcal{F}_s \text{ sont } \epsilon(0)\text{-entiers} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est } \epsilon(0)\text{-entier.}
 \end{aligned}$$

De même pour le cas entier inverse. □

Soient, en 3.2 et 3.3,  $K$  un corps quelconque,  $\eta = \text{Spec } K$ .

On va utiliser le cas spécial suivant du théorème de pureté de Gabber [8].

PROPOSITION 3.2. — Soient  $n$  un entier inversible sur  $\eta$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Soit  $i : Y \rightarrow X$  une immersion fermée de schémas réguliers de type fini sur  $\eta$  purement de codimension  $c$ . Alors  $Ri^!\Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$ .

Gabber a remarqué que ce résultat découle facilement du théorème de pureté relative [21, XVI 3.7]. En effet,  $i$  provient par changement de base d'une immersion fermée  $i_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  de schémas de type fini sur  $K_1$ , où  $K_1$  est un sous-corps de  $K$ , extension de type fini d'un corps premier  $K_0$ . Alors  $\text{Spec } K_1$  est le point générique d'un schéma  $S_1$  intègre de type fini sur  $K_0$ . Quitte à remplacer  $S_1$  par un ouvert, on peut supposer que  $i_1$  est la fibre générique d'une immersion fermée  $i_2 : Y_2 \rightarrow X_2$  de schémas de type fini sur  $S_1$ . Comme  $X_1$  (resp.  $Y_1$ ) est un schéma régulier ([10, 6.5.2 (i)]) et que  $X_2$  (resp.  $Y_2$ ) est de type fini sur  $K_0$ , donc en particulier, excellent, quitte à remplacer  $X_2$  et  $Y_2$  par des voisinages ouverts de leurs fibres génériques, on peut supposer que  $X_2$  et  $Y_2$  sont réguliers (donc lisses sur  $K_0$ ) et  $i_2$  est purement de codimension  $c$ . D'après le théorème de pureté relative,  $Ri_2^! \Lambda \simeq \Lambda(-c)[-2c]$ . On conclut par passage à la limite.  $\square$

Le lemme suivant est décalqué de [22, XXI 5.2.1].

LEMME 3.3. — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $a_X : X \rightarrow \eta$ ,  $l$  un nombre premier inversible sur  $\eta$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ .

(i) Il existe une partie fermée  $Y$  de dimension 0 de  $X$  telle que  $a_{X*} \mathcal{G} \rightarrow a_{Y*}(\mathcal{G}|Y)$  soit injectif, où  $a_Y : Y \rightarrow \eta$ .

(ii) Si  $X$  est séparé de dimension  $n$ , et si  $U$  est un ouvert de  $X$  dont le complémentaire  $Z$  est de dimension  $< n$ , alors il existe une partie fermée  $Y$  de  $U$  de dimension 0 et une flèche surjective  $a_{Y*}(\mathcal{G}|Y)(-n) \rightarrow R^{2n} a_{X!} \mathcal{G}$ , où  $a_Y : Y \rightarrow \eta$ .

Démonstration. — (i) est évident.

(ii) Quitte à remplacer  $X$  par  $X_{\text{red}}$  et à rétrécir  $U$ , on peut supposer  $U$  régulier purement de dimension  $n$  et  $\mathcal{G}|U$  lisse. Puisque  $\dim Z < n$ , on a

$$0 = R^{2n-1} a_{Z!}(\mathcal{G}|Z) \rightarrow R^{2n} a_{U!}(\mathcal{G}|U) \xrightarrow{\sim} R^{2n} a_{X!} \mathcal{G} \rightarrow R^{2n} a_{Z!}(\mathcal{G}|Z) = 0,$$

où  $a_Z : Z \rightarrow \eta$ . Donc on peut supposer  $X = U$ . Appliquant (i) à  $\check{\mathcal{G}} = \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ , on trouve une partie fermée  $Y$  de  $U$  de dimension 0 telle que  $a_{U*} \check{\mathcal{G}} \rightarrow a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)$  soit injectif, donc  $D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)) \rightarrow D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}})$  surjectif. Par le théorème de pureté 3.2, on a

$$D_\eta(a_{Y*}(\check{\mathcal{G}}|Y)) \simeq a_{Y*}(D_Y(\check{\mathcal{G}}|Y)) \simeq a_{Y*}(\mathcal{G}|Y),$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} D_\eta(a_{U*} \check{\mathcal{G}}) &= \mathcal{H}^0(D_\eta Ra_{U*} \check{\mathcal{G}}) \simeq \mathcal{H}^0(Ra_{U!} D_U \check{\mathcal{G}}) \\ &\simeq \mathcal{H}^0(Ra_{U!} \mathcal{G}(n)[2n]) = R^{2n} a_{U!} \mathcal{G}(n). \end{aligned}$$

D'où le résultat.  $\square$

On reprend les notations du § 1.

COROLLAIRE 3.4. — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $a_X : X \rightarrow \eta$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse).

(i)  $a_{X*}\mathcal{G}$  est entier (resp. entier inverse).

(ii) Si  $X$  est séparé de dimension  $n$ , alors  $a_{X!}\mathcal{G}$  est entier (resp. entier inverse),  $R^{2n}a_{X!}\mathcal{G}$  est  $n$ -entier (resp.  $n$ -entier inverse).

La proposition suivante est décalqué de [22, XXI 5.3 (a)].

PROPOSITION 3.5. — Soient  $j : X \hookrightarrow Y$  une immersion ouverte de schémas de type fini sur  $\eta$  de dimension 1,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier. Alors  $j_*\mathcal{G}$  est entier.

Démonstration. — On se ramène au cas  $Y$  affine, puis  $Y$  projectif.

Définissons  $\mathcal{H}$  par la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_!\mathcal{G} \rightarrow j_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte

$$a_{X*}\mathcal{G} \rightarrow a_{Y*}\mathcal{H} \rightarrow R^1a_{X!}\mathcal{G},$$

où  $a_X : X \rightarrow \eta$ ,  $a_Y : Y \rightarrow \eta$ . D'après 3.4 (i),  $a_{X*}\mathcal{G}$  est entier. D'après le théorème de Deligne-Esnault (2.4.1),  $R^1a_{X!}\mathcal{G}$  est entier. Donc  $a_{Y*}\mathcal{H}$  l'est aussi. Mais  $\mathcal{H}$  est à supports dans une partie fermée de dimension 0 de  $Y$ , donc  $\mathcal{H}$  est entier. □

PROPOSITION 3.6. — Soient  $X$  un schéma régulier de type fini sur  $\eta$  de dimension 1,  $D$  un diviseur positif régulier. Posons  $U = X - D$ ,  $j : U \hookrightarrow X$ . Soit  $\mathcal{G}$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur  $U$ , entier, modérément ramifié sur  $X$ . Alors  $Rj_*\mathcal{G}$  est  $I$ -entier.

Démonstration. — La question est locale sur  $X$ . Soit  $x \in |D|$ . Montrons que  $(Rj_*\mathcal{G})_x$  est  $I$ -entier.

On a  $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ , où  $E$  est un corps extension finie de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ,  $\mathcal{O}$  son anneau des entiers,  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  un  $\mathcal{O}$ -faisceau lisse (constructible) sur  $U$ . En vertu du lemme d'Abhyankar [20, XIII 5.2], il existe, au voisinage de  $x$ , un revêtement fini  $g : \widetilde{X} \rightarrow X$  de la forme  $\widetilde{X} = X[T]/(T^n - t)$  où  $t$  est une équation locale de  $x$ ,  $n$  est un entier premier à l'exposant caractéristique de  $K$ , tel que  $(g|U)^*(\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O}))$  se prolonge en un faisceau localement constant sur  $\widetilde{X}$ . Comme  $\mathcal{G}$  est facteur direct de  $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$ , on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau  $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$ . Comme  $g^{-1}(D)_{\text{red}}$  est un diviseur régulier, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau  $\mathcal{G}$  tel que  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$  se prolonge en un faisceau localement constant sur  $X$ , puis au cas  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$  constant par la formule de projection.

Soient  $X_{(x)}$  le hensélisé de  $X$  en  $x$ ,  $U_{(x)} = X_{(x)} \times_X U$ ,  $j_{(x)} : U_{(x)} \hookrightarrow X_{(x)}$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{G}|_{U_{(x)}}$ . Alors  $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ , avec  $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/l^2\mathcal{O})$  constant. On a

$(Rj_{(x)*}\mathcal{H})_x = (Rj_*\mathcal{G})_x \in D_c^b(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . D'après 3.5,  $(j_{(x)*}\mathcal{H})_x = (j_*\mathcal{G})_x$  est entier. Il reste à montrer que  $(R^1j_{(x)*}\mathcal{H})_x$  est 1-entier.

On a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow \hat{Z}'(1) \rightarrow G \rightarrow \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)) \rightarrow 1,$$

où  $\hat{Z}'(1) = \prod_{p' \neq \text{car}(K)} \mathbb{Z}_{p'}(1)$ ,  $G = \pi_1^{\text{mod}}(U_{(x)})$ . Le faisceau  $\mathcal{H}$  correspond à une représentation  $l$ -adique de  $G$ . D'après le théorème de monodromie locale, la restriction de cette représentation à  $\hat{Z}'(1)$  est quasi-unipotente, donc unipotente. On obtient une filtration  $M$  finie, croissante de  $\mathcal{H}$ , telle que chaque  $\text{gr}_a^M \mathcal{H}$  se prolonge en un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse  $\mathcal{G}_a$  sur  $X_{(x)}$ .

Montrons que  $(R^1j_{(x)*}M_a)_x$  est 1-entier par récurrence sur  $a$ , ce qui achèvera la démonstration de la proposition. L'assertion est claire pour  $a \ll 0$ . Supposons l'assertion établie pour  $a - 1$ . La suite exacte courte

$$0 \rightarrow M_{a-1} \rightarrow M_a \rightarrow \mathcal{G}_a|_{U_{(x)}} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Rj_{(x)*}M_{a-1} \rightarrow Rj_{(x)*}M_a \rightarrow Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U_{(x)}}) \rightarrow .$$

D'après une formule de projection,  $Rj_{(x)*}(\mathcal{G}_a|_{U_{(x)}}) \simeq Rj_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{G}_a$ . On a

$$(R^qj_{(x)*}\overline{\mathbb{Q}}_l)_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l(-q) & \text{si } q = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc on a la suite exacte

$$(j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x \rightarrow (R^1j_{(x)*}M_{a-1})_x \rightarrow (R^1j_{(x)*}M_a)_x \rightarrow (\mathcal{G}_a)_x(-1).$$

Ici  $(j_{(x)*}M_a)_x$  est un sous-faisceau de  $(j_{(x)*}\mathcal{H})_x$ , donc entier. Par hypothèse de récurrence,  $(R^1j_{(x)*}M_{a-1})_x$  est 1-entier. Donc  $(\mathcal{G}_a)_x$  est entier,  $(\mathcal{G}_a)_x(-1)$  est 1-entier. On en déduit que  $(R^1j_{(x)*}M_a)_x$  est 1-entier.  $\square$

Le lemme suivant est une variante de [22, XXI 5.6.2].

LEMME 3.7. — Soient  $X$  un schéma noethérien régulier,  $D = \sum_{i \in I} D_i$  un diviseur strictement à croisements normaux de  $X$  avec  $(D_i)_{i \in I}$  une famille finie de diviseurs réguliers,  $U = X - D$ ,  $n$  un entier inversible sur  $X$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$  localement constant, modérément ramifié sur  $X$ .

(i) Soient  $i \in I$ ,  $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$ ,  $D_{i,U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$ , d'où un diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_{i,U_{(i)}} & \xrightarrow{j'_{(i)}} & D_i \\ \downarrow \iota'_i & & \downarrow \iota_i \\ U & \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} \xrightarrow{j_{(i)}} X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base

$$(3.7.1) \quad \iota_i^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

est un isomorphisme et les faisceaux

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \mathcal{G}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

sont localement constants, modérément ramifiés sur  $D_i$ .

(ii) Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas réguliers noethériens. Supposons que  $f^{-1}(D)$  soit un diviseur à croisements normaux et que  $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$  soit une famille de diviseurs réguliers. Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y_U \subset & \xrightarrow{j_Y} & Y \\ \downarrow f_U & & \downarrow f \\ U \subset & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Alors le morphisme de changement de base  $f^* Rj_* \mathcal{G} \rightarrow Rj_{Y*} f_U^* \mathcal{G}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* — La question est locale sur  $X$ . Soit  $x$  un point de  $X$ . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de  $x$ , un revêtement fini  $g : \tilde{X} \rightarrow X$  de la forme  $\tilde{X} = X[T_1, \dots, T_r] / (T_1^{n_1} - t_1, \dots, T_r^{n_r} - t_r)$  où les  $t_i$  sont des équations locales des composantes de  $D$  passant par  $x$ , et  $n_i$  des entiers premiers à l'exposant caractéristique de  $\kappa(x)$ , tel que  $(g|U)^* \mathcal{G}$  se prolonge en un faisceau localement constant sur  $\tilde{X}$ . Comme  $\mathcal{G}$  s'injecte dans  $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$  et le quotient  $\mathcal{G}_1$  est modérément ramifié sur  $X$ , on peut itérer cette construction. Pour tout  $N \geq 1$ , on obtient, quitte à rétrécir  $X$ , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^* \mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau  $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$ . Comme  $g^{-1}(D)_{\text{red}} = \sum_{i \in I} g^{-1}(D_i)_{\text{red}}$  est un diviseur à croisements normaux avec  $(g^{-1}(D_i)_{\text{red}})_{i \in I}$  une famille de diviseurs réguliers, on peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau  $\mathcal{G}$  qui se prolonge en un faisceau localement constant sur  $X$ , puis au cas  $\mathcal{G} = \Lambda_U$  par la formule de projection.

Le point (ii) résulte alors de [8, § 8] et de la functorialité des classes des diviseurs [4, Th. finitude, 2.1.1].

Pour (i), notons que  $D_{i,U(i)}$  est un diviseur régulier de  $U(i)$ , de complémentaire  $U$ . Pour tout  $q$ ,

$$\iota_i'^* R^q j_*^{(i)} \Lambda_U \simeq \begin{cases} \Lambda_{D_i, U(i)} & \text{si } q = 0, \\ \Lambda_{D_i, U(i)}(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est localement constant, modérément ramifié sur  $D_i$ . On a donc un triangle distingué

$$\iota'_{i*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Le morphisme (3.7.1) est un isomorphisme car le morphisme de changement de base  $\iota'_i Rj_{(i)*} \rightarrow Rj'_{(i)*} \iota'^{*}_i$  induit des isomorphismes sur  $\Lambda_{U_{(i)}}$  en vertu de (ii) et trivialement sur  $\iota'_{i*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}$ .  $\square$

La proposition suivante est décalquée de [22, XXI 5.6.1].

PROPOSITION 3.8. — *Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $D$  un diviseur à croisements normaux. Posons  $U = X - D$ ,  $j : U \hookrightarrow X$ . Soit  $\mathcal{G}$  un  $\mathbb{Q}_l$ -faisceau lisse sur  $U$ , entier, modérément ramifié sur  $X$ . Alors  $Rj_* \mathcal{G}$  est  $I$ -entier.*

Démonstration. — Le problème étant local pour la topologie étale au voisinage d'un point fermé de  $D$ , on peut supposer  $D$  strictement à croisements normaux. Comme  $\text{Reg}(X)$  est un ouvert de  $X$  contenant  $D$ , on peut supposer  $X$  régulier.

On pose  $D = \sum_{i \in I} D_i$  avec  $(D_i)_{i \in I}$  une famille finie de diviseurs réguliers. On fait une récurrence sur  $n = \#I$ . Le cas  $n = 0$  est trivial. Pour  $n > 0$ , on choisit  $i \in I$  et applique 3.7 (i), dont on conserve les notations. Pour tout  $x \in |D_{i, U_{(i)}}|$ , il existe un sous-schéma régulier de  $U_{(i)}$  de dimension 1 tel que son intersection avec  $D_{i, U_{(i)}}$  soit le schéma  $x$ . Donc  $Rj_*^{(i)} \mathcal{G}$  est  $I$ -entier, d'après 3.7 (ii) et 3.6. Notons que  $\sum_{h \in I - \{i\}} D_h \cap D_i$  est un diviseur à croisements normaux de  $D_i$  de complémentaire  $D_{i, U_{(i)}}$ , et pour tout  $q$ ,  $\iota'^{*}_i R^q j_*^{(i)} \mathcal{G}$  est un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux lisse sur  $D_{i, U_{(i)}}$ , modérément ramifié sur  $D_i$  en vertu de 3.7 (i). Donc  $\iota'^{*}_i Rj_* \mathcal{G} \simeq Rj'_{(i)*} \iota'^{*}_i Rj_*^{(i)} \mathcal{G}$  est  $I$ -entier, d'après l'hypothèse de récurrence. Comme  $i$  est arbitraire, on en conclut que  $Rj_* \mathcal{G}$  est  $I$ -entier.  $\square$

#### 4. Démonstration de 2.4 à 2.8

La proposition suivante est une variante de [17, 2.6].

PROPOSITION 4.1. — *Soient  $F$  un corps,  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $\text{Spec } F$ ,  $U$  une partie ouverte de  $X$ .*

(i) *Il existe un morphisme  $r_0 : X'_0 \rightarrow X$  propre surjectif avec  $X'_0$  régulier et un sous-schéma ouvert fermé  $W_0$  de  $X'_0$  contenant  $r_0^{-1}(U)$  tels que  $r_0^{-1}(U)$  soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux dans  $W_0$ .*

(ii) *Pour tout  $n \geq 0$ , il existe une extension finie radicielle  $F'$  de  $F$  et un hyperrecouvrement propre  $n$ -tronqué  $s$ -scindé  $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{F'}$  tels que  $X'_m$  soit lisse sur  $\text{Spec } F'$  et que  $r_m^{-1}(U_{F'})$  soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à  $\text{Spec } F'$  dans un sous-schéma ouvert fermé de  $X'_m$ ,  $0 \leq m \leq n$ .*

*Démonstration.* — (i) Au cas où  $X$  est intègre et  $U \neq \emptyset$ , il existe un morphisme  $r_0 : X'_0 \rightarrow X$  propre surjectif avec  $X'_0$  intègre et régulier tel que  $r_0^{-1}(U)$  soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux, en vertu de [14, 4.1]. On prend  $W_0 = X'_0$ .

Le cas où  $X$  est intègre et  $U = \emptyset$  en résulte : appliquer le cas précédent à  $X$  et la partie ouverte  $X$  pour obtenir  $r_0$ , et puis prendre  $W_0 = \emptyset$ .

Dans le cas général, soient  $X_\alpha$  les schémas réduits associés aux composantes irréductibles de  $X$ ,  $a : \coprod X_\alpha \rightarrow X$  le morphisme canonique. Alors  $a$  est fini et surjectif. Pour chaque  $\alpha$ , appliquons (i) à  $X_\alpha$  et  $U \times_X X_\alpha$ , on obtient  $\phi_\alpha : (X_\alpha)'_0 \rightarrow X_\alpha$  propre surjectif avec  $(X_\alpha)'_0$  régulier et un sous-schéma ouvert fermé  $W_\alpha$  de  $(X_\alpha)'_0$  contenant l'image inverse  $U_\alpha$  de  $U$  tels que  $U_\alpha$  soit le complémentaire dans  $W_\alpha$  d'un diviseur strictement à croisements normaux. Posons  $X'_0 = \coprod (X_\alpha)'_0$ ,  $r_0 = a \circ \coprod \phi_\alpha$ ,  $W_0 = \coprod W_\alpha$ . Alors  $r_0$  et  $W_0$  satisfont aux conditions de (i).

(ii) Cas  $F$  parfait. On fait une récurrence sur  $n$ . Lorsque  $n = 0$ , (ii) dégénère en (i). Supposons donné un hyperrecouvrement  $n$ -tronqué  $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X$  vérifiant les conditions de (ii). On applique (i) au  $X$ -schéma  $(\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$  et l'image inverse de  $U$ . On obtient  $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n X'_\bullet)_{n+1}$  propre surjectif avec  $N$  lisse sur  $\text{Spec } F$  et un sous-schéma ouvert fermé  $W$  de  $N$  tels que l'image inverse de  $U$  dans  $N$  soit le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux relativement à  $\text{Spec } F$  dans  $W$ . L'hyperrecouvrement propre  $(n + 1)$ -tronqué  $s$ -scindé associé au triplet  $(X'_\bullet, N, \beta)$  [21,  $V^{\text{bis}}$  5.1.3] vérifie les conditions de (ii) pour  $n + 1$ .

Cas général. On prend une clôture parfaite  $\overline{F}$  de  $F$  et applique (ii) à  $\overline{F}$ ,  $X_{\overline{F}}$  et  $U_{\overline{F}}$ . L'hyperrecouvrement tronqué et les diviseurs strictement à croisements normaux obtenus se descendent à une sous-extension finie  $F'$  de  $F$ . □

4.2. — *Démonstration de (2.5.1).* — Il faut montrer que pour un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau constructible  $\mathcal{G}$  sur  $X$ , entier,  $Rf_*\mathcal{G}$  est entier.

On fait une récurrence sur  $d = \dim X$ . Le cas  $d \leq 0$  est trivial.

Soit  $d \geq 1$ . Choisissons un ouvert affine  $U \xrightarrow{j} X$  tel que  $\mathcal{G}|_U$  soit lisse et que son complémentaire  $Z \xrightarrow{i} X$  soit de dimension  $< d$ . Le triangle distingué

$$i_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fi)_* Ri^! \mathcal{G} \rightarrow Rf_* \mathcal{G} \rightarrow R(fj)_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que  $Rj_* j^* \mathcal{G}$  et  $R(fj)_* j^* \mathcal{G}$  sont entiers. Il suffit donc de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que  $X$  est séparé et  $\mathcal{G}$  lisse.

On a  $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$  avec  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  lisse. Soit  $p : X' \rightarrow X$  un revêtement étale surjectif qui trivialisait  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ , où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ . Le faisceau  $\mathcal{G}$  est facteur direct de  $p_* p^* \mathcal{G}$ , de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité de  $R(fp)_* p^* \mathcal{G}$ . Donc il suffit de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que  $X$  est séparé et

**4.2.1**  $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$  avec  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$  constant.

On factorise  $f$  en  $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{g} Y$ , où  $j$  est une immersion ouverte,  $g$  est un morphisme propre. Comme  $Rg_*$  préserve l'intégralité en vertu du théorème de Deligne-Esnault (2.4.1), il suffit de prouver l'intégralité de  $Rj_* \mathcal{G}$ . On est donc ramené à démontrer (2.5.1) pour  $j$  et  $\mathcal{G}$ . Pour cela, on peut supposer  $Z$  affine, donc séparé.

Soit  $i \geq 0$ . On applique 4.1 (ii) à  $j$  et  $n = i + 1$ . Quitte à changer les notations, on peut supposer que l'extension radicielle de *loc. cit.* est triviale. On obtient un carré cartésien (de schémas simpliciaux  $(i + 1)$ -tronqués)

$$\begin{array}{ccc} X'_{\bullet} & \xrightarrow{j'_{\bullet}} & Z'_{\bullet} \\ \downarrow s_{\bullet} & & \downarrow r_{\bullet} \\ X & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

où  $r_{\bullet}$  est un hyperrecouvrement propre  $(i + 1)$ -tronqué  $s$ -scindé,  $Z'_m$  lisse sur  $\eta$ ,  $j'_m$  une immersion ouverte faisant de  $X'_m$  le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux relativement à  $\eta$  dans une partie ouverte fermée de  $Z'_m$ ,  $0 \leq m \leq i + 1$ . D'après la descente cohomologique,

$$\tau_{\leq i} Rj_* \mathcal{G} \simeq \tau_{\leq i} Rj_* R s_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G} = \tau_{\leq i} Rr_{\bullet*} Rj'_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G}.$$

Comme  $Rr_{\bullet*}$  préserve l'intégralité (2.4.1), il suffit de voir l'intégralité des  $Rj'_{m*} s_m^* \mathcal{G}$ ,  $0 \leq m \leq i$ . Or  $s_m^* \mathcal{G}$  satisfait encore à 4.2.1, donc est modérément ramifié sur  $Z'_m$ . Il suffit alors d'appliquer 3.8. □

**PROPOSITION 4.3.** — Soient  $X$  un schéma régulier séparé de type fini sur  $\eta$ , purement de dimension 1,  $a_X : X \rightarrow \eta$ ,  $\mathcal{G}$  un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur  $X$ , entier inverse. Alors  $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$  est 1-entier inverse.

*Démonstration.* — On peut supposer que  $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_l}$ , avec  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  lisse. Pour  $p : X' \rightarrow X$  un revêtement étale surjectif qui trivialisait  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ ,  $\mathcal{G}$  est un facteur direct de  $p_* p^* \mathcal{G}$ . Ceci permet de supposer  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}$  constant. On a

$$D_{\eta}(R^1 a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(D_{\eta} R a_{X!} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^{-1}(R a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1)[2]) = R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}(1).$$

Soit  $j : X \hookrightarrow P$  une compactification régulière de  $X$ . De  $a_X = a_P \circ j$  on déduit une suite spectrale

$$E_2^{pq} = R^p a_{P*} R^q j_* \check{\mathcal{G}} \Rightarrow R^{p+q} a_{X*}(\check{\mathcal{G}}).$$

D'après 3.8 et 3.4,  $R^0 a_{P*} R^1 j_* \check{\mathcal{G}}$  est entier. D'autre part,  $R^1 a_{P*} R^0 j_* \check{\mathcal{G}}$  est un quotient de  $R^1 a_{P*} j_! \check{\mathcal{G}}$ , donc entier en vertu de 2.4. Donc  $R^1 a_{X*} \check{\mathcal{G}}$  est entier,  $R^1 a_{X!} \mathcal{G}$  est 1-entier inverse.  $\square$

*Démonstration de 2.4.* — Comme on a déjà remarqué, le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est démontré dans [7, 0.2]. Supposons maintenant  $\mathcal{F}$  entier inverse. On peut supposer  $Y = \eta$ ,  $f = a_X$ .

Traisons d'abord le cas  $X = \mathbb{A}_\eta^1$ . Soient  $j : U \hookrightarrow X$  un ouvert dense tel que  $\mathcal{F}|U$  soit lisse,  $i : Z \hookrightarrow X$  le fermé complémentaire. La suite exacte

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Ra_{U!}(\mathcal{F}|U) \rightarrow Ra_{X!} \mathcal{F} \rightarrow Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z) \rightarrow .$$

D'après 3.4,  $Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z)$  est entier inverse,  $R^0 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$  est entier inverse,  $R^2 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$  est 1-entier inverse. D'après 4.3,  $R^1 a_{U!}(\mathcal{F}|U)$  est 1-entier inverse. Donc  $Ra_{X!} \mathcal{F}$  est  $I$ -entier inverse et 1-entier inverse.

Pour le cas général, procédons par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n \leq 0$  est trivial. Soit  $n \geq 1$ . D'après le lemme de normalisation, il existe  $j : U \hookrightarrow X$  un ouvert dense de  $X$  et un morphisme  $f : U \rightarrow Y = \mathbb{A}_\eta^1$  à fibres de dimension  $\leq n - 1$ . Soit  $i : Z \hookrightarrow X$  le complémentaire de  $U$ . Alors  $Z$  est de dimension  $\leq n - 1$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne le triangle distingué

$$Ra_{U!}(\mathcal{F}|U) \rightarrow Ra_{X!} \mathcal{F} \rightarrow Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z) \rightarrow .$$

Par l'hypothèse de récurrence,  $Ra_{Z!}(\mathcal{F}|Z)$  est  $I$ -entier inverse et  $(n - 1)$ -entier inverse. Il suffit donc de vérifier la proposition pour  $\mathcal{F}|U$ . Ceci résulte de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = R^p a_{Y*} R^q f_!(\mathcal{F}|U) \Rightarrow R^{p+q} a_{U!}(\mathcal{F}|U),$$

de l'hypothèse de récurrence appliquée aux fibres de  $f$  et du cas d'une droite affine déjà traité.  $\square$

La proposition suivante est un analogue de 3.6.

PROPOSITION 4.4. — *Soient  $X$  un schéma régulier de type fini sur  $\eta$  de dimension 1,  $D$  un diviseur positif régulier. Posons  $U = X - D$ ,  $j : U \hookrightarrow X$ . Soit  $\mathcal{G}$  un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau lisse sur  $U$ , entier inverse, modérément ramifié sur  $X$ . Alors  $Rj_* \mathcal{G}$  est  $I$ -entier inverse.*

*Démonstration.* — Comme  $\check{\mathcal{G}}$  est lisse, modérément ramifié sur  $X$ , entier,  $Rj_*\check{\mathcal{G}}$  est  $I$ -entier en vertu de 3.8. Soit  $i : D \hookrightarrow X$ . D'après la dualité locale en dimension 1,  $i^*R^1j_*\mathcal{G} \simeq (i^*j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$  est 1-entier inverse,  $i^*j_*\mathcal{G} \simeq (i^*R^1j_*\check{\mathcal{G}})^\vee(-1)$  est entier inverse.  $\square$

La proposition suivante est un analogue de 3.8.

PROPOSITION 4.5. — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $D$  un diviseur à croisements normaux. Posons  $U = X - D$ ,  $j : U \hookrightarrow X$ . Soit  $\mathcal{G}$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur  $U$ , entier inverse, modérément ramifié sur  $X$ . Alors  $Rj_*\mathcal{G}$  est  $I$ -entier inverse.

On déduit 4.5 de 4.4 de la même manière qu'on a déduit 3.8 de 3.6.

On déduit (2.5.3) de 4.5 de la même manière qu'on a déduit (2.5.1) de 3.8 en 4.2.

REMARQUE 4.6. — L'assertion (2.6.1) (resp. (2.6.3)) pour  $f$  une immersion fermée découle de ce qui précède. En effet, soient  $j : Y - X \hookrightarrow Y$  l'ouvert complémentaire,  $K \in D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp.  $I$ -entier inverse). On a le triangle distingué

$$Rf^!K \rightarrow f^*K \rightarrow f^*Rj_*j^*K \rightarrow .$$

En appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) à  $j$ , on obtient que  $f^*Rj_*j^*K$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse), donc  $f^*Rj_*j^*K[-1]$  l'est aussi (resp.  $(I - 1)$ -entier inverse). Or  $f^*K$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse). On en conclut que  $Rf^!K$  l'est aussi. Cette démonstration donne un peu plus dans le cas entier inverse : pour  $K \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}-1}$ ,  $R^a f^!K$  est  $(a - 1)$ -entier inverse,  $a \geq 1$ .

4.7. — *Démonstration de 2.7.* — On peut supposer  $X$  réduit. On fait une récurrence sur  $d_X$ . Le cas  $d_X \leq 0$  est trivial. Pour  $d_X \geq 1$ , il suffit de montrer que pour  $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse),  $DK$  est entier inverse et  $(I + d_X)$ -entier inverse (resp.  $I$ -entier et  $-d_X$ -entier et  $\mathcal{H}^a(DK)$  est  $(a + 1)$ -entier,  $-d_X \leq a \leq -1$ ). Prenons un ouvert  $j : U \hookrightarrow X$  régulier purement de dimension  $d_X$  tel que le complémentaire  $i : V \hookrightarrow X$  soit de dimension  $< d_X$  et que  $K|U$  soit lisse. Alors  $D(j^*K) \simeq (j^*K)^\vee(d_X)[2d_X]$ .

On a le triangle distingué

$$(4.7.1) \quad i_*D(i^*K) \rightarrow DK \rightarrow Rj_*D(j^*K) \rightarrow .$$

D'après (2.5.3) (resp. (2.5.1)),  $Rj_*D(j^*K)$  est  $(I + d_X)$ -entier inverse (resp.  $-d_X$ -entier). D'après l'hypothèse de récurrence,  $i_*D(i^*K)$  l'est aussi. Donc  $DK$  est  $(I + d_X)$ -entier inverse (resp.  $-d_X$ -entier).

On a le triangle distingué

$$j_!D(j^*K) \rightarrow DK \rightarrow i_*D(Ri^!K) \rightarrow .$$

Le terme  $j_!D(j^*K) \in D^{[-2d_X, -2d_X]}$  est entier inverse (resp.  $I$ -entier). D'après 4.6,  $Ri^!K$  est entier (resp.  $R^0i^!K$  est entier inverse et  $R^ai^!K$  est  $(a - 1)$ -entier inverse,  $a \geq 1$ ). D'après l'hypothèse de récurrence,  $D(Ri^!K)$  est entier inverse (resp.  $\mathcal{H}^0(D(Ri^!K))$  est entier et  $\mathcal{H}^a(D(Ri^!K))$  est  $(a + 1)$ -entier,  $a \leq -1$ , en vertu de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(D(R^{-q}i^!K)) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(DRi^!K).$$

Donc  $DK$  est entier inverse (resp.  $I$ -entier et  $\mathcal{H}^a(DK)$  est  $(a + 1)$ -entier,  $-d_X \leq a \leq -1$ ). □

*Démonstration de 2.5.* — Les assertions (2.5.1) et (2.5.3) sont déjà démontrées en 4.2 et 4.5. Si  $f$  est séparé, alors (2.5.2) et (2.5.4) découlent de 2.4 et 2.7 :  $Rf_* \simeq D_Y Rf_! D_X$  induit

$$D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I-d_X)\text{-ent}},$$

$$D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}} \xrightarrow{Rf_!} D_c^b(Y)_{-d_X\text{-ent}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{d_X\text{-ent}^{-1}}.$$

Il reste à montrer (2.5.4) sans supposer  $f$  séparé. Pour cela, prenons un recouvrement ouvert affine  $W \rightarrow X$ . Soit  $g_\bullet : \text{cosq}_0(W/X)_\bullet \rightarrow X$ . Alors  $Rf_* \simeq Rf_* Rg_{*\bullet} g_{\bullet}^*$ , et il suffit d'appliquer le résultat du cas séparé. □

REMARQUE. — Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) découlent de 2.7 :  $Rf^! \simeq D_X f^* D_Y$  induit

$$D_c^b(Y)_{I\text{-ent}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{(I+d_Y)\text{-ent}^{-1}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_Y)\text{-ent}},$$

$$D_c^b(Y)_{\text{ent}^{-1}} \xrightarrow{D_Y} D_c^b(Y)_{-d_Y\text{-ent}} \xrightarrow{f^*} D_c^b(X)_{-d_Y\text{-ent}} \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_Y\text{-ent}^{-1}}.$$

Dans le cas  $f$  quasi-fini, on peut améliorer (2.5.2) comme suit.

PROPOSITION 4.8. — *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-fini séparé de schémas de type fini sur  $\eta$  avec  $d_X = \dim X \geq 1$ . Alors  $Rf_*$  envoie  $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}}$  dans  $D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{(I+1-d_X)\text{-ent}}$ .*

*Démonstration.* — Par le théorème principal de Zariski, on peut supposer que  $f$  est une immersion ouverte dominante. Soit  $K \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier. On a le triangle distingué

$$i_* Ri^! f_! K \rightarrow f_! K \rightarrow Rf_* K \rightarrow,$$

où  $i : Y - X \hookrightarrow Y$  est le fermé complémentaire. Il suffit donc d'appliquer (2.6.2). □

La proposition suivante généralise [7, 0.4].

PROPOSITION 4.9. — Soient  $i : X \hookrightarrow Y$  une immersion de schémas de type fini sur  $\eta$  avec  $Y$  régulier,  $d_Y = \dim Y$ ,  $d_c = \text{codim}(X, Y)$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse) lisse. Soit  $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  une fonction vérifiant

$$\epsilon(a) = \begin{cases} d_c & \text{si } 2d_c \leq a < d_c + d_Y, \\ a + 1 - d_Y & \text{si } d_c + d_Y \leq a < 2d_Y, \\ d_Y & \text{si } a = 2d_Y. \end{cases}$$

Alors  $Ri^1\mathcal{G}$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $(I - d_c)$ -entier inverse).

Démonstration. — On va montrer que pour toute partie fermée  $W$  de  $X$ ,  $Ri^1_W\mathcal{G}$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $(I - d_c)$ -entier inverse), où  $i_W : W \hookrightarrow Y$ . Ici on a muni  $W$  de la structure de schéma réduit induite. On fait une récurrence noethérienne. Le cas  $W = \emptyset$  est trivial. Pour  $W \neq \emptyset$ , on prend un ouvert régulier irréductible  $j : U \hookrightarrow W$ . Soit  $i_Z : Z \hookrightarrow W$  son complémentaire. On a le triangle distingué

$$i_{Z*}Ri^1_Z Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 3.2,  $j^* Ri^1_W\mathcal{G} = R(i_W j)^1\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}(-d)[-2d]$ , où  $d = \text{codim}(U, Y) \geq d_c$ . Si  $d_U = \dim U = 0$ , alors  $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$  est  $\epsilon$ -entier car  $\epsilon(2d) \leq d$ ; si  $d_U \geq 1$ , alors d'après (2.5.1) et 4.8,  $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$  est  $d$ -entier et  $(I + 1 - d - d_U)$ -entier, donc  $\epsilon$ -entier, compte tenu du fait que  $d + d_U \leq d_Y$ . (Resp. d'après (2.5.3),  $Rj_*j^* Ri^1_W\mathcal{G}$  est  $(I - d)$ -entier inverse, donc  $(I - d_c)$ -entier inverse.) D'après l'hypothèse de récurrence,  $Ri^1_Z Ri^1_W\mathcal{G} = R(i_W i_Z)^1\mathcal{G}$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $(I - d_c)$ -entier inverse). Donc  $Ri^1_W\mathcal{G}$  l'est aussi.  $\square$

4.10. — Démonstration de 2.6. — Les assertions (2.6.2) et (2.6.4) sont traitées plus haut. Pour le reste, on fait une récurrence sur  $d_Y$ . Le cas  $d_Y < 0$  est clair. Pour  $d_Y \geq 0$ , on peut supposer  $Y$  réduit. Soit  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse). Il existe un ouvert régulier  $U$  de  $Y$  de complémentaire  $W$  de dimension  $\leq d_Y - 1$  tel que  $\mathcal{G}|_U$  soit lisse. On considère le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X_U & \xhookrightarrow{j'} & X & \xleftarrow{i'} & X_W \\ \downarrow f_U & & \downarrow f & & \downarrow f_W \\ U & \xhookrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & W \end{array}$$

On a le triangle distingué

$$(4.10.1) \quad i'_* Rf^1_W Ri^1\mathcal{G} \rightarrow Rf^1\mathcal{G} \rightarrow Rj'_* Rf^1_U j'^*\mathcal{G} \rightarrow .$$

D'après 4.6,  $Ri^1\mathcal{G}$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse), donc  $Rf^1_W Ri^1\mathcal{G}$  est  $-d_r$ -entier (resp.  $(I + d_r)$ -entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence. Il reste à considérer  $Rf^1_U(\mathcal{G}|_U)$ .

Il suffit de montrer que pour  $Y$  régulier et  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse) lisse,  $Rf^! \mathcal{G}$  est  $-d_r$ -entier (resp.  $(I + d_r)$ -entier inverse). Le problème étant local sur  $Y$ , on peut supposer  $Y$  irréductible et que  $f$  se factorise en  $X \xrightarrow{i_X} \mathbb{A}_Y^n \xrightarrow{p} Y$ , où  $i_X$  est une immersion fermée.  $\mathbb{A}_Y^n$  est irréductible [10, 4.5.8], donc biéquidimensionnel [10, 5.2.1], donc  $\text{codim}(X, \mathbb{A}_Y^n) = n + d_Y - d_X \geq n - d_r$ , car  $d_X \leq d_Y + d_r$ . Il suffit donc d'appliquer 4.9 à  $i_X$  et  $Rp^! \mathcal{G}[-2n] = p^* \mathcal{G}(n)$ .  $\square$

4.11. — *Démonstration de 2.8.* — Les assertions (2.8.2) et (2.8.4) découlent de 2.7 :

$$R\mathcal{H}om_X(-, -) \simeq D_X(- \otimes D_X -)$$

induit

$$\begin{aligned} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{(\text{id}, D_X)} D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}}^\circ \times D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\ D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{(\text{id}, D_X)} D_c^b(X)_{\text{ent}}^\circ \times D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^\circ \\ &\xrightarrow{\otimes} D_c^b(X)_{-d_X\text{-ent}}^\circ \xrightarrow{D_X} D_c^b(X)_{d_X\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Pour le reste, il suffit de montrer que pour  $K, L \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ ,  $K$  entier inverse,  $L$  entier (resp.  $K$  entier,  $L$  entier inverse),  $R\mathcal{H}om(K, L)$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse). Par dévissage de  $K$ , on se ramène à supposer  $K$  de la forme  $j_! \mathcal{G}$ , où  $j : Y \hookrightarrow X$  une immersion,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier inverse (resp. entier) lisse. Alors

$$R\mathcal{H}om_X(j_! \mathcal{G}, L) \simeq Rj_* R\mathcal{H}om_Y(\mathcal{G}, Rj^! L).$$

Il suffit d'appliquer (2.6.1) et (2.5.1) (resp. (2.6.3) et (2.5.3)).  $\square$

### 5. Variantes et cycles proches

VARIANTE 5.1. — Soient  $k$  un corps fini,  $l$  un nombre premier  $\neq \text{car}(k)$ . Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $k$ . Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . On fixe un plongement  $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ . On dit qu'un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau  $\mathcal{F}$  est  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) si pour tout point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus d'un point fermé  $x$  de  $X$ , et toute valeur propre  $\alpha$  du Frobenius géométrique  $F_{\bar{x}} \in \text{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$  agissant sur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ,  $\alpha/\iota(q^r)$  (resp.  $\iota(q^r)/\alpha$ ) est entier sur  $\mathbb{Z}$ , où  $q = \#\kappa(x)$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $\iota$ . On définit l'intégralité pour  $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  de manière analogue à 2.2.

On a des résultats similaires pour les diverses opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9. Le cas entier de l'analogie de 2.4 est un théorème de Deligne [22, XXI

5.2.2]. Les démonstrations des autres résultats sont similaires à celles données aux §§ 3 et 4.

VARIANTE 5.2. — Soient  $R$  un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini  $k = \mathbb{F}_{p^\nu}$ ,  $K$  son corps des fractions,  $S = \text{Spec } R$ ,  $\eta = \text{Spec } K$ ,  $s = \text{Spec } k$ . Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $s$ . On a un topos  $X \times_s \eta$  [22, XIII 1.2.4]. Rappelons qu'un faisceau d'ensembles sur  $X \times_s \eta$  est un faisceau sur  $X_{\bar{s}}$  muni d'une action continue [*ibid.*, 1.1.2] de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ , compatible à l'action de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  sur  $X_{\bar{s}}$  (via  $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k)$ ). Fixons un nombre premier  $l \neq p$ . Soit  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . Pour  $x \in X$ , soit  $\Phi_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x)) \times_{\text{Gal}(\overline{k}/k)} \text{Gal}(\overline{K}/K)$  un relèvement du Frobenius géométrique  $F_x \in \text{Gal}(\overline{k}/\kappa(x))$ . D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres de  $\Phi_x$  agissant sur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité. Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . On fixe  $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) si pour tout  $x \in |X|$  et toute valeur propre  $\alpha$  de  $\Phi_x$  agissant sur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ,  $\alpha/\iota(q^r)$  (resp.  $\iota(q^r)/\alpha$ ) est entier sur  $\mathbb{Z}$ , où  $q = \#\kappa(x)$ . Cette définition ne dépend pas des choix de  $\Phi_x$  et de  $\iota$ . On définit l'intégralité pour  $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  de manière analogue à 2.2.

Toute section continue  $\sigma$  de  $\text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k)$  induit un foncteur exact

$$\sigma^* : D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Un complexe  $K \in D_c^b(X \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse) si et seulement si  $\sigma^*K$  l'est. Comme  $\sigma^*$  commute aux six opérations et à la dualité, on déduit de 5.1 des résultats similaires pour ces opérations : 2.4 à 2.8, 3.8, 4.8, 4.9.

Soient  $S, \eta, s, l$  comme dans 5.2. Le résultat principal de ce § est le suivant.

THÉORÈME 5.3. — *Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $S$ . Le foncteur des cycles proches*

$$R\Psi_X : D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

*induit*

$$\begin{aligned} D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{ent}}, \\ D_c^b(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^b(X_s \times_s \eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{I\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

5.4. — Soient  $S = \text{Spec } R$  un trait hensélien quelconque,  $\eta$  son point générique,  $s$  son point fermé. On va garder ces notations jusqu'en 5.7.

DÉFINITION 5.5. — (a) Soient  $X$  un  $S$ -schéma de type fini,  $Z$  une partie fermée contenant  $X_s$ . On dit que le couple  $(X, Z)$  est *semi-stable* si, localement pour la topologie étale, il est de la forme

$$(\text{Spec } R[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - \pi), Z),$$

où  $\pi$  est une uniformisante de  $R$ ,  $Z$  est défini par l'idéal  $(t_1 \dots t_s)$ ,  $1 \leq r \leq s \leq n$ . Le couple est dit *strictement semi-stable* s'il est semi-stable et si  $Z$  est la somme d'une famille finie de diviseurs réguliers de  $X$ .

(b) Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. On dit que  $X$  est *strictement semi-stable* si  $(X, X_s)$  est un couple strictement semi-stable.

Soit  $(X, Z)$  un couple strictement semi-stable avec  $Z = \sum_{i \in I} D_i$ ,  $(D_i)_{i \in I}$  une famille finie de diviseurs réguliers. Alors  $X_s = \bigcup_{i \in I - J} D_i$ , où  $J = \{i \in I \mid D_i \not\subset X_s\}$ . Soit  $H = \bigcup_{j \in J} D_j$  la réunion des composantes horizontales. Alors  $Z = X_s \cup H$ .

Nous établirons d'abord 5.3 dans le cas semi-stable. Nous aurons besoin pour cela des points (ii) et (iii) du lemme suivant (la partie (i) est utilisée dans la preuve de (ii)) :

LEMME 5.6. — Soient  $(X, Z)$  un couple strictement semi-stable sur  $S$ ,  $Z = \sum_{i \in I} D_i$  avec  $(D_i)_{i \in I}$  une famille finie de diviseurs réguliers,  $J$  comme plus haut,  $U = X - Z$ ,  $u$  l'inclusion  $U \hookrightarrow X_\eta$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  avec  $l$  inversible sur  $S$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \Lambda)$  localement constant, modérément ramifié sur  $X$ .

(i) Soient  $i \in J$ ,  $U_{(i)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i\}} D_h$ ,  $D_{i, U_{(i)}} = D_i \times_X U_{(i)}$ , d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D_{i, U_{(i)}} & \xrightarrow{j^{(i)}} & (D_i)_\eta & \hookrightarrow & D_i \longleftarrow (D_i)_s \\
 & & \downarrow \iota'_i & & \downarrow (\iota_i)_\eta & & \downarrow \iota_i & & \downarrow (\iota_i)_s \\
 U & \xrightarrow{j^{(i)}} & U_{(i)} & \xrightarrow{j^{(i)}} & X_\eta & \hookrightarrow & X \longleftarrow & X_s \\
 & \searrow u & & & & & & & 
 \end{array}$$

Alors la flèche

$$(5.6.1) \quad \alpha : (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$$

composée de  $(\iota_i)_s^* R\Psi_X (Ru_* \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} (\iota_i)_\eta^* (Ru_* \mathcal{G})$  [22, XIII (2.1.7.2)] et du changement de base  $R\Psi_{D_i} (\iota_i)_\eta^* Rj_{(i)*} (Rj_*^{(i)} \mathcal{G}) \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^* (Rj_*^{(i)} \mathcal{G})$  est un isomorphisme.

(ii) Soient  $i \in I - J$ ,  $U_{(i)}$ ,  $D_{i,U_{(i)}}$  comme plus haut, d'où un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 U \subset & \longrightarrow & U_{(i)} & \longleftarrow & D_{i,U_{(i)}} \\
 \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow j'_{(i)} \\
 & & & & D_i \\
 & & & & \downarrow (\iota_i)_s \\
 X_\eta \subset & \longrightarrow & X & \longleftarrow & X_s
 \end{array}$$

Alors  $R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \simeq \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(D_{i,U_{(i)}} \times_s \eta, \Lambda)$  est lisse, modérément ramifié sur  $D_i$ , et le morphisme

$$(5.6.2) \quad \beta : (\iota_i)_s^* R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$$

déduit de  $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G} \rightarrow (\iota_i)_{s*} Rj'_{(i)*} R\Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$  [22, XIII (2.1.7.1)] est un isomorphisme.

(iii) Supposons que  $J = \emptyset$ . Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas tel que  $Y$  soit un  $S$ -schéma strictement semi-stable avec  $(f^{-1}(D_i))_{i \in I}$  une famille de diviseurs réguliers de  $Y$ . Alors le morphisme

$$(5.6.3) \quad \gamma : f_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_Y f_{\eta*} \mathcal{G}$$

[22, XIII (2.1.7.2)] est un isomorphisme.

Le point (ii) est une généralisation partielle de [11, 1.5 (a)].

*Démonstration.* — On remplace tout d'abord le premier énoncé de (ii) par l'assertion que les faisceaux  $R^q \Psi_{U_{(i)}} \mathcal{G}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  sont lisses, modérément ramifiés sur  $D_i$ . L'annulation des cycles proches supérieures résultera de (iii).

La question est locale sur  $X$ . Soit  $y$  un point de  $X_s$ . On peut supposer que  $y \in D_j$  pour tout  $j \in I$ . Soit  $\pi$  une uniformisante de  $R$ . Il existe un ouvert de  $X$  contenant  $y$ , lisse sur

$$\text{Spec } R[t_j]_{j \in I} / \left( \prod_{j \in I - J} t_j - \pi \right)$$

avec  $t_j$  définissant  $D_j$ . En vertu du lemme d'Abhyankar, il existe, au voisinage de  $y$ , un revêtement fini  $g : \widetilde{X} = X[T_j]_{j \in I} / (T_j^n - t_j)_{j \in I} \rightarrow X$  où  $n$  est un entier premier à l'exposant caractéristique de  $s$ , tel que  $(g|U)^* \mathcal{G}$  se prolonge en un  $\Lambda$ -module localement constant constructible sur  $\widetilde{X}$ . Comme  $\mathcal{G}$  s'injecte dans  $(g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G}$  et le quotient  $\mathcal{G}_1$  est modérément ramifié sur  $X$ , on peut itérer cette construction. Pour tout  $N \geq 1$ , on obtient, quitte à rétrécir  $X$ , une résolution

$$\mathcal{G} \rightarrow (g|U)_*(g|U)^* \mathcal{G} \rightarrow (g_1|U)_*(g_1|U)^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (g_N|U)_*(g_N|U)^* \mathcal{G}_N.$$

Donc on est ramené à montrer le lemme pour le faisceau  $(g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G}$ .

Soient  $R_1$  l'anneau obtenu en adjoignant à  $R$  les  $n$ -ièmes racines de l'unité,  $R' = R_1[\Pi]/(\Pi^n - \pi)$ ,  $S' = \text{Spec } R'$ . Comme  $R\Psi$  commute au changement de traits  $S' \rightarrow S$  [4, Th. finitude, 3.7], il suffit de montrer le lemme pour  $((g|U)_*(g|U)^*\mathcal{G})_{S'} \simeq (g_{S'}|U_{S'})_*(g_{S'}|U_{S'})^*\mathcal{G}_{S'}$ . Or  $X_{S'} = \coprod_{\zeta} X_{\zeta}$ , où  $X_{\zeta}$  est lisse sur

$$\text{Spec } R[T_j]_{j \in J} / \left( \prod_{j \in I-J} T_j - \zeta \cdot \Pi \right),$$

$\zeta$  parcourt les  $n$ -ièmes racines de l'unité. Donc  $(X_{S'}, g_{S'}^{-1}(Z_{S'})_{\text{red}})$  est un couple strictement semi-stable avec  $(g_{S'}^{-1}(D_{i,S'})_{\text{red}})_{i \in I}$  une famille de diviseurs réguliers.

On peut alors se ramener à montrer le lemme pour un faisceau  $\mathcal{G}$  qui se prolonge en un  $\Lambda$ -module localement constant constructible sur  $X$ , puis au cas  $\mathcal{G} = \Lambda_U$  par la formule de projection.

L'assertion (iii) découle alors de la fonctorialité de [12, 3.3]. Plus précisément, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} & \xrightarrow{\sim} & f_s^* R^q \Psi_X \Lambda_{X_\eta} \\ \downarrow \wedge^q \mathcal{H}^1 \gamma & & \downarrow \mathcal{H}^q \gamma \\ \wedge^q R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} & \xrightarrow{\sim} & R^q \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) & \longrightarrow & f_s^* \iota_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} & \longrightarrow & f_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_{X_\eta} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \text{3.7(ii)} & & \downarrow \mathcal{H}^1 \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda_{Y_s}(-1) & \longrightarrow & \iota_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} & \longrightarrow & R^1 \Psi_Y f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$ ,  $j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$ ,  $\iota_X : X_s \rightarrow X$ ,  $\iota_Y : Y_s \rightarrow Y$ . Les lignes du deuxième diagramme sont des suites exactes courtes et le carré à gauche est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_s^* \Lambda_{X_s}(-1) & \xrightarrow{d} & f_s^* \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{X_i}(-1) & \xrightarrow{\sim} & f_s^* i_X^* R^1 j_{X*} \Lambda_{X_\eta} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Lambda_{Y_s}(-1) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{Y_i}(-1) & \xrightarrow{\sim} & i_Y^* R^1 j_{Y*} f_\eta^* \Lambda_{X_\eta} \end{array}$$

où les flèches marquées  $d$  sont des diagonales et celles marquées  $c$  sont induites par les classes des diviseurs réguliers.

(i) Il s'agit de montrer l'assertion suivante :

(A) Le morphisme de foncteurs

$$(5.6.4) \quad (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \iota_i'^*$$

induit un isomorphisme sur  $Rj_*^{(i)} \Lambda_U$ .

On a un triangle distingué

$$(\iota_i)_s^* \Lambda_{D_i, U_{(i)}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow Rj_*^{(i)} \Lambda_U \rightarrow .$$

Comme (5.6.4) induit trivialement un isomorphisme sur le premier terme, (A) équivaut à

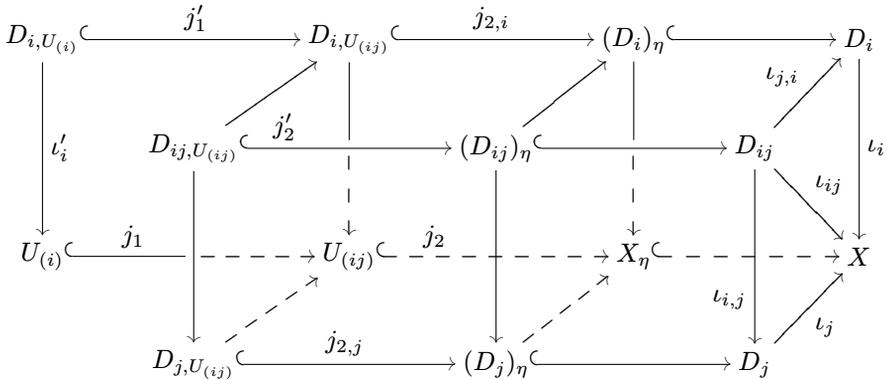
(B) Le morphisme (5.6.4)  $\Lambda_{U_{(i)}}$

$$(5.6.5) \quad (\iota_i)_s^* R\Psi_X Rj_{(i)*} \Lambda_{U_{(i)}} \rightarrow R\Psi_{D_i} Rj'_{(i)*} \Lambda_{D_i, U_{(i)}}$$

est un isomorphisme.

On montre ces énoncés par récurrence sur  $\#J \geq 1$ . Le cas  $\#J = 0$  est vide.

Dans le cas général, on montre d'abord que pour tout  $j \in J - \{i\}$ , (5.6.5)  $| (D_{ij})_s$  est un isomorphisme, où  $D_{ij} = D_i \cap D_j$ . Soit  $U_{(ij)} = X - \bigcup_{h \in I - \{i, j\}} D_h$ . On considère le diagramme commutatif



D'après [21, XII 4.4 (i)], le composé

$$\begin{aligned} & (\iota_{ij})_s^* R\Psi_X R(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\ & \rightarrow (\iota_{j,i})_s^* R\Psi_{D_i} R(j_{2,i} j_1')_* \Lambda_{D_i, U_{(i)}} \quad (5.6.5) | (D_{ij})_s \\ & \xrightarrow{\sim} R\Psi_{D_{ij}} Rj_{2*}' ((Rj_{1*}' \Lambda_{D_i, U_{(i)}}) | D_{ij, U_{(ij)}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)} \end{aligned}$$

est égal au composé

$$\begin{aligned}
 & (\iota_{ij})_s^* R\Psi_X R(j_2 j_1)_* \Lambda_{U_{(i)}} \\
 & \xrightarrow{\sim} (\iota_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} R(j_2, j)_* ((Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}) \quad \text{hypothèse de récurrence (A)} \\
 & \rightarrow R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad (*) \\
 & \xrightarrow{\sim} R\Psi_{D_{ij}} Rj'_{2*} ((Rj'_{1*} \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}})|_{D_{ij,U_{(ij)}}}) \quad \text{3.7 (ii)}
 \end{aligned}$$

où (\*) est un morphisme de type (5.6.4) appliqué à  $(Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}}$ . On a le triangle distingué

$$\Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow (Rj_{1*} \Lambda_{U_{(i)}})|_{D_{j,U_{(ij)}}} \rightarrow .$$

Donc l'hypothèse de récurrence (B) implique que (\*) est un isomorphisme. Il en résulte que  $(5.6.5)|(D_{ij})_s$  est un isomorphisme.

Il reste à montrer que  $(5.6.5)|(V_i)_s$  est un isomorphisme, où

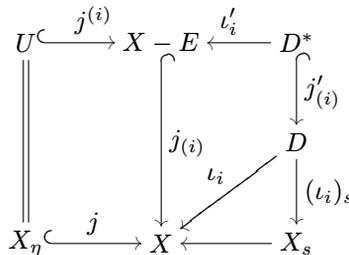
$$V_i = X - \bigcup_{h \in J - \{i\}} D_h.$$

Comme  $(V_i)_\eta = U_{(i)}$ ,  $j_{(i),V_i} = \text{id}_{U_{(i)}}$ , ceci découle de (iii).

(ii) Comme  $U_{(i)}$  est lisse sur  $S$ ,  $R\Psi_{U_{(i)}} \Lambda_U \simeq \Lambda_{D_{i,U_{(i)}}$ , donc est modérément ramifié sur  $D_i$ .

Pour montrer que  $\beta$  est un isomorphisme, traitons d'abord deux cas spéciaux : (a)  $\#J = 0$ ; (b)  $\#(I - J) = \#J = 1$ .

Dans le cas (a), on a  $U = X_\eta$ ,  $j_\eta = \text{id}_{X_\eta}$ . On pose  $D = D_i$ ,  $E = \bigcup_{j \in I - \{i\}} D_j$ ,  $D^* = D - D \cap E = D_{i,U_{(i)}}$ , d'où un diagramme commutatif



On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \wedge^q (\iota_i)_s^* R^1 \Psi_X \Lambda_U & \xrightarrow{\sim} & (\iota_i)_s^* R^q \Psi_X \Lambda_U \\
 \downarrow \wedge^q \mathcal{H}^1 \beta & & \downarrow \mathcal{H}^q \beta \\
 \wedge^q R^1 j'_{(i)*} R \Psi_{U(i)} \Lambda_U & \longrightarrow & R^q j'_{(i)*} R \Psi_{U(i)} \Lambda_U \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
 \wedge^q R^1 j'_{(i)*} \Lambda_{D^*} & \xrightarrow{\sim} & R^q j'_{(i)*} \Lambda_{D^*}
 \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que  $\mathcal{H}^1 \beta$  est un isomorphisme.

On a le diagramme commutatif

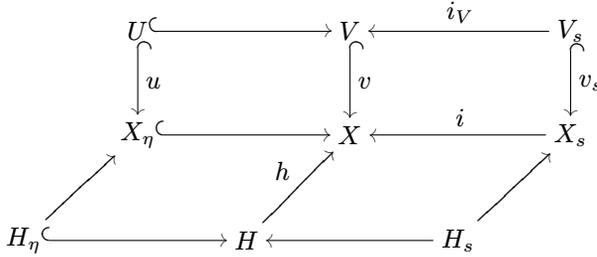
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \iota_i^* R j_* \Lambda_U & \xrightarrow{p_1} & (\iota_i)_s^* R \Psi_X \Lambda_U \\
 & & \parallel & & \downarrow \beta \\
 \iota_i^* R j_{(i)*} \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_1} & \iota_i^* R j_{(i)*} R j_*^{(i)} \Lambda_U & & \\
 b_1 \downarrow \simeq & & b_2 \downarrow & & \\
 R j'_{(i)*} \iota_i^* \Lambda_{X-E} & \xrightarrow{r_2} & R j'_{(i)*} \iota_i^* R j_*^{(i)} \Lambda_U & \xrightarrow{p_2} & R j'_{(i)*} R \Psi_{X-E} \Lambda_U \\
 & \searrow \sim & & \nearrow & 
 \end{array}$$

où  $b_1, b_2$  sont des changements de base,  $r_1, r_2$  sont induits par l'adjonction  $\Lambda_{X-E} \rightarrow R j_*^{(i)} \Lambda_U$ . La flèche  $b_1$  est un isomorphisme en vertu de 3.7 (ii). Le composé  $p_2 r_2$  est induit de l'isomorphisme  $\Lambda_{D^*} \xrightarrow{\sim} R \Psi_{X-E} \Lambda_U$ , donc est un isomorphisme. On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* R j_{(i)*} \Lambda_{X-E} &= \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}, \\
 \mathcal{H}^1 \iota_i^* R j_* \Lambda_U &= \Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}},
 \end{aligned}$$

$\mathcal{H}^1 (\iota_i)_s^* R \Psi_X \Lambda_U$  est le quotient de  $\Lambda_D \oplus \bigoplus_{j \in I - \{i\}} (\iota_{j,i})_* \Lambda_{D_{ij}}$  par  $\Lambda_{D_i}$  inclus diagonalement,  $\mathcal{H}^1 r_1$  est l'inclusion dans le second membre,  $\mathcal{H}^1 p_1$  est la projection. Donc  $\mathcal{H}^1 (p_1 r_1)$  est un isomorphisme. Il s'en suit que  $\mathcal{H}^1 \beta$  est un isomorphisme. D'où (a).

Dans le cas (b), on a  $D_i = X_s$ ,  $(\iota_i)_s = \text{id}_{X_s}$ ,  $H = D_j$  où  $j$  est l'élément de  $J$ . On pose  $V = U_{(i)} = X - H$ , d'où un diagramme à carrés cartésiens



On a le triangle distingué

$$i^* Rv_* \Lambda_V \xrightarrow{\beta'} R\Psi_X Ru_* \Lambda_U \rightarrow R\Phi_X Rv_* \Lambda_V \rightarrow .$$

On a

$$R^q v_* \Lambda_V = \begin{cases} \Lambda_X & \text{si } q = 0, \\ h_* \Lambda_H(-1) & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

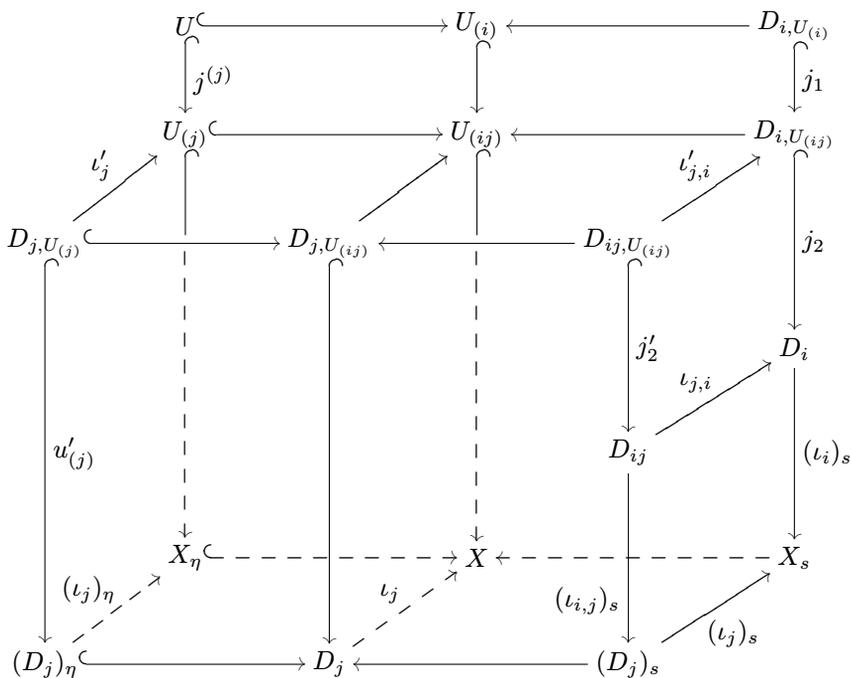
Donc  $R\Phi_X R^q v_* \Lambda_V = 0$ , pour tout  $q$ . Donc  $R\Phi_X Rv_* \Lambda_V = 0$ ,  $\beta'$  est un isomorphisme. Par ailleurs, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 i^* Rv_* \Lambda_V & \xrightarrow{\beta'} & R\Psi_X Ru_* \Lambda_U \\
 \text{3.7 (ii)} \downarrow \simeq & & \downarrow \beta \\
 Rv_{s*} i_V^* \Lambda_V & \xrightarrow{\sim} & Rv_{s*} R\Psi_V \Lambda_U
 \end{array}$$

Donc  $\beta$  est un isomorphisme. D'où (b).

Pour le cas général, procédons par récurrence sur  $\sharp J$ . Le cas  $\sharp J = 0$  est le cas (a) traité plus haut. Supposons  $\sharp J \geq 1$ . Prenons  $j \in J$ , d'où un diagramme

commutatif



On a un diagramme commutatif dans  $D_c^b(D_{ij} \times_s \eta, \Lambda)$

(†)

$$\begin{array}{ccc}
 \iota_{j,i}^* (\iota_i)_s^* R\Psi_X Ru_* \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_1} & \iota_{j,i}^* Rj_{2*} R\Psi_{U^{(ij)}} Rj_*^{(j)} \Lambda_U \xrightarrow{(b)} \iota_{j,i}^* Rj_{2j_1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\
 \parallel & & \downarrow \text{chg}^t \text{ de base} \quad \simeq \downarrow \text{3.7 (i)} \\
 (\iota_{i,j})_s^* (\iota_j)_s^* R\Psi_X Ru_* \Lambda_U & & Rj_{2*}' \iota_{j,i}'^* R\Psi_{U^{(ij)}} Rj_*^{(j)} \Lambda_U \xrightarrow{(b)} Rj_{2*}' \iota_{j,i}'^* Rj_{1*} R\Psi_{U^{(i)}} \Lambda_U \\
 \simeq \downarrow (i) & & \simeq \downarrow (i) \\
 (\iota_{i,j})_s^* R\Psi_{D_j} Ru_{(j)*}' \iota_j'^* Rj_*^{(j)} \Lambda_U & \xrightarrow{\beta_2} & Rj_{2*}' R\Psi_{D_{j,U^{(ij)}}} \iota_j'^* Rj_* \Lambda_U
 \end{array}$$

où  $\beta|_{D_{ij}}$  est le composé des deux flèches de la première ligne de (†),  $\beta_1$  est induit par une flèche de type (5.6.2) et  $\beta_2$  est une flèche de type (5.6.2). La commutativité du carré à droite est claire et celle du carré à gauche se voit en

appliquant 5.7 au carré

$$\begin{array}{ccc}
 D_{j,U(ij)} & \longrightarrow & U(ij) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D_j & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

La flèche  $\beta_2$  est un isomorphisme en vertu de l'hypothèse de récurrence et du triangle distingué

$$\Lambda_{D_j,U(ij)}(-1)[-2] \rightarrow \Lambda_{D_j,U(j)} \rightarrow \iota_j^* Rj_* \Lambda_U \rightarrow .$$

Donc  $\beta|_{D_{ij}}$  est un isomorphisme. Il reste à montrer que  $\beta|(D_i - D_{ij})$  est un isomorphisme, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence.  $\square$

LEMME 5.7. — Soient

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{h} & X \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

un carré commutatif de  $S$ -schémas,  $\Lambda$  un anneau. Alors on a un diagramme commutatif de foncteurs  $D^+(X_\eta, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_s \times_s \eta, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_s^* Rf_{s*} R\Psi_X & \longrightarrow & Rf'_{s*} h_s^* R\Psi_X \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 g_s^* R\Psi_Y Rf_{\eta*} & & & & Rf'_{s*} R\Psi_{X'} h_\eta^* \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & R\Psi_{Y'} g_\eta^* Rf_{\eta*} & \longrightarrow & R\Psi_{Y'} Rf'_{\eta*} h_\eta^*
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des changements de base, les flèches montantes sont [22, XIII (2.1.7.1)], les flèches descendantes sont [ibid., XIII (2.1.7.2)].

*Démonstration.* — Soient  $K = \kappa(\eta)$ ,  $\bar{K}$  une clôture séparable de  $K$ ,  $\bar{\eta} = \text{Spec } \bar{K}$ ,  $\bar{S}$  le normalisé de  $S$  dans  $\bar{\eta}$ . On ajoute une barre au-dessus pour le changement de base  $\bar{S} \rightarrow S$ . On note  $i : \bar{s} \rightarrow \bar{S}$ ,  $j : \bar{\eta} \rightarrow \bar{S}$ . Il suffit de montrer

la commutativité du diagramme de foncteurs  $D^+(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y'_{\bar{s}}, \Lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_{\bar{s}}^* Rf_{\bar{s}*} i_X^* Rj_{X*} & \longrightarrow & Rf'_{\bar{s}*} h_{\bar{s}}^* i_X^* Rj_{X*} \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 & g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* \bar{h}^* Rj_{X*} \\
 & \sim & & & \sim \\
 g_{\bar{s}}^* i_Y^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & i_Y^* \bar{g}^* Rf_{\bar{s}*} Rj_{X*} & \longrightarrow & i_Y^* Rf'_{\bar{s}*} \bar{h}^* Rj_{X*} & & Rf'_{\bar{s}*} i_{X'}^* Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* \\
 & \searrow & \sim & & \searrow & & \nearrow \\
 & i_Y^* \bar{g}^* Rj_{Y*} Rf_{\bar{\eta}*} & & & i_{Y'}^* Rf'_{\bar{s}*} Rj_{X'*} h_{\bar{\eta}}^* & & \\
 & & \searrow & & \sim & & \\
 & & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} g_{\bar{\eta}}^* Rf_{\bar{\eta}*} & \longrightarrow & i_{Y'}^* Rj_{Y'*} Rf'_{\bar{\eta}*} h_{\bar{\eta}}^* & & 
 \end{array}$$

où toutes les flèches sont des changements de base. La commutativité de la cellule en haut (resp. en bas) résulte de [21, XII 4.4 (i)] (resp. [21, XII 4.4 (ii)]). Les commutativités des deux autres cellules sont triviales.  $\square$

PROPOSITION 5.8. — Soient  $S$  comme dans 5.2,  $(X, Z)$  un couple semi-stable sur  $S$ ,  $U = X - Z$ ,  $u : U \rightarrow X_{\eta}$ ,  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse) lisse, modérément ramifié sur  $X$ . Alors  $R\Psi_X Ru_* \mathcal{G}$  est  $I$ -entier (resp.  $I$ -entier inverse).

Démonstration. — On peut supposer que  $(X, Z)$  est un couple strictement semi-stable sur  $S$ .

Traisons d’abord le cas particulier où  $Z$  est un diviseur régulier. Alors  $Z = X_s$ ,  $U = X_{\eta}$ ,  $u = \text{id}$ ,  $X$  est lisse sur  $S$ . Soit  $x \in |X_s|$ . Quitte à faire un changement de traits étale, on peut supposer que  $X \rightarrow S$  admet une section  $\sigma$  tel que  $\sigma(s) = x$ . D’après 5.6 (iii),  $(R\Psi_X \mathcal{G})_x = \sigma_s^* R\Psi_X \mathcal{G} \simeq R\Psi_S \sigma_{\eta}^* \mathcal{G}$  est  $I$ -entier (resp.  $I$ -entier inverse), car  $R\Psi_S$  s’identifie à l’identité.

Le cas général découle de 5.6 (ii), du cas spécial ci-dessus, et de la variante 5.2 de 3.8 (resp. 4.5) au-dessus de  $s \times_s \eta$ .  $\square$

5.9. — Pour la démonstration de 5.3, nous aurons besoin du lemme 5.10 ci-après, analogue de 4.1.

Soient  $S$  un trait hensélien excellent,  $X$  un  $S$ -schéma séparé de type fini,  $U \subset X_{\eta}$  une partie ouverte. Pour  $f : S' \rightarrow S$  un morphisme fini de traits et  $g : Y \rightarrow X_{S'}$  un morphisme propre de schémas, on considère la condition suivante :

**5.9.1** On a  $Y = Y_1 \amalg Y_2$ , où  $Y_1$  est strictement semi-stable sur  $S'$ ,  $g^{-1}(U) \subset Y_2$  et  $(Y_2, Y_2 - g^{-1}(U))$  est un couple strictement semi-stable sur  $S'$ .

LEMME 5.10. — (i) *Il existe un morphisme fini de traits  $S' \rightarrow S$  et un morphisme propre  $r_0 : X'_0 \rightarrow X_{S'}$ , de schémas vérifiant 5.9.1 (où  $Y = X'_0$ ) et tels que  $(r_0)_\eta$  surjectif.*

(ii) *Pour  $n \geq 0$ , il existe un morphisme fini de traits  $f : S' \rightarrow S$  et une augmentation de schéma simplicial  $n$ -tronqué  $s$ -scindé  $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{S'}$ , tels que pour  $0 \leq m \leq n$ ,  $f$  et  $r_m$  vérifient 5.9.1 (où  $Y = X'_m$ ) et que  $r_{\bullet,\eta}$  soit un hyperrecouvrement propre  $n$ -tronqué.*

*Démonstration.* — (i) Cas  $X$  intègre et  $X_\eta$  géométriquement irréductible. Résulte de [14, 6.5]. Notons que l’hypothèse dans [ibid.] que  $S$  soit complet peut être remplacée par l’excellence de  $S$ , voir [19].

Cas général. On peut supposer que les composantes irréductibles de  $X_\eta$  sont géométriquement irréductibles. On fait une récurrence sur le nombre  $n$  de composantes irréductibles de  $X_\eta$ .

Si  $n = 0$ , alors  $X_\eta$  est vide. On prend  $S' = S$ ,  $X'_0 = \emptyset$ . (i) est évident.

Pour  $n \geq 1$ , on prend une composante irréductible  $U_1$  de  $X_\eta$ . Soit  $X_1$  l’adhérence de  $U_1$  dans  $X$ . C’est une composante irréductible de  $X$ . Soit  $X_2$  la réunion des autres composantes irréductibles de  $X$ . On munit  $X_1$  et  $X_2$  des structures de schéma réduit induites.  $(X_2)_\eta$  a  $n-1$  composantes irréductibles, qui sont géométriquement irréductibles. On a un morphisme fini surjectif  $X_1 \amalg X_2 \rightarrow X$ . On applique (i) à  $X_1$  et obtient  $S_1 \rightarrow S$  et  $(X_1)'_0 \rightarrow (X_1)_{S_1}$ . Il suffit alors d’appliquer l’hypothèse de récurrence à  $(X_2)_{S_1}$ .

(ii) On fait une récurrence sur  $n$ . Quand  $n = 0$ , (ii) dégénère en (i). Supposons donnés  $S_n \rightarrow S$  et  $r_\bullet^{(n)} : X_\bullet^{(n)} \rightarrow X_{S_n}$  vérifiant (ii). On applique (i) au schéma  $(\text{cosq}_n(X_\bullet^{(n)}/X_{S_n}))_{n+1}$  sur  $S_n$  (avec  $U$  remplacé par son image inverse) et obtient un morphisme fini de traits  $S' \rightarrow S_n$  et un morphisme  $\beta : N \rightarrow (\text{cosq}_n((X_\bullet^{(n)})_{S'}/X_{S'}))_{n+1}$  propre avec  $\beta_\eta$  surjectif vérifiant 5.9.1. Alors le  $X_{S'}$ -schéma simplicial  $(n+1)$ -tronqué  $s$ -scindé  $r_\bullet : X'_\bullet \rightarrow X_{S'}$  associé au triplet  $((X_\bullet^{(n)})_{S'}, N, \beta)$  vérifie les conditions de (ii) pour  $n+1$ . □

*Démonstration de 5.3.* — La démonstration est parallèle à celle de (2.5.1).

On fait une récurrence sur  $d = \dim X_\eta$ . Le cas  $d < 0$  est trivial.

Soit  $d \geq 0$ . Il faut montrer que pour  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse),  $R\Psi_X \mathcal{G}$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse).

On peut supposer  $X_\eta$  réduit. On peut supposer  $X$  affine, donc séparé. Choisissons  $j : U \hookrightarrow X_\eta$  ouvert régulier tel que  $\mathcal{G}|_U$  soit lisse et que son complémentaire  $Z = X_\eta - U$  soit de dimension  $< d$ . Soient  $\overline{Z}$  l’adhérence de  $Z$ ,  $i : \overline{Z} \hookrightarrow X$ . On a le triangle distingué

$$R\Psi_X i_{\eta*} Ri_\eta^! \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X \mathcal{G} \rightarrow R\Psi_X Rj_* j^* \mathcal{G} \rightarrow .$$

Comme  $R\Psi_X i_{\eta*} Ri_{\eta}^! \simeq i_{s*} R\Psi_{\overline{Z}} Ri_{\eta}^! \mathcal{G}$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse) en vertu de l'hypothèse de récurrence, il suffit de voir que  $R\Psi_X Rj_* j^* \mathcal{G}$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse).

Soit  $\mathcal{H} = j^* \mathcal{G}$ .  $\mathcal{H} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$  avec  $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$  lisse. Soit  $p : U' \rightarrow U$  un revêtement étale surjectif qui trivialise  $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ , où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ .  $\mathcal{H}$  est facteur direct de  $p_* p^* \mathcal{H}$ , de sorte qu'il suffit de voir l'intégralité (resp. la  $I$ -intégralité inverse) de  $R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H}$ . On factorise le composé  $U' \xrightarrow{jp} X_{\eta} \hookrightarrow X$  en  $U' \xrightarrow{j'} X' \xrightarrow{g} X$  où  $j'$  est une immersion ouverte et  $g$  propre.

$$R\Psi_X R(jp)_* p^* \mathcal{H} \simeq Rg_{s*} R\Psi_{X'} Rj'_{\eta*} p^* \mathcal{H}.$$

Donc il suffit de vérifier que pour  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $S$ ,  $j : U \hookrightarrow X_{\eta}$  un ouvert et  $\mathcal{G} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp. entier inverse),  $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E) \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$  avec  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$  constant, on a  $R\Psi_X Rj_* \mathcal{G}$  entier (resp.  $I$ -entier inverse).

Soit  $i \geq 0$ . On applique 5.10 (ii) à  $j$  et  $n = i + 1$ . On obtient un morphisme fini de traits  $f : S' \rightarrow S$  et un carré cartésien de schémas simpliciaux  $(i + 1)$ -tronqués  $s$ -scindés

$$\begin{array}{ccc} U'_{\bullet} & \hookrightarrow & X'_{\bullet} \\ \downarrow s_{\bullet} & & \downarrow r_{\bullet} \\ U_{S'} & \hookrightarrow & X_{S'} \end{array}$$

où  $s_{\bullet}$  est un hyperrecouvrement propre  $(i + 1)$ -tronqué et  $r_m$  vérifie 5.9.1,  $0 \leq m \leq i + 1$ . On note des changements de base de  $f$  encore par  $f$ .

$$f^* R\Psi_{X/S} Rj_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} f^* Rj_* \mathcal{G} \simeq R\Psi_{X_{S'}/S'} Rj_{S'*} \mathcal{G}_{S'},$$

donc

$$\begin{aligned} \tau_{\leq i} f^* R\Psi_{X/S} Rj_* \mathcal{G} &\simeq \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} Rj_{S'*} R s_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'} \\ &= \tau_{\leq i} R\Psi_{X_{S'}/S'} R r_{\bullet*} R j'_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'} \simeq \tau_{\leq i} R r_{\bullet*} R \Psi R j'_{\bullet*} s_{\bullet}^* \mathcal{G}_{S'}. \end{aligned}$$

Il suffit de voir que  $R\Psi_{X'_m/S'} Rj'_{m*} s_m^* \mathcal{G}_{S'}$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse),  $0 \leq m \leq i$ . Il suffit alors d'appliquer 5.8 (ce qui est licite, car les  $s_m^* \mathcal{G}_{S'}$  sont modérés).  $\square$

VARIANTE 5.11. — Soient  $S, \eta, s, l$  comme dans 5.2. Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $S$ ,  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . Pour  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{F}$  est dit  $r$ -entier (resp.  $r$ -entier inverse) si  $\mathcal{F}_{\eta}$  et  $\mathcal{F}_s$  le sont. De même pour les complexes. On prend

$$\delta(X) = \max\{\dim X_{\eta} + 1, \dim X_s\},$$

$D_X = R\text{Hom}(-, Ra_X^! \overline{\mathbb{Q}}_l(1)[2])$ , où  $a_X : X \rightarrow S$ . On a les analogues de 2.4 à 2.8, 4.8, 4.9, en remplaçant  $\dim$  par  $\delta$ ,  $d_r$  par

$$\max_{y \in |Y_\eta| \cup |Y_s|} \dim f^{-1}(y).$$

On a aussi un analogue de 3.8 en ajoutant l'hypothèse que  $(X, D)$  est un couple semi-stable sur  $S$ .

En effet, 2.4 pour  $S$  découle trivialement de 2.4 pour  $s$  et pour  $\eta$ . Pour l'analogue de 3.8, soit  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(U, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  lisse, entier, modérément ramifié sur  $X$ . D'après 3.8 pour  $\eta$  et 5.8,  $Ru_*\mathcal{F}$  et  $R\Psi_X Ru_*\mathcal{F}$  sont  $I$ -entiers, où  $u : U \hookrightarrow X_\eta$ . Soit  $I = \text{Ker}(\text{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \rightarrow \text{Gal}(\overline{s}/s))$  le groupe d'inertie. C'est une extension de  $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$  par un pro- $p$ -groupe  $P$ . La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q\Psi_X Ru_*\mathcal{F}) \Rightarrow i^* R^{p+q} j_*\mathcal{F},$$

où  $i : X_s \rightarrow X$ . Soit  $R_t^q = (R^q\Psi_X Ru_*\mathcal{F})^P$ . Si  $\sigma$  est un générateur de  $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$ , on a

$$E_2^{0,q} = \text{Ker}(\sigma - 1, R_t^q), \quad E_2^{1,q} = \text{Coker}(\sigma - 1, R_t^q)(-1),$$

et  $E_2^{p,q} = 0$  pour  $p \neq 0, 1$ . Donc  $Rj_*\mathcal{F}$  est  $I$ -entier.

Les résultats (2.5.1) et (2.5.3) pour  $S$  découlent de ces résultats pour  $s$  et pour  $\eta$  et de 5.3, en imitant les arguments dans [4, Th. finitude, 3.11, 3.12] comme suit. Le cas spécial  $f = j_Y : Y_\eta \hookrightarrow Y$  résulte de 5.3 et de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(I, R^q\Psi_Y -) \Rightarrow i_Y^* R^{p+q} j_{Y*} -,$$

où  $i_Y : Y_s \rightarrow Y$ . Traitons le cas général. Soit  $L \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  entier (resp.  $I$ -entier inverse). Soient  $i_X : X_s \rightarrow X$ ,  $j_X : X_\eta \hookrightarrow X$ . On a les triangles distingués

$$\begin{aligned} i_{X*} Ri_X^! L \rightarrow L \rightarrow Rj_{X*} j_X^* L \rightarrow, \\ R(fi_X)_* Ri_X^! L \rightarrow Rf_* L \rightarrow R(fj_X)_* j_X^* L \rightarrow. \end{aligned}$$

D'après le cas spécial,  $Rj_{X*} j_X^* L$  est entier (resp.  $I$ -entier inverse), donc  $Ri_X^! L$  l'est aussi. Comme  $fi_X = i_Y f_s$ ,  $fj_X = j_Y f_\eta$ , on conclut en appliquant (2.5.1) (resp. (2.5.3)) pour  $s$  et pour  $\eta$  et le cas spécial.

Une fois (2.5.1) et (2.5.3) établis pour  $S$ , on peut refaire 4.6 à 4.9 et 4.11, donnant la démonstration de 2.5 à 2.8, sauf (2.6.1) et (2.6.3). Les résultats (2.6.1) et (2.6.3) pour  $S$  découlent de leurs analogues pour  $s$  et pour  $\eta$ , en appliquant 4.6 pour  $S$  et (4.10.1) à  $U = Y_\eta$ ,  $W = Y_s$ . Notons que (2.7.3) et (2.7.1) pour  $S$  peuvent aussi se déduire de leurs analogues pour  $s$  et pour  $\eta$ , en appliquant (4.7.1) à  $U = X_\eta$ ,  $V = X_s$ .

VARIANTE 5.12. — On peut remplacer les faisceaux usuels partout par des faisceaux de Weil [5, 1.1.10]. Tous les résultats et les variantes qui précèdent restent valables.

VARIANTE 5.13. — Soit  $A$  un sous-anneau intégralement fermé de  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ . On pose

$$A^{-1} = \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}_l}^\times \mid \alpha^{-1} \in A \right\}.$$

On fixe un plongement  $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ . Avec les notations du § 1, pour  $r \in \mathbb{Q}$ , un  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceau  $\mathcal{F}$  sur un schéma  $X$  de type fini sur  $\eta$  est dit  $r$ - $A$ -entier (resp.  $r$ - $A$ -entier inverse) si pour tout  $x \in |X|$ , les valeurs propres de  $\Phi_x$  sont dans  $\iota(q^r)A$  (resp.  $\iota(q^r)A^{-1}$ ), où  $q = \#\kappa(x)$ . Cette définition ne dépend pas des choix de  $\Phi_x$  et de  $\iota$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est  $A$ -entier (resp.  $A$ -entier inverse) s'il est  $0$ - $A$ -entier (resp.  $0$ - $A$ -entier inverse). On définit aussi la  $A$ -intégralité des complexes. Tous les résultats et les variantes restent valables pour ces notions.

Si  $A$  est de plus complètement intégralement clos [3, V, § 1, n° 4, déf. 5] (en particulier si  $A$  est la fermeture intégrale d'un sous-anneau noethérien intégralement clos de  $\overline{\mathbb{Q}_l}$  [*ibid.*, exerc. 14]), alors d'après un lemme de Fatou [13, 8.3],  $\mathcal{F}$  est  $r$ - $A$ -entier si et seulement si pour tout  $x \in |X|$  et tout entier  $n \geq 1$ ,  $\text{Tr}(\Phi_x^n, \mathcal{F}_{\bar{x}})$  appartient à  $\iota(q^{nr})A$ . Ce critère n'a pas d'analogue pour les faisceaux entiers inverses.

Si on prend pour  $A$  la fermeture intégrale de  $\mathbb{Z}$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ , on retrouve la notion d'intégralité dans ce qui précède.

Soit  $T$  un ensemble de nombres premiers. Si on prend pour  $A$  la fermeture intégrale de  $\mathbb{Z}[1/t]_{t \in T}$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ , on retrouve la notion de  $T$ -intégralité dans [22, XXI 5] et [7].

## 6. Appendice : Intégralité sur les champs algébriques

Soient  $K$  un corps fini de caractéristique  $p$  ou un corps local de caractéristique résiduelle  $p$ ,  $\eta = \text{Spec } K$ ,  $l$  un nombre premier  $\neq p$ . Pour  $\mathcal{X}$  un  $\eta$ -champ algébrique [16, 4.1] de type fini, on note  $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$  la catégorie des  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -faisceaux constructibles sur le site lisse-étale de  $\mathcal{X}$  [*ibid.*, 12.1 (i)]. On dispose, par [15], d'une catégorie triangulée  $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$  munie d'une  $t$ -structure de cœur  $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ . On écrira  $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$  pour  $\text{Mod}_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$  et  $D_c(\mathcal{X})$  pour  $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ . On dispose d'un formalisme de six opérations : pour  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme

de  $\eta$ -champs algébriques de type fini,

$$\begin{aligned}
 D_{\mathcal{X}} &: D_c(\mathcal{X})^\circ \rightarrow D_c(\mathcal{X}), \\
 - \otimes - &: D_c^-(\mathcal{X}) \times D_c^-(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^-(\mathcal{X}), \\
 R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}}(-, -) &: D_c^-(\mathcal{X})^\circ \times D_c^+(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^+(\mathcal{X}), \\
 Rf_* &: D_c^+(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y}), \\
 Rf_! &: D_c^-(\mathcal{X}) \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y}), \\
 f^*, Rf^! &: D_c(\mathcal{Y}) \rightarrow D_c(\mathcal{X}).
 \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{X}$  est un  $\eta$ -champ de Deligne-Mumford de type fini,  $\text{Mod}_c(\mathcal{X})$  s'identifie à la catégorie des  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux constructibles sur le site *étale* de  $\mathcal{X}$  [16, 12.1 (ii)].

DÉFINITION 6.1. — Soit  $\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  une fonction. On dit que  $L \in D_c(\mathcal{X})$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse) si pour tout point  $i : x \rightarrow \mathcal{X}$  avec  $\kappa(x)$  une extension finie de  $K$  et tout  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{H}^a(i^*L) \in \text{Mod}_c(x, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  est  $\epsilon(a)$ -entier (resp.  $\epsilon(a)$ -entier inverse) (au sens de 2.1).

Si  $\mathcal{X}$  est un schéma de type fini sur  $\eta$  et  $L \in D_c^b$ , alors cette définition coïncide avec 2.2.

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de  $\eta$ -champs algébriques de type fini. Si  $M \in D_c(\mathcal{Y})$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse), il en est de même de  $f^*M \in D_c(\mathcal{X})$ . La réciproque est vraie lorsque  $f$  est surjectif. Cela donne le critère suivant :  $L \in D_c^b(\mathcal{X})$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse) si et seulement si pour tout (ou pour un) morphisme surjectif  $g : X \rightarrow \mathcal{X}$  avec  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ ,  $g^*L$  est  $\epsilon$ -entier (resp.  $\epsilon$ -entier inverse) (au sens de 2.2). Pour  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $- \otimes -$  induit

$$\begin{aligned}
 D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}}, \\
 D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}} \times D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^-(\mathcal{X})_{rI\text{-ent}^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Pour  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})$  avec  $\mathcal{F}$  lisse, si  $\mathcal{F}$  est entier inverse (resp. entier) et  $\mathcal{G}$  est entier (resp. entier inverse), on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}} \text{ (resp. } \in \text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}).$$

On suppose dorénavant que  $\mathcal{X}$  est non vide. Rappelons qu'une présentation  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$  est un morphisme surjectif lisse avec  $X$  un espace algébrique. On pose  $c_{\mathcal{X}} = \min_P \dim P \in \mathbb{N}$ , où  $P$  parcourt les présentations  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\dim P = \sup_{x \in X} \dim_x P$  [16, p. 98],  $d_{\mathcal{X}} = \dim \mathcal{X} \in \mathbb{Z}$  [*ibid.*, (11.15)]. Par définition,  $d_{\mathcal{X}} \geq -c_{\mathcal{X}}$ . On a  $c_{\mathcal{X}} = 0$  si et seulement si  $\mathcal{X}$  est un  $\eta$ -champs de

Deligne-Mumford. On pose  $c_r = \min \dim P \in \mathbb{N}$ , où le minimum est pris sur tous les systèmes

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des présentations et le carré est 2-cartésien,  $d_r = \dim f = \max_{\xi} \dim \mathcal{X}_{\xi} \in \mathbb{Z}$ , où  $\xi$  parcourt les points de  $\mathcal{Y}$ . On a  $d_r \geq -c_r$ . Rappelons que  $f$  est dit *relativement de Deligne-Mumford* [ibid., 7.3.3] si pour tout schéma affine  $Y$  et tout morphisme  $Y \rightarrow \mathcal{Y}$ , le produit fibré  $Y \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$  est un  $\eta$ -champ de Deligne-Mumford. On a  $c_r = 0$  si et seulement si  $f$  est un morphisme relativement de Deligne-Mumford. On a  $c_r \leq c_{\mathcal{X}} \leq c_{\mathcal{Y}} + c_r$ ,  $d_r - c_{\mathcal{Y}} \leq d_{\mathcal{X}} \leq d_{\mathcal{Y}} + d_r$ .

PROPOSITION 6.2. — *Le foncteur  $D_{\mathcal{X}}$  induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I-c_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\circ} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{c_{\mathcal{X}}\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

De plus, pour  $\mathcal{F} \in \text{Mod}_c(X)_{\text{ent}^{-1}}$ ,  $\mathcal{H}^a(D_{\mathcal{X}}\mathcal{F})$  est  $(a - c_{\mathcal{X}} + 1)$ -entier,  $a \leq c_{\mathcal{X}} - 1$ .

*Démonstration.* — On prend une présentation  $P : X \rightarrow \mathcal{X}$  purement de dimension  $c_{\mathcal{X}}$  avec  $X$  un schéma de type fini sur  $\eta$ . On a  $\dim X \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}}$ . Pour  $L \in D_c(\mathcal{X})$ ,  $P^*D_{\mathcal{X}}L \simeq D_X R P^*L \simeq (D_X P^*L)(-c_{\mathcal{X}})[-2c_{\mathcal{X}}]$ . Comme l'amplitude cohomologique de  $D_X$  est bornée, il suffit donc d'appliquer 2.7.  $\square$

PROPOSITION 6.3. — *Le foncteur  $Rf^!$  induit*

$$\begin{aligned} D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{-d_r\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I-d_{\mathcal{Y}}-c_{\mathcal{Y}}-c_r)\text{-ent}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(I+d_r)\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c(\mathcal{Y})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{Y}}+c_{\mathcal{Y}}+c_r)\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Formons le diagramme à carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y & \xrightarrow{Q'} & \mathcal{X} \\ & & \downarrow f_Y & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où  $Q$  est une présentation purement de dimension  $c_Y$ ,  $P$  est une présentation purement de dimension  $c_r$ ,  $Y$  est un schéma quasi-compact,  $X$  est un schéma affine (donc séparé sur  $Y$ ). On a  $\dim Y \leq d_Y + c_Y$ ,  $\dim(f_Y \circ P) \leq d_r + c_r$ . Pour  $L \in D_c(\mathcal{Y})$ ,

$$(Q' \circ P)^* Rf^! L \simeq P^* Rf_Y^! Q^* L \simeq R(f_Y \circ P)^! Q^* L(-c_r)[-2c_r].$$

Il suffit alors d'appliquer 2.6. □

PROPOSITION 6.4. — *Le foncteur  $Rf_*$  induit*

$$(6.4.1) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.2) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}},$$

*et  $Rf_!$  induit*

$$(6.4.3) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_r)\text{-ent}},$$

$$(6.4.4) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{d_r\text{-ent}^{-1}}.$$

*Si  $f$  est relativement de Deligne-Mumford,  $Rf_*$  induit*

$$(6.4.5) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_X-c_Y)\text{-ent}},$$

$$(6.4.6) \quad D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} \rightarrow D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_X+c_Y)\text{-ent}^{-1}},$$

*et  $Rf_!$  induit*

$$(6.4.7) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{\text{ent}},$$

$$(6.4.8) \quad D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} \rightarrow D_c^-(\mathcal{Y})_{I\text{-ent}^{-1}}.$$

*Démonstration.* — Soit  $Y \rightarrow \mathcal{Y}$  une présentation avec  $Y$  est un schéma de type fini sur  $\eta$ . Pour (6.4.1) et (6.4.2), quitte à remplacer  $\mathcal{Y}$  par  $Y$ , on peut supposer que  $\mathcal{Y}$  est un schéma. On prend un hyperrecouvrement lisse  $P_\bullet : X_\bullet \rightarrow \mathcal{X}$  où les  $X_n$  sont des schémas affines (donc séparés sur  $\mathcal{Y}$ ). Pour  $L \in D_c^+(\mathcal{X})$ ,  $Rf_* \xrightarrow{\sim} Rf_* RP_{\bullet*} P_\bullet^* L$ . Il suffit alors d'appliquer (2.5.1) et (2.5.3).

Pour les résultats concernant  $Rf_!$ , on peut supposer que  $\mathcal{Y}$  est le spectre d'un corps. On a  $d_X = d_r$ . Alors (6.4.3) et (6.4.4) découlent du dernier alinéa et de 6.2 :  $Rf_! = D_Y Rf_* D_X$  induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_X} D_c^+(\mathcal{X})_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \xrightarrow{Rf_*} \\ &\xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I+d_X)\text{-ent}^{-1}}^\circ \xrightarrow{D_Y} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I-d_X)\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_X} D_c^+(\mathcal{X})_{-d_X\text{-ent}}^\circ \xrightarrow{Rf_*} D_c^+(\mathcal{Y})_{-d_X\text{-ent}}^\circ \xrightarrow{D_Y} D_c^-(\mathcal{Y})_{d_X\text{-ent}}. \end{aligned}$$

Pour (6.4.7) et (6.4.8), on est donc ramené au cas où  $\mathcal{X}$  est un  $\eta$ -champ de Deligne-Mumford. On fait une récurrence sur  $d_X$ . Il existe une immersion ouverte dominante  $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$  et un morphisme fini étale  $\pi : U \rightarrow \mathcal{U}$ , où  $U$  est

un schéma affine [16, 6.1.1]. Soient  $\mathcal{Z}$  le fermé complémentaire de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{X}$ ,  $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ . Pour  $L \in D_c^-(\mathcal{X})$ , le triangle distingué

$$j_!j^*L \rightarrow L \rightarrow i_*i^*L \rightarrow$$

induit le triangle distingué

$$R(fj)_!j^*L \rightarrow Rf_!L \rightarrow R(fi)_!i^*L \rightarrow .$$

Comme  $j^*L$  est facteur direct de  $\pi_*\pi^*j^*L$ , il suffit d'appliquer (2.4.1) et (2.4.3) à  $R(fj\pi)_!(j\pi)^*L$  et l'hypothèse de récurrence à  $R(fi)_!j^*L$ .

Enfin, (6.4.5) et (6.4.6) résultent du dernier alinéa et de 6.2 :  $Rf_* \simeq D_{\mathcal{Y}}Rf_!D_{\mathcal{X}}$  induit

$$\begin{aligned} D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_!} \\ &\xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{(I+d_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}, \\ D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\xrightarrow{D_{\mathcal{X}}} D_c^-(\mathcal{X})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{Rf_!} D_c^-(\mathcal{Y})_{-d_{\mathcal{X}}\text{-ent}}^{\circ} \xrightarrow{D_{\mathcal{Y}}} D_c^+(\mathcal{Y})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 6.5. — L'assertion (2.5.2) est vraie sans hypothèse de séparation.

Démonstration. — C'est un cas particulier de (6.4.5). □

REMARQUE. — (i) Le premier alinéa de la démonstration de 6.4 montre que  $Rf_*$  envoie  $\text{Mod}_c(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}$  dans  $D_c^+(\mathcal{Y})_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$ , où

$$\epsilon(a) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}, \\ a - E\left(\frac{a-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}}}{c_{\mathcal{X}}+1}\right) & \text{si } a \geq d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}}. \end{cases}$$

Ici  $E$  est la fonction partie entière. Lorsque  $f$  n'est pas relativement de Deligne-Mumford, ceci légèrement améliore (6.4.2). On peut en déduire une légère amélioration de (6.4.3).

(ii) Si  $f$  est un morphisme séparé, représentable et quasi-fini [16, 3.10.1] avec  $d_{\mathcal{X}} + c_{\mathcal{Y}} \geq 1$ , on a un analogue de 4.8 qui améliore (6.4.5) :  $Rf_*$  envoie  $D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}$  dans  $D_c^+(\mathcal{Y})_{(I+1-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{Y}})\text{-ent}}$ .

PROPOSITION 6.6. — Le foncteur  $R\mathcal{H}om(-, -)$  induit

$$\begin{aligned} D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(I-d_{\mathcal{X}}-c_{\mathcal{X}})\text{-ent}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{I\text{-ent}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{I\text{-ent}^{-1}}, \\ D_c^-(\mathcal{X})_{\text{ent}}^{\circ} \times D_c^+(\mathcal{X})_{\text{ent}^{-1}} &\rightarrow D_c^+(\mathcal{X})_{(d_{\mathcal{X}}+c_{\mathcal{X}})\text{-ent}^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. — On procède comme en 4.11. □

On peut aussi considérer l'intégralité sur les champs algébriques sur un trait excellent de corps résiduel fini, ce qui généralise 5.11. Les résultats sont similaires à ceux exposés dans ce §, avec des modifications appropriées des estimations de dimension.

Les variantes 5.12 et 5.13 restent toujours valables.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, 1982, p. 5–171.
- [2] P. BERTHELOT & A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, 1978.
- [3] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, chapitres V à VII*, Éléments de mathématique, Masson, 1985.
- [4] P. DELIGNE – *Cohomologie étale (SGA 4d)*, LNM, vol. 569, Springer, 1977.
- [5] ———, « La conjecture de Weil. II », *Publ. Math. I.H.É.S.* **52** (1980), p. 137–252.
- [6] T. EKEDAHL – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 197–218.
- [7] H. ESNAULT – « Deligne's integrality theorem in unequal characteristic and rational points over finite fields », avec un appendice par P. Deligne et H. Esnault, *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 715–730.
- [8] K. FUJIWARA – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 153–183.
- [9] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tōhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.
- [10] ———, « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas », *Publ. Math. I.H.É.S.* **20, 24, 28, 32** (1964–1967).
- [11] L. ILLUSIE – « Sur la formule de Picard-Lefschetz », in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 249–268.
- [12] ———, « On semistable reduction and the calculation of nearby cycles », in *Geometric aspects of Dwork theory*, vol. II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 785–803.

- [13] ———, « Miscellany on traces in  $l$ -adic cohomology : a survey », *Jpn. J. Math. (3)* **1** (2006), p. 107–136.
- [14] A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 51–93.
- [15] Y. LASZLO & M. OLSSON – « The six operations for sheaves on Artin stacks II: adic coefficients », preprint [arXiv:math/0603680](https://arxiv.org/abs/math/0603680), 2006.
- [16] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Springer, 2000.
- [17] F. ORGOGOZO – « Altérations et groupe fondamental premier à  $p$  », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), p. 123–147.
- [18] J-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, 5<sup>e</sup> éd., Hermann, 1998.
- [19] W. ZHENG – « Sur l'indépendance de  $l$  en cohomologie  $l$ -adique sur les corps locaux », en préparation.
- [20] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, dirigé par A. Grothendieck, Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.
- [21] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, LNM, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972–1973.
- [22] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7)* – Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, I, dirigé par A. Grothendieck : II, par P. Deligne, N. Katz, LNM, vol. 288, 340, Springer, 1972–1973.