Bull. Soc. math. France
130 (4), 2002, p. 587–602

UNE CARACTÉRISATION DE LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE POUR GL(n)

par Guy Henniart

Résumé. — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien et ψ un caractère non trivial du groupe additif de F. La correspondance de Langlands locale donne, pour chaque entier $n \geq 1$, une bijection $\sigma \mapsto \pi_n(\sigma)$ de l'ensemble $\mathcal{G}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne de F sur l'ensemble $\mathcal{A}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$. La bijection π_1 est donnée par la théorie locale du corps de classes, et pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$, on a

$$L(s, \sigma \otimes \sigma') = L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma')),$$
$$\varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), \psi).$$

Nous prouvons que ces propriétés caractérisent la famille d'applications (π_n).

Texte reçu le 18 septembre 2001, accepté le 13 décembre 2001

Guy Henniart, Département de Mathématiques et UMR 8628 du CNRS, Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex (France) • *E-mail :* `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50.

Mots clefs. — Corps local, correspondance de Langlands, fonction L, facteur ε.

J'ai écrit le présent article durant un congé pour recherches et conversion thématique accordé par l'Université de Paris-Sud, et alors que je profitais de l'hospitalité généreuse de l'Institute for Advanced Study à Princeton. Je tiens à remercier ces deux institutions.

Abstract (*A characterization of the local Langlands correspondence for* GL(n))

Let F be a locally compact non-Archimedean field and ψ a non-trivial additive character of F. The local Langlands correspondence gives for each positive integer n a one-to-one map $\sigma \mapsto \pi_n(\sigma)$ from the set $\mathcal{G}_F(n)$ of isomorphism classes of degree n representations of the Weil-Deligne group of F onto the set $\mathcal{A}_F(n)$ of isomorphism classes of smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}_n(F)$. Class-field theory gives the map π_1 and for $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$, we have

$$L(s, \sigma \otimes \sigma') = L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma')),$$
$$\varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), \psi).$$

We prove that such properties characterize the family of maps (π_n).

1. Introduction

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Fixons un caractère non trivial ψ du groupe additif de F, et une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F. Nous notons W_F le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F, et W'_F le groupe de Weil-Deligne. Par représentation de W_F ou W'_F, nous entendons représentation complexe Φ-semisimple, de dimension finie (voir [10, § 4]). Pour chaque entier $n \geq 1$, nous notons $\mathcal{G}(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de dimension n de W'_F, et $\mathcal{G}^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de W_F ; nous notons également $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathcal{A}^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations lisses irréductibles supercuspidales.

Pour $n = 1$, la théorie locale du corps de classes donne une bijection $\sigma \mapsto \pi_1(\sigma)$ de $\mathcal{G}(1)$ sur $\mathcal{A}(1)$. Nous normalisons l'application de réciprocité de sorte que les éléments de Frobenius géométriques de W_F correspondent aux uniformisantes de $F^\times$.

Les conjectures de Langlands pour GL_n sur F prédisent l'existence pour chaque entier $n \geq 2$ de bijections naturelles $\sigma \mapsto \pi_1(\sigma)$ de $\mathcal{G}^0(n)$ sur $\mathcal{A}^0(n)$. Ces conjectures sont maintenant prouvées, par Laumon, Rapoport et Stuhler [7] quand F est de caractéristique non nulle, et par Harris et Taylor [2], voir aussi [4], [5], si F est de caractéristique nulle.

On peut caractériser cette famille de bijections — ce qui précise le mot naturel employé plus haut — par la préservation d'invariants, les facteurs L et ε de paires.

1.2. Pour une représentation σ de W'_F, nous notons $L(s, \sigma)$ sa fonction L d'Artin et $\varepsilon(s, \sigma, \psi)$ le facteur local défini par Langlands et Deligne, *cf.* [10, § 4]. Pour une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$ et une représentation lisse irréductible π' de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, nous notons $L(s, \pi \times \pi')$ et $\varepsilon(s, \pi \times \pi', \psi)$ les facteurs définis par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [6] ou par Shahidi (voir [8], [9]). Si q est le cardinal du corps résiduel de F, les facteurs L sont de la forme $P(q^{-s})^{-1}$, où P est un polynôme à coefficients complexes de terme constant égal à 1, tandis que les facteurs ε sont de la forme αq^{-ms} avec $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $m \in \mathbb{Z}$. On note également $\sigma^\vee$ ou $\pi^\vee$ la contragrédiente de σ ou π comme plus haut. On pose aussi

$$\gamma(s,\sigma,\psi) = \varepsilon(s,\sigma,\psi)\frac{L(1-s,\sigma^\vee)}{L(s,\sigma)},$$

et de même pour $\pi \times \pi'$.

Remarque. — Ces facteurs L, ε et γ ne dépendent que des classes d'isomorphisme des représentations en question. On peut former le produit tensoriel $\sigma \otimes \sigma' \in \mathcal{G}(nn')$ d'un élément σ de $\mathcal{G}(n)$ par un élément σ' de $\mathcal{G}(n')$ et considérer la contragrédiente $\sigma^\vee \in \mathcal{G}(n)$ (resp. $\pi^\vee \in \mathcal{A}(n)$) d'un élément σ de $\mathcal{G}(n)$ (resp. $\pi \in \mathcal{A}(n)$).

1.3. Les conjectures de Langlands prouvées dans [7], [2], [4], [5] peuvent s'énoncer de la façon suivante.

Théorème. — *Il existe une famille d'applications $(\pi_n^0)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{G}^0(n)$ dans $\mathcal{A}^0(n)$, π_1^0 étant donnée par la théorie locale du corps de classes, qui vérifie les identités suivantes quels que soient les entiers n, $n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}^0(n')$:*

$$\pi_n^0(\sigma^\vee) = \pi_n^0(\sigma)^\vee, \quad \varepsilon\big(s, \pi_n^0(\sigma) \times \pi_{n'}^0(\sigma'), \psi\big) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Ces applications sont bijectives.

1.4. En fait, la famille d'applications du théorème 1.3 est unique. Cela découle, par récurrence sur l'entier $n \geq 2$, du résultat suivant de l'auteur [3, cor. du th. 1.1].

Théorème. — *Soit n un entier, $n \geq 2$, et soient π, π' des éléments de $\mathcal{A}^0(n)$. Si l'on a*

$$\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \rho, \psi)$$

pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, alors $\pi = \pi'$.

Remarque. — Pour r, ρ comme dans le théorème, on a (*cf.* [6, 8.1])

$$L(s, \pi \times \rho) = L(s, \pi^\vee \times \rho^\vee) = 1$$

de sorte que $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$.

Grâce au théorème 1.3, on peut traduire le résultat précédent en termes de représentations galoisiennes.

COROLLAIRE. — *Soit n un entier, $n \geq 2$, et soient σ, σ' deux éléments de $\mathcal{G}^0(n)$. Si l'on a*

$$\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi) = \gamma(s, \sigma' \otimes \tau, \psi)$$

pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, alors $\sigma = \sigma'$.

Aucune démonstration directe de ce corollaire n'est connue.

1.5. On sait depuis longtemps, grâce aux classifications de Langlands et Zelevinski, *cf.* [1], [11], étendre de façon naturelle les bijections précédentes π_n^0 en des bijections π_n de $\mathcal{G}(n)$ sur $\mathcal{A}(n)$. La construction en sera rappelée au § 2, où sera établie également l'assertion suivante.

THÉORÈME. — *La famille de bijections $(\pi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{G}(n)$ sur $\mathcal{A}(n)$ vérifie :*

(i) $\pi_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ *pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$;*

(ii) $\pi_n(\sigma^\vee) = \pi_n^0(\sigma)^\vee$ *pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$;*

(iii) *quels que soient les entiers n, $n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n')$, on a*

$$L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_n(\sigma')) = L(s, \sigma \otimes \sigma'),$$
$$\varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_n(\sigma'), \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Noter que pour $n = 1$ on a $\mathcal{G}(1) = \mathcal{G}^0(1)$, $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}^0(1)$ et que par conséquent $\pi_1 = \pi_1^0$ est donnée par la théorie locale du corps de classes.

Il est naturel de se demander si les conditions imposées suffisent à assurer l'unicité de la famille d'applications (π_n). Un tel résultat d'unicité est connu de l'auteur depuis longtemps, avant même que la théorie des facteurs locaux de paires fût établie. Puisque les conjectures de Langlands sont maintenant prouvées, publier la preuve du résultat d'unicité est justifié. C'est ce que propose le présent article, remplissant ainsi une promesse de [5, § 7, propriété 5]. Avec [5, § 3], on dispose maintenant de la totalité de la rédaction prévue lors de [3] (référence [He] dans [3]).

1.6. Nous caractérisons tout d'abord l'image des représentations irréductibles de W_F.

THÉORÈME. — *Soit n un entier ≥ 2, et soient $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\pi \in \mathcal{A}(n)$.*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

 (i) $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$ *;*

 (ii) *pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, on a $L(s, \sigma \otimes \tau) = 1$;*

 (iii) *pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, $\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi)$ est un monôme en q^{-s}.*

(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

 (i) $\pi \in \mathcal{A}^0(n)$ *;*

 (ii) *pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, on a $L(s, \pi \otimes \rho) = 1$;*

(iii) *pour* $r = 1, \dots, n-1$ *et* $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, $\gamma(s, \pi \otimes \rho, \psi)$ *est un monôme en* q^{-s}.

Corollaire. — *Soit* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *une famille d'applications* τ_n *de* $\mathcal{G}(n)$ *dans* $\mathcal{A}(n)$ *qui vérifie :*

(i) τ_1 *est donnée par la théorie locale du corps de classes ;*

(ii) *quels que soient les entiers* n, $n' \geq 1$ *et* $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n')$, *on a*

$$L(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma')) = L(s, \sigma \otimes \sigma'),$$
$$\varepsilon(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma'), \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Alors pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, *on a* $\tau_n(\sigma) \in \mathcal{A}^0(n)$ *et* $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$.

Le corollaire s'établit facilement par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ (*cf.* § 3).

1.7. L'essentiel est ensuite de caractériser l'image de chaque représentation de W'_F dont la restriction à W_F n'est pas irréductible. Il se trouve qu'il suffit de très peu d'information pour ce faire.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{G}^2(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de W'_F, et $\mathcal{A}^2(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$. Soient r et n deux entiers ≥ 1 ; pour $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, on note $v_r(\sigma)$ l'application de $\mathcal{G}^2(r)$ dans $\mathbb{N}$ qui à $\tau \in \mathcal{G}^2(r)$ associe l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(s, \sigma \otimes \tau)$; pour $\pi \in \mathcal{G}(n)$, on note $v_r(\pi)$ l'application de $\mathcal{A}^2(r)$ dans $\mathbb{N}$ qui à $\rho \in \mathcal{A}^2(r)$ associe l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(s, \pi \times \rho)$.

Théorème. — *Soit* n *un entier* ≥ 2, *et soient* $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n)$, $\pi \in \mathcal{A}(n) - \mathcal{A}^0(n)$, $\pi' \in \mathcal{A}(n)$.

(a) *Supposons que pour* $r = 1, \dots, n-1$, *on ait* $v_r(\sigma) = v_r(\sigma')$. *Alors* $\sigma = \sigma'$.

(b) *Supposons que pour* $r = 1, \dots, n-1$, *on ait* $v_r(\pi) = v_r(\pi')$. *Alors* $\pi = \pi'$.

En fait la méthode de démonstration du théorème permet de reconstituer σ ou π à partir des fonctions $v_r(\sigma)$ (ou $v_r(\pi)$). Voir le § 4.

1.8. Notre résultat principal découle facilement du théorème 1.7 (§ 4.5 et *sq.*)

Théorème. — *Soit* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *une famille d'applications de* $\mathcal{G}(n)$ *dans* $\mathcal{A}(n)$ *qui vérifie :*

(i) $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ *pour* $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $n \geq 1$ *;*

(ii) *quels que soient les entiers* r, n *vérifiant* $1 \leq r < n$, *et quels que soient* $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, $\tau \in \mathcal{G}^2(r)$, *on a*

$$L\bigl(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_r(\tau)\bigr) = L(s, \sigma \otimes \tau).$$

Alors on a $\tau_n = \pi_n$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

Le résultat d'unicité de la correspondance de Langlands étendue à $\mathcal{G}(n)$ découle aussitôt de 1.4 et du théorème ci-dessus.

COROLLAIRE. — *Soit* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *une famille d'applications de* $\mathcal{G}(n)$ *dans* $\mathcal{A}(n)$ *qui vérifie :*

(i) $\tau_1 = \pi_1^0$ *;*

(ii) *quels que soient les entiers* n, $n' \geq 1$ *et* $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n')$, *on a*

$$L\big(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma')\big) = L(s, \sigma \otimes \sigma'),$$
$$\varepsilon(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma'), \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Alors on a $\tau_n = \pi_n$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

1.9. Rappelons qu'on a un résultat d'unicité plus fort que le théorème 1.4 [3, Thm. 1.1].

COROLLAIRE. — *Soit* n *un entier* ≥ 2, *et soient* π, π' *des éléments* ***génériques*** *de* $\mathcal{A}(n)$. *Si l'on a*

$$\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \rho, \psi)$$

pour $r = 1, \ldots, n-1$ *et* $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, *alors* $\pi = \pi'$.

Il est naturel de demander quelle information ces facteurs $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi)$ donnent sur $\pi \in \mathcal{A}(n)$, même quand π n'est pas supposé générique.

PROPOSITION. — *Soit* n *un entier* ≥ 2, *et soient* $\pi, \pi' \in \mathcal{A}(n)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \rho, \psi)$ *pour* $r = 1, \ldots, n-1$ *et* $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$ *;*

(ii) π *et* π' *ont même support supercuspidal.*

En fait, comme pour le théorème 1.7, une information sur l'ordre en $s = 0$ de $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi)$ suffit si $\pi \in \mathcal{A}(n) - \mathcal{A}^0(n)$. Voir le § 5 pour les détails.

COROLLAIRE. — *Soit* n *un entier* ≥ 2, *et* $\sigma, \sigma' \in \mathcal{G}(n)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi) = \gamma(s, \sigma' \otimes \tau, \psi)$ *pour* $r = 1, \ldots, n-1$ *et* $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$ *;*

(ii) *les restrictions de* σ *et* σ' *à* W_F *sont isomorphes.*

1.10. Une question s'impose : y-a-t-il des résultats analogues à tout ce qui précède pour un corps *archimédien* F ? La réponse est oui, nous y reviendrons à une autre occasion.

1.11. Au § 2, nous décrivons la classification de $\mathcal{G}(n)$ et $\mathcal{A}(n)$ à partir des ensembles $\mathcal{G}^0(r)$ et $\mathcal{A}^0(r)$ pour $r = 1, \ldots, n$, et rappelons la construction des applications π_n. Au § 3, nous caractérisons les éléments de $\mathcal{G}^0(n)$ ou $\mathcal{A}^0(n)$, prouvant les résultats de 1.6. Le § 4 est consacré à la preuve du théorème 1.7 et de ses conséquences. Le dernier § 5 établit les résultats de 1.9.

2. Description de la correspondance étendue

Dans ce chapitre, nous décrivons la correspondance étendue

$$\pi_n : \mathcal{G}(n) \longrightarrow \mathcal{A}(n)$$

avec assez de détails pour en prouver ensuite la caractérisation annoncée. Nous gardons les définitions et notations du § 1. Il sera commode de noter $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}^0$, $\mathcal{G}^2$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}^2$) l'union disjointe des ensembles $\mathcal{G}(n)$ (resp. $\mathcal{G}^0(n)$, $\mathcal{G}^2(n)$, $\mathcal{A}(n)$, $\mathcal{A}^0(n)$, $\mathcal{A}^2(n)$) quand n parcourt les entiers ≥ 1. Pour $\sigma \in \mathcal{G}(n)$ ou $\mathcal{A}(n)$, on pose $n(\sigma) = n$.

2.1. Jusqu'en 2.4, notre référence est [10, § 4].

Soient σ_1, σ_2 des représentations de W'_F. On a alors

$$(\sigma_1 \oplus \sigma_2)^\vee \simeq \sigma_1^\vee \oplus \sigma_2^\vee,$$
$$L(s, \sigma_1 \oplus \sigma_2) = L(s, \sigma_1)L(s, \sigma_2),$$
$$\varepsilon(s, \sigma_1 \oplus \sigma_2, \psi) = \varepsilon(s, \sigma_1, \psi)\varepsilon(s, \sigma_2, \psi)$$

et donc

$$\gamma(s, \sigma_1 \oplus \sigma_2, \psi) = \gamma(s, \sigma_1, \psi)\gamma(s, \sigma_2, \psi).$$

Cette dernière propriété (mais pas les deux précédentes), vaut plus généralement : si une représentation σ de W'_F est *extension* de σ_1 par σ_2, alors on a

$$\gamma(s, \sigma, \psi) = \gamma(s, \sigma_1, \psi)\gamma(s, \sigma_2, \psi).$$

2.2. Une représentation σ de W'_F est somme directe de représentations indécomposables. Plus précisément, si $\mathbb{N}[\mathcal{G}^2]$ est le monoïde commutatif libre construit sur l'ensemble $\mathcal{G}^2$, on a une bijection de $\mathbb{N}[\mathcal{G}^2] - \{0\}$ sur $\mathcal{G}$ qui à une somme $\sum_{i \in I} \sigma_i$ (I fini, $\sigma_i \in \mathcal{G}^2$) associe la classe de la représentation $\bigoplus_{i \in I} \sigma_i$.

On *identifiera* $\mathbb{N}[\mathcal{G}^2] - \{0\}$ et $\mathcal{G}$ par cette application. Pour $\sigma = \sum_{i \in I} \sigma_i \in \mathbb{N}[\mathcal{G}^2] - \{0\}$ et $\sigma' = \sum_{j \in J} \sigma_j \in \mathbb{N}[\mathcal{G}^2] - \{0\}$, on a donc

$$\sigma \otimes \sigma' \simeq \sum \sigma_i \otimes \sigma'_j,$$
$$\sigma^\vee \otimes \sigma'^\vee \simeq \sum \sigma_i^\vee \otimes \sigma_j'^\vee,$$
$$L(s, \sigma \otimes \sigma') = \prod L(s, \sigma_i \otimes \sigma'_j),$$
$$\varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \prod \varepsilon(s, \sigma_i \otimes \sigma'_j, \psi),$$
$$\gamma(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \prod \gamma(s, \sigma_i \otimes \sigma'_j, \psi),$$

les sommes ou produits portant sur $i \in I$ et $j \in J$.

2.3. Décrivons maintenant $\mathcal{G}^2$. Une représentation indécomposable σ de W_F' est de la forme $\sigma \simeq \rho \otimes \mathrm{St}_n$, où ρ est un élément de $\mathcal{G}^0$, n un entier ≥ 1 et St_n l'unique élément de $\mathcal{G}^2$ dont la restriction à W_F est isomorphe à $1 \otimes \nu \otimes \cdots \otimes \nu^{n-1}$, où ν désigne le caractère de W_F donné par la valeur absolue normalisée de F. On a

$$\mathrm{St}_n^{\vee} \simeq \nu^{1-n} \otimes \mathrm{St}_n$$

et si n, m sont des entiers ≥ 1,

$$\mathrm{St}_n \otimes \mathrm{St}_m \simeq \otimes \nu^{j-1} \otimes \mathrm{St}_{n+m+1-2j},$$

où la somme porte sur les entiers j de 1 à $\inf(n, m)$. En fait, on obtient une bijection de $\mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}^{\times}$ sur $\mathcal{G}^2$ qui à (ρ, n) associe $\rho \otimes \mathrm{St}_n$.

2.4. Si ρ est une représentation semisimple de W_F, on a

$$L(s, \rho \otimes \mathrm{St}_n) = L(s, \nu^{n-1} \otimes \rho).$$

Par suite, pour $\rho, \rho' \in \mathcal{G}^0$ et n, n' entiers ≥ 1, on a

$$L\big(s, (\rho \otimes \mathrm{St}_n) \otimes (\rho' \otimes \mathrm{St}_{n'})\big) = \prod_j L(s, \nu^{n+n'-1-j} \otimes \rho \otimes \rho'),$$

le produit portant sur les entiers j de 1 à $\inf(n, n')$. On obtient aussi

$$L\big(s, (\rho \otimes \mathrm{St}_n)^{\vee} \otimes (\rho' \otimes \mathrm{St}_{n'})^{\vee}\big) = \prod_j L(s, \nu^{1-j} \otimes \rho^{\vee} \otimes {\rho'}^{\vee}).$$

Puisque les facteurs γ sont multiplicatifs pour les suites exactes courtes (*cf.* supra 2.2), on a

$$\gamma\big(s, (\rho \otimes \mathrm{St}_n) \otimes (\rho' \otimes \mathrm{St}_{n'}), \psi\big) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n'} \gamma(s, \nu^{i+j-2} \otimes \rho \otimes \rho', \psi).$$

Cela permet de contrôler également les facteurs ε, par la définition même des facteurs γ en 1.2. Nous ne donnons pas l'expression précise ; nous n'en avons pas besoin.

2.5. La classification des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ est parallèle à la précédente, mais légèrement plus compliquée à énoncer à cause des quotients de Langlands. Nous nous baserons sur les classifications de Langlands et Zelevinsky, *cf.* [1], [11]. La référence commode pour nous est l'introduction de [6].

Si $\pi_1, \ldots, \pi_r$ sont des représentations lisses irréductibles respectivement de $\mathrm{GL}_{n_1}(F), \ldots, \mathrm{GL}_{n_r}(F)$, nous notons $i(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(F)$, $n = n_1 + \cdots + n_r$, obtenue par induction parabolique normalisée : nous utilisons le sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(F)$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs, les blocs diagonaux étant de tailles successives $n_1, \ldots, n_r$ le long de la diagonale descendante. La représentation $i(\pi_1,\dots,\pi_r)$ est lisse mais pas forcément irréductible ; cependant, elle est de longueur finie.

Si χ est un quasicaractère de $F^\times$ et $\pi\in\mathcal{A}$, on note $\chi\pi\in\mathcal{A}$ la classe de la représentation $g\mapsto\chi\circ\det(g)\pi(g)$. On note encore ν le quasicaractère de $F^\times$ donné par la valeur absolue normalisée.

2.6. Commençons par décrire l'ensemble $\mathcal{A}^2$ des classes d'isomorphisme de représentations essentiellement de carré intégrable. En fait, on a une bijection $(\rho,n)\mapsto\mathrm{St}_n(\rho)$ de $\mathcal{A}^0\times\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{A}^2$, obtenue de la façon suivante [11, 9.3]. On forme la représentation $i(\rho,\nu\rho,\dots,\nu^{n-1}\rho)$; elle a un unique quotient irréductible, qui est essentiellement de carré intégrable, et sa classe est $\mathrm{St}_n(\rho)$. On a immédiatement

$$\mathrm{St}_n(\rho)^\vee\simeq\nu^{1-n}\mathrm{St}_n(\rho),$$

et les calculs de [6] (voir l'introduction de [6] principalement) nous donnent les propriétés suivantes.

Pour (ρ,n), $(\rho',n')\in\mathcal{A}^0\times\mathbb{N}$, on a

$$L\big(s,\mathrm{St}_n(\rho)\times\mathrm{St}_{n'}(\rho')\big)=\prod_j L(s,\nu^{n+n'-1-j}\rho\times\rho'),$$

où j varie de 1 à $\inf(n,n')$, et aussi

$$L\big(s,\mathrm{St}_n(\rho)^\vee\times\mathrm{St}_{n'}(\rho')^\vee\big)=\prod_j L(s,\nu^{1-j}\rho^\vee\times\rho'^\vee).$$

Les facteurs γ sont multiplicatifs pour l'induction normalisée, et il s'ensuit qu'on a

$$\gamma\big(s,\mathrm{St}_n(\rho)\times\mathrm{St}_{n'}(\rho'),\psi\big)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n'}\gamma(s,\nu^{i+j-2}\rho\times\rho',\psi),$$

ce qui permet, comme en 2.4, de contrôler également les facteurs ε.

2.7. On étend d'abord l'application bijective $\pi^0:\mathcal{G}^0\to\mathcal{A}^0$ donnée par les π_n^0 en une bijection $\pi^2:\mathcal{G}^2\to\mathcal{A}^2$; l'image de $\rho\otimes\mathrm{St}_n$, pour $(\rho,n)\in\mathcal{G}^0\times\mathbb{N}^*$, est $\mathrm{St}_n(\pi^0(\rho))$. De 2.4 et 2.6 il découle immédiatement qu'on a, pour $\sigma,\sigma'\in\mathcal{G}^2$,

$$\begin{gathered}n\big(\pi^2(\sigma)\big)=n(\sigma),\quad \pi^2(\sigma^\vee)=\pi^2(\sigma)^\vee,\\ L\big(s,\pi^2(\sigma)\times\pi^2(\sigma')\big)=L(s,\sigma\otimes\sigma')\\ \gamma(s,\pi^2(\sigma)\times\pi^2(\sigma'),\psi)=\gamma(s,\sigma\otimes\sigma',\psi),\end{gathered}$$

d'où

$$\varepsilon\big(s,\pi^2(\sigma)\times\pi^2(\sigma'),\psi\big)=\varepsilon(s,\sigma\otimes\sigma',\psi).$$

2.8. On classifie ensuite $\mathcal{A}$ en termes de $\mathcal{A}^2$. En fait, on obtient une bijection de $\mathbb{N}[\mathcal{A}^2] - \{0\}$ sur $\mathcal{A}$, tout à fait analogue à celle de 2.3. Nous allons la décrire *cf.* [1], [6, Intr.].

Un élément π de $\mathcal{A}^2$ s'écrit de façon unique sous la forme $\nu^{\alpha(\pi)}\pi^u$ où $\pi^u \in \mathcal{A}^2$ est unitaire et $\alpha(\pi) \in \mathbb{R}$.

Soient r un entier ≥ 1 et $\pi_1, \dots, \pi_r$ des éléments de $\mathcal{A}^2$. Supposons qu'on ait

$$(*) \qquad \alpha(\pi_1) \geq \cdots \geq \alpha(\pi_r).$$

Alors la représentation $i(\pi_1, \dots, \pi_r)$ a un unique quotient irréductible $J = J(\pi_1, \dots, \pi_r)$, et on a $J^\vee \simeq J(\pi_r^\vee, \dots, \pi_1^\vee)$. En fait, la classe d'isomorphisme de J ne dépend pas de l'ordre des π_i pourvu qu'il satisfasse à la condition (*). La bijection voulue de $\mathbb{N}[\mathcal{A}^2] - \{0\}$ sur $\mathcal{A}$ s'obtient en associant à $\sum_{i\in I} \pi_i$, I fini non vide, la classe de $J(\pi_{\lambda(1)}, \dots, \pi_{\lambda(r)})$, où $\lambda : \{1, \dots, r\} \to I$ est n'importe quelle bijection telle que $(\pi_{\lambda(1)}, \dots, \pi_{\lambda(r)})$ vérifie (*).

On *identifiera* $\mathbb{N}[\mathcal{A}^2] - \{0\}$ et $\mathcal{A}$ par la bijection ainsi obtenue. Si $\pi = \sum_{i\in I} \pi_i$ et $\pi' = \sum_{j\in J} \pi'_j$ sont deux éléments non nuls de $\mathbb{N}[\mathcal{A}^2]$, on a

$$\pi^\vee = \sum_{i\in I} \pi_i^\vee, \quad L(s, \pi \times \pi') = \prod_{i,j} L(s, \pi_i \times \pi'_j),$$
$$\gamma(s, \pi \times \pi') = \prod_{i,j} \gamma(s, \pi_i \times \pi'_j, \psi), \quad \varepsilon(s, \pi \times \pi') = \prod_{i,j} \varepsilon(s, \pi_i \times \pi'_j, \psi).$$

2.9. On étend alors $\pi^2 : \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^2$ en une bijection π de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ de façon que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}(\mathcal{G}^2) - \{0\} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi \\ \mathbb{N}(\mathcal{A}^2) - \{0\} & \longrightarrow & \mathcal{A}. \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont les identifications de 2.2 et 2.8, et la flèche verticale de gauche est déduite de π^2.

On a, pour $\sigma \in \mathcal{G}$, $n(\pi(\sigma)) = n(\sigma)$, et la bijection π induit des bijections $\pi_n : \mathcal{G}(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(n)$ qui vérifient les propriétés du théorème 1.3 :

$$\begin{aligned} \pi(\sigma) = \pi^0(\sigma) \text{ pour } \sigma \in \mathcal{G}^0, &\quad \pi(\sigma^\vee) = \pi(\sigma)^\vee \text{ pour } \sigma \in \mathcal{G}, \\ L(s, \pi(\sigma) \times \pi(\sigma')) &= L(s, \sigma \otimes \sigma'), \\ \varepsilon(s, \pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), \psi) &= \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) \quad \text{et} \\ \gamma(s, \pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), \psi) &= \gamma(s, \sigma \otimes \sigma', \psi), \quad \text{pour } \sigma, \sigma' \in \mathcal{G}\ . \end{aligned}$$

3. Fonctions L et représentations supercuspidales

Nous prouvons ici le théorème 1.6 et son corollaire.

3.1. Commençons par la partie (a) du théorème 1.6, qui a trait aux représentations de W'_F.

Soit (σ, V) une représentation (semisimple) de W_F. Par définition du facteur L d'Artin, on a $L(s,\sigma) = L(s,\sigma^{nr})$, où σ^{nr} est la représentation de W_F sur l'espace V^{I_F} des vecteurs de V fixés par le sous-groupe d'inertie I_F de W_F. La représentation σ^{nr} est somme de quasicaractères non ramifiés de W_F. En particulier l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(s,\sigma)$ n'est autre que la multiplicité dans σ de la représentation triviale de W_F. Si σ est irréductible de dimension n, et si τ est une représentation (semisimple) de W_F de dimension $r < n$, alors $\sigma \otimes \tau \simeq \mathrm{Hom}(\sigma, \tau^\vee)$ ne peut contenir la représentation triviale, et on a donc $L(s, \sigma \otimes \tau) = 1$. Cette propriété s'étend aussitôt au cas où τ est une représentation de W'_F de dimension $r < n$, cas où on a donc

$$L(s, \sigma \otimes \tau) = L(s, \sigma^\vee \otimes \tau^\vee) = 1$$

et où $\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \tau, \psi)$ est un monôme en q^{-s}. On a (amplement) prouvé que la condition (i) implique les conditions (ii) et (iii).

3.2. Inversement, soit $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, et prouvons qu'alors ni (ii), ni (iii) ne sont vérifiés. La classe σ correspond à une somme à support fini $\sum f(\rho, d)\rho \otimes \mathrm{St}_d \in \mathbb{N}[\mathcal{G}^2] - \{0\}$, où la somme porte sur $\mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$.

Fixons $\tau \in \mathcal{G}^0$ et regardons les pôles sur l'axe réel de $L(s, \sigma \otimes \tau)$. Pour $(\rho, d) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$, le facteur $L(s, \rho \otimes \mathrm{St}_d \otimes \tau)$ n'a de pôle sur l'axe réel que si ρ est de la forme $\nu^\alpha \tau^\vee$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, auquel cas il y a un unique pôle, simple, en $s = 1 - d - \alpha$. Alors le facteur $L(1 - s, (\rho \otimes \mathrm{St}_d)^\vee \otimes \tau^\vee)$ a un unique pôle, simple, en $s = 1 - \alpha$, et par suite $\gamma(s, \rho \otimes \mathrm{St}_d \otimes \tau, \psi)$ a un unique pôle, simple, en $s = 1 - \alpha$ et un unique zéro, simple, en $s = 1 - d - \alpha$. Si ρ n'est pas de la forme $\nu^\alpha \tau^\vee$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $L(s, \rho \otimes \mathrm{St}_d \otimes \tau)$ et $L(s, (\rho \otimes \mathrm{St}_d)^\vee \otimes \tau^\vee)$ valent 1 et $\gamma(s, \rho \otimes \mathrm{St}_d \otimes \tau, \psi) = \varepsilon(s, \rho \otimes \mathrm{St}_d \otimes \tau, \psi)$ est un monôme en q^{-s}.

Fixons $(\rho, d) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$ tel que $f(\rho, d) > 0$; on peut supposer (ρ, d) choisi de sorte que si $(\rho', d') \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$ vérifie

(i) ρ' est de la forme $\nu^{\alpha'}\rho$, $\alpha' \in \mathbb{R}$ et

(ii) $f(\rho', d') > 0$,

alors on ait $1 - d' - \alpha' \geq 1 - d$.

Considérons alors les facteurs $L(s, \sigma \otimes \rho^\vee), L(s, \sigma^\vee \otimes \rho)$ et $\gamma(s, \sigma \otimes \rho^\vee, \psi)$. De ce qui précède, on tire aussitôt que $L(s, \sigma \otimes \rho^\vee)$ a un pôle, éventuellement multiple, en $s = 1 - d$, mais que $L(1 - s, \sigma^\vee \otimes \rho)$ n'a pas de pôle en $s = 1 - d$ puisque ses pôles sont en $1 - \alpha' > 1 - d' - \alpha' \geq 1 - d$. Par suite $\gamma(s, \sigma \otimes \rho^\vee, \psi)$ a un zéro, éventuellement multiple, en $s = 1 - d$. Ni (ii), ni (iii) ne sont donc vérifiés, ce qui prouve la partie (a) du théorème.

3.3. Le raisonnement précédent est typique. Les arguments seront utilisés à nouveau, dans les situations plus compliquées du § 4. En tout cas, la partie (b) du théorème 1.6 se démontre exactement de la même façon que la partie (a) : il suffit d'établir les faits de base du début de 3.1. Mais cela découle du théorème 8.1 de [6] :

THÉORÈME. — *Soient $\pi, \pi' \in \mathcal{A}^0$. On a*
$$L(s, \pi \times \pi') = \prod L(s, \chi),$$
où χ parcourt les quasicaractères de $\mathbb{F}^\times$ tels que $\pi \simeq \chi\pi'^\vee$.

Bien sûr, on peut se limiter aux quasicaractères non ramifiés.

THÉORÈME. — *Soient $\pi, \pi' \in \mathcal{A}^0$. Si $n(\pi) \neq n(\pi')$ on a $L(s, \pi \times \pi') = 1$. Si π n'est pas de la forme $\nu^\alpha \pi'^\vee$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $L(s, \pi \times \pi')$ n'a pas de pôle sur l'axe réel ; si π est de cette forme, $L(s, \pi \times \pi')$ a un unique pôle sur l'axe réel, qui est simple, en $s = -\alpha$.*

3.4. Prouvons maintenant le corollaire du théorème 1.6 par récurrence sur l'entier $n \geq 2$: nous allons montrer que τ_n et π_n^0 coïncident sur $\mathcal{G}^0(n)$, si la famille (τ_n) d'applications de $\mathcal{G}(n)$ dans $\mathcal{A}(n)$ vérifie les conditions du corollaire.

Soit $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$; il suffit de prouver qu'on a $\tau_n(\sigma) \in \mathcal{A}^0(n)$: en effet, le théorème 1.4 implique alors que $\tau_n(\sigma)$ coïncide avec $\pi_n^0(\sigma)$.

Comme $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, on a, par le théorème 1.6 (a), $L(s, \sigma \otimes \tau) = 1$ quel que soit $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, $1 \leq r \leq n-1$ et on a alors
$$L\bigl(s, \tau_n(\sigma) \times \pi_r^0(\tau)\bigr) = 1.$$
Mais comme π_r^0 est bijective, on obtient
$$L\bigl(s, \tau_n(\sigma) \times \rho\bigr) = 1$$
quel que soit $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, $1 \leq r \leq n-1$. On a alors $\tau_n(\sigma) \in \mathcal{A}^0(n)$ par la partie (b) du théorème 1.6.

4. Pôle en $s = 0$ des facteurs L de paires

Dans ce paragraphe, nous prouvons les théorèmes 1.7 et 1.8.

4.1. Nous traitons uniquement la partie (a) du théorème 1.7, la partie (b), comme au paragraphe précédent, se traitant de la même façon, aux notations près.

Fixons $\sigma \in \mathcal{G} - \mathcal{G}^0$, $\sigma' \in \mathcal{G}$ avec $n(\sigma) = n(\sigma')$, et notons $\sum f(\rho, d)\rho \otimes \mathrm{St}_d$ et $\sum f'(\rho, d)\rho \otimes \mathrm{St}_d$ les éléments de $\mathbb{N}[\mathcal{G}^2]$ correspondant à σ et σ'. Pour $r \in \mathbb{N}$, posons $v_r = v_r(\sigma)$, $v'_r = v_r(\sigma')$. Nous allons prouver, par récurrence sur l'entier $n(\sigma) \geq 2$, l'assertion suivante :

$$\text{(A)} \qquad \text{Si } v_r = v'_r \text{ pour } r = 1, \ldots, n(\sigma) - 1, \text{ alors } \sigma = \sigma'.$$

Remarquons déjà que par le théorème 1.5, σ' n'est pas irréductible. Comme les facteurs L sont multiplicatifs, pour les sommes directes (2.1), nous pouvons supposer que pour $(\rho, d) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$, on a $f(\rho, d) = 0$ ou $f'(\rho, d) = 0$.

4.2. Fixons $(\tau, m) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$. Par 2.4, l'ordre $v(\tau, m)$ du pôle en $s = 0$ de $L(s, \sigma \otimes \tau \otimes \mathrm{St}_m)$ est la somme des $f(\rho, n)$ pour les couples $(\rho, n) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$ tels qu'il existe $j \in \{1, \ldots, \inf(m, n)\}$ vérifiant

$$\nu^{m+n-1-j} \rho \simeq \tau^{\vee}.$$

$$\text{(1)} \qquad \text{Pour } m = 1, \text{ posons } \quad w(\tau, m) = v(\tau, m).$$

$$\text{(2)} \qquad \text{Pour } m \text{ entier } \geq 2, \text{ posons } \quad w(\tau, m) = v(\tau, m) - v(\nu\tau, m - 1).$$

Alors $w(\tau, m)$ est la somme des $f(\rho, n)$ pour les couples $(\rho, n) \in \mathcal{G}^0 \times \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq m$ et $\tau \simeq \nu^{1-n} \rho^{\vee}$. On a donc

$$f(\rho, m) = w(\nu^{1-m} \rho^{\vee}, m) - w(\nu^{1-m} \rho^{\vee}, m + 1).$$

Si $(m + 1) n(\rho) < n(\sigma)$, on déduit de l'hypothèse de (a) qu'on a $f(\rho, m) = f'(\rho, m)$.

4.3. On peut donc supposer que pour $(m + 1) n(\rho) < n(\sigma)$, on a

$$f(\rho, m) = f'(\rho, m) = 0.$$

Si $f(\rho, m) \neq 0$, on a donc $(m + 1) n(\rho) \geq n(\sigma)$.

Mais on a aussi

$$n(\sigma) = \sum f(\rho, m) m\, n(\rho)$$

et en particulier

$$\text{(3)} \qquad n(\sigma) \geq \sum f(\rho, m) \frac{m}{m + 1} n(\sigma),$$

$$\text{(4)} \qquad \text{d'où} \quad 1 \geq \sum f(\rho, m) \frac{m}{m + 1} \geq \frac{1}{2} \sum f(\rho, m).$$

On voit donc qu'on se trouve dans l'une des situations suivantes (on tient compte du fait que σ n 'appartient pas à $\mathcal{G}^0$) :

1) $f(\rho, m) \neq 0$ pour un seul couple (ρ, m), et alors

$$n(\sigma) = f(\rho, m) m\, n(\rho) \leq (m + 1) n(\rho),$$

ce qui donne

$$\text{(5)} \qquad \text{soit } m = 1 \text{ et } f(\rho, 1) = 2,$$

$$\text{(6)} \qquad \text{soit } m \geq 2 \text{ et } f(\rho, 1) = 1.$$

2) $f(\rho, m) \neq 0$ pour deux couples distincts $(\rho_1, 1)$ et $(\rho_2, 1)$ seulement et $n(\rho_1) = n(\rho_2) = \frac{1}{2}n(\sigma)$.

Bien sûr ce raisonnement s'applique aussi à σ'.

4.4. Pour chacune des situations précédentes, regardons la restriction de v_r (et v'_r) à $\mathcal{G}^0$ pour $r = 1, \ldots, n(\sigma) - 1$.

1) $\sigma = \rho \otimes \mathrm{St}_m$, $\rho \in \mathcal{G}^0$, $m \geq 2$. Alors v_r est nul sauf si

$$\tau = \nu^{1-m}\rho^\vee \text{ et alors } v_r(\tau) = 1.$$

2) $\sigma = \rho \oplus \rho$, $\rho \in \mathcal{G}^0$. Alors v_r est nul sauf si

$$\tau = \rho^\vee \text{ et alors } v_r(\tau) = 2.$$

3) $\sigma = \rho_1 \oplus \rho_2$, ρ_1, ρ_2 distincts dans $\mathcal{G}^0$. Alors v_r est nul sauf si $\tau = \rho_1^\vee$ ou $\tau = \rho_2^\vee$, auxquels cas $v_r(\tau) = 1$.

Comme cela s'applique aussi à σ', on voit que dans chacun des cas l'hypothèse (a) implique $\sigma = \sigma'$, ce qui termine la preuve du théorème 1.7 (a).

4.5. Prouvons maintenant le théorème 1.8 et son corollaire.

Soit $(\tau_n)_{n\geq 1}$, une famille d'applications τ_n de $\mathcal{G}(n)$ dans $\mathcal{A}(n)$ qui vérifie :

(i) $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $n \geq 1$;

(ii) pour $1 \leq r < n$ et $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, $\tau \in \mathcal{G}(r)$, on a

$$L\big(s, \tau_n(\sigma) \otimes \tau_r(\tau)\big) = L(s, \sigma \otimes \tau).$$

On va prouver, par récurrence sur l'entier n, qu'on a $\tau_n = \pi_n$.

Il n'y a rien à prouver pour $n = 1$, grâce à (i). Par (ii) et l'hypothèse de récurrence, on a $L(s, \tau_n(\sigma) \times \pi_r(\tau)) = L(s, \sigma \otimes \tau)$ quels que soient $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\tau \in \mathcal{G}^2(r)$, $1 \leq r \leq n-1$, et comme π_r induit une bijection de $\mathcal{G}^2(r)$ sur $\mathcal{A}^2(r)$, on obtient $L(s, \tau_n(\sigma) \times \rho) = L(s, \pi_n(\sigma) \times \rho)$ quel que soit $\rho \in \mathcal{A}^2(r)$, $1 \leq r \leq n-1$.

Par les théorèmes 1.5 et 1.7, cela implique $\tau_n(\sigma) = \pi_n(\sigma)$, d'où le théorème 1.8.

Si (τ_n) vérifie les conditions du corollaire, alors par le corollaire 1.5 on a $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $n \geq 1$, et on applique alors le théorème.

5. Facteurs γ et support supercuspidal

Dans ce paragraphe final, nous prouvons les résultats de 1.9.

5.1. Grâce à la multiplicité des facteurs γ dans les suites exactes courtes, on obtient :

(a) Si deux éléments σ et σ' de $\mathcal{G}$ ont des restrictions à W_F équivalentes, on a $\gamma(s,\sigma\otimes\tau,\psi)=\gamma(s,\sigma'\otimes\tau,\psi)$ quel que soit $\tau\in\mathcal{G}$.

De même, grâce à la multiplicité des facteurs γ lors de l'induction parabolique, on obtient le fait parallèle :

(b) Si deux éléments π et π' de $\mathcal{A}$ ont même support supercuspidal, on a

$$\gamma(s,\pi\times\rho,\psi)=\gamma(s,\pi'\times\rho,\psi)$$

quel que soit $\rho\in\mathcal{A}$.

5.2. Il s'agit d'examiner les réciproques de ces assertions.

PROPOSITION. — *Soient n un entier ≥ 2, et soient $\sigma,\sigma'\in\mathcal{G}(n)$, $\pi,\pi'\in\mathcal{A}(n)$. On suppose $\sigma\notin\mathcal{G}^0$ et $\pi\notin\mathcal{A}^0$.*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les fonctions $\gamma(s,\sigma\otimes\tau,\psi)$ et $\gamma(s,\sigma'\otimes\tau,\psi)$ ont même ordre en $s=0$ pour $r=1,\dots,n-1$ et $\tau\in\mathcal{G}^0(r)$;*

(ii) *σ et σ' ont des restrictions à W_F équivalentes.*

(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les fonctions $\gamma(s,\sigma\otimes\rho,\psi)$ et $\gamma(s,\sigma'\otimes\rho,\psi)$ ont même ordre en $s=0$ pour $r=1,\dots,n-1$ et $\rho\in\mathcal{A}^0(r)$;*

(ii) *π et π' ont même support supercuspidal.*

Ici encore, les démonstrations de (a) et (b) sont identiques aux notations près. Il suffira de prouver (a), (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons donc (i) vérifiée. Par le corollaire 1.6, on a en tout cas $\sigma'\notin\mathcal{G}^0$.

Pour $\rho\in\mathcal{G}^0$, notons $f(\rho)$ la multiplicité de ρ dans la restriction de σ à W_F. Pour $\tau\in\mathcal{G}^0$, on a

$$\gamma(s,\sigma\otimes\tau,\psi)=\prod_{\rho\in\mathcal{G}^0}\gamma(s,\rho\otimes\tau,\psi)^{f(\rho)},$$

et l'ordre $v(\tau)$ de $\gamma(s,\sigma\otimes\tau,\psi)$ en $s=0$ est donc égal à

$$f(\nu\tau^\vee)-f(\tau^\vee).$$

Comme on a $f(\nu^j\tau^\vee)=0$ pour j assez grand, on voit que

$$f(\tau)=-\sum_{j=0}^{\infty}v(\nu^j\tau^\vee).$$

Le même raisonnement s'applique à σ' et, avec des notations évidentes, donne $f'(\tau)=-\sum_{j=0}^{\infty}v'(\nu^j\tau^\vee)$.

Par hypothèse, on a $v(\tau) = v'(\tau)$ si $n(\tau) < n$. Cela implique donc $f(\tau) = f'(\tau)$ si $n(\tau) < n$. Mais comme σ, σ' n'appartiennent pas à $\mathcal{G}^0$, cela entraîne $\sigma = \sigma'$, ce qui prouve la proposition.

5.3. On peut maintenant prouver la proposition 1.9. Soient π, π' des éléments de $\mathcal{A}(n)$ vérifiant $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \rho, s)$ pour $r = 1, \ldots, n-1$ et $\pi \in \mathcal{A}^0(r)$. Si $\pi \in \mathcal{A}^0$, on a $\pi' \in \mathcal{A}^0$ par le théorème 1.6 et $\pi = \pi'$ par le théorème 1.4. Si $\pi \notin \mathcal{A}^0$, on a $\pi = \pi'$ par la proposition 5.2, d'où (i) $\Rightarrow$ (ii) dans la proposition 1.9. On a vu plus haut (ii) $\Rightarrow$ (i) dans la proposition et dans le corollaire. Si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{G}(n)$ vérifient l'hypothèse (i) du corollaire, alors si $\sigma \notin \mathcal{A}^0$ on a $\sigma = \sigma'$ par la proposition 5.2 et si $\sigma \in \mathcal{A}^0$ on a $\sigma' \in \mathcal{A}^0$ par le théorème 1.5 et $\sigma = \sigma'$ par le corollaire du théorème 1.4. CQFD.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Casselman (W.) – GL_n, in *Algebraic Number Fields* (Fröhlich (A.), éd.), Academic Press, 1977, pp. 663–704.

[2] Harris (M.) & Taylor (R.) – *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton University Press, 2001.

[3] Henniart (G.) – *Caractérisation de la correspondance de Langlands par les facteurs ε de paires*, Invent. Math., t. **113** (1993), pp. 339–350.

[4] ______, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL_n *sur un corps p-adique*, Invent. Math., t. **139** (2000), pp. 439–456.

[5] ______, *Sur la conjecture de Langlands locale pour* GL_n, in *Journées arithmétiques de Rome 1999*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, vol. 13, 2001, pp. 167–188.

[6] Jacquet (H.), Piatetski-Schapiro (I.I.) & Shalika (J.) – *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math., t. **105** (1983), pp. 367–483.

[7] Laumon (G.), Rapoport (M.) & Stuhler (U.) – *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math., t. **113** (1999), pp. 217–338.

[8] Shahidi (F.) – *On certain L-functions*, Amer. J. Math., t. **103** (1981), pp. 297–355.

[9] ______, *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* GL_n, Amer. J. Math., t. **106** (1984), pp. 67–111.

[10] Tate (J.) – *Number theoretic background*, in *Automorphic forms, representations and L-functions* (Borel (A.) & Casselman (W.), éds.), Proc. Symposia in Pure Math., vol. 33 (II), 1979, pp. 3–26.

[11] Zelevinsky (A.V.) – *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of* GL_n, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., t. **13** (1980), pp. 165–210.