

PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE DANS LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

PAR FRÉDÉRIC SARKIS

RÉSUMÉ. — L'étude du « problème de Plateau complexe » (ou « problème du bord ») dans une variété complexe X consiste à caractériser les sous-variétés réelles Γ de X qui sont le bord de sous-ensembles analytiques de $X \setminus \Gamma$. Notre principal résultat traite le cas $X = U \times \omega$ où U est une variété complexe connexe et ω est une variété kählérienne disque convexe. Comme conséquence, nous obtenons des résultats de Harvey-Lawson [19], Dolbeault-Henkin [12] et Dinh [10]. Nous obtenons aussi une généralisation des théorèmes de Hartogs-Levi et Hartogs-Bochner. Finalement, nous montrons qu'une structure CR strictement pseudo-convexe plongeable dans une variété kählérienne disque-convexe est plongeable dans \mathbb{C}^n si et seulement si elle admet une fonction CR non constante.

ABSTRACT (*Complex Plateau problem in Kähler manifolds*). — The “complex Plateau problem” (or “boundary problem”) in a complex manifold X is the problem of characterizing the real submanifolds Γ of X which are boundaries of analytic subvarieties of $X \setminus \Gamma$. Our principal result treats the case $X = U \times \omega$ where U is a connected complex manifold and ω is a disk-convex Kähler manifold. As a consequence, we obtain results of Harvey-Lawson [19], Dolbeault-Henkin [12] and Dinh [10]. We also give a generalization of Hartogs-Levi and Hartogs-Bochner theorems. Finally, we prove that a strictly pseudoconvex CR structure embeddable in a disk-convex Kähler manifold is embeddable in \mathbb{C}^n if and only if it has a non constant CR function.

Texte reçu le 23 septembre 1999, révisé le 28 novembre 2000, accepté le 4 mai 2001

FRÉDÉRIC SARKIS, Laboratoire de Géométrie, Analyse, Topologie, Université de Lille I, USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France) • *E-mail* : sarkis@agat.univ-lille1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 32F25, 32F40, 32D15, 32C30.

Mots clefs. — Problème du bord, problème de Plateau complexe, variété kählérienne, extension du type Hartogs, plongement CR, structure CR.

1. Introduction

L'étude du « problème de Plateau complexe » (ou « problème du bord ») dans une variété complexe X consiste à caractériser les sous-variétés réelles Γ de X qui sont le bord (au sens des courants) de sous-ensembles analytiques de $X \setminus \Gamma$.

Dans l'espace affine, les courbes bords de surfaces de Riemann sont caractérisées par une condition intégrale nommée « condition des moments » (voir [39], [37], [1], [28], [8]). Les sous-variétés réelles compactes, fermées et de dimension supérieure ou égale à trois qui sont bords d'ensembles analytiques de \mathbb{C}^n sont celles dont la dimension de l'espace complexe tangent est maximale en chaque point (voir [18], [7], [8]).

Dans l'espace projectif, sous la condition précédente, le problème du bord n'admet pas toujours de solution. Harvey et Lawson [19] ont cependant donné une caractérisation en terme de condition des moments pour le problème du bord dans $P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{n-p}(\mathbb{C})$ (où $2p-1$ (avec $p \geq 2$) est la dimension de la variété considérée).

Récemment, Dolbeault et Henkin [12] (puis Dinh [8], [10]) ont donné une condition nécessaire et suffisante : le problème du bord pour une variété maximale complexe $M \subset P_n(\mathbb{C})$ admet une solution s'il en admet une pour un nombre « assez grand » de tranches de M par des sous-espaces linéaires.

Le but de cet article est de généraliser ce dernier résultat à une variété produit $U \times \omega$ où U est une variété complexe connexe et ω est une variété kählérienne compacte (ou plus généralement disque convexe). L'étude du problème du bord dans les espaces produits n'est pas restrictive. En effet, le problème du bord dans l'espace projectif peut toujours être réduit à l'étude du problème du bord dans un espace produit. Comme nous le verrons, la réciproque n'est en général pas vraie. De plus, cette résolution paraît la plus adaptée pour l'étude de l'extension des applications CR car si f est une application CR, le graphe de f est naturellement dans un espace produit. Soit X une variété kählérienne disque convexe ; nous obtenons alors les corollaires suivants :

1) Une nouvelle démonstration de la caractérisation géométrique du problème du bord dans $P_n(\mathbb{C})$ donnée dans [12], [10].

2) Une généralisation du théorème de Hartogs-Levi pour les applications méromorphes à valeurs dans X . En particulier, nous retrouvons les généralisations données dans [10] et [22].

3) Une généralisation du théorème de Hartogs-Bochner pour les applications CR à valeurs dans une variété kählérienne disque convexe X (pour $X = P_n(\mathbb{C})$, nous retrouvons des résultats de [12], [30], [33]).

4) La généralisation suivante du théorème de Hartogs-Bochner : supposons que X est une variété kählérienne de dimension 2 ne contenant aucune surface de Riemann compacte. Soit M une hypersurface réelle compacte et connexe de X la séparant en deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2 . Alors toute fonction

holomorphe au voisinage de M admet une extension holomorphe sur Ω_1 ou sur Ω_2 . De plus, on peut choisir l'ouvert indépendant de la fonction.

Ainsi que le corollaire principal suivant nouveau même dans le cas où $X = P_n(\mathbb{C})$:

5) Soit M une structure CR abstraite, strictement pseudoconvexe de dimension $2p - 1$ ($p \geq 2$) et plongeable dans X . La variété M est plongeable dans \mathbb{C}^n (ou de manière équivalente, admet une solution au problème du bord dans X) si et seulement si elle admet une fonction CR non constante.

Ce dernier résultat donne une nouvelle réduction du problème suivant (voir [12]) : *Soit M une variété strictement pseudoconvexe de $P_n(\mathbb{C})$ de dimension $2p - 1$ ($p \geq 2$). La variété M est-elle toujours le bord d'une p -chaîne holomorphe (ou de manière équivalente M est elle plongeable dans l'espace affine) ?* En particulier, cela prouve de manière immédiate que les exemples de structures CR d'Andreotti-Rossi [31], [32], [3], [16], [13] et de Barrett [4] (cas où l'espace des fonctions CR est de dimension 1) ne sont plongeables dans aucune variété kählérienne disque convexe X . En effet, ces variétés ne sont pas plongeables dans l'espace affine mais, par construction, elles admettent des fonctions CR non constantes, on en déduit alors directement qu'elles ne sont pas plongeables dans X (pour $X = P_n(\mathbb{C})$ et M la structure CR d'Andreotti-Rossi, ceci est démontré de manière différente dans [33]).

Dans toute la suite, les variétés considérées sont supposées dénombrables à l'infini et munies d'une métrique complète. Par *volume p -dimensionnel*, nous entendons la mesure de Hausdorff de dimension p associée à cette métrique. Nous nous intéresserons à montrer que certains compacts sont de volume p -dimensionnel fini ou nul. Or ces deux notions ne dépendent pas de la métrique choisie. Par conséquent tous les résultats que nous obtenons sont indépendants de la métrique fixée au départ.

Je voudrais remercier T.C. Dinh pour ses remarques sur cet article.

2. Problème du bord dans les variétés produit : cas lisse

2.1. Théorème principal. — Dans le même esprit que [23], nous définissons :

DÉFINITION 2.1. — Nous dirons qu'une variété complexe ω est *disque convexe* si pour tout compact $K \subset \omega$, il existe un compact $\widehat{K} \subset \omega$ tel que tout ensemble analytique A irréductible et de dimension 1 de $\omega \setminus K$ tel que $A \cup K$ est un compact de ω et $\overline{A} \cap K \neq \emptyset$ vérifie $A \subset \widehat{K}$.

Bien sûr, toute variété compacte ou holomorphiquement convexe est disque convexe.

Nous rappelons qu'une sous-variété lisse Γ de dimension $2n - 1$ d'une variété complexe X est maximale complexe si pour tout point $x \in \Gamma$, l'espace holomorphe tangent $H_x(\Gamma) = T_x(\Gamma) \cap JT_x(\Gamma)$ est de dimension complexe $n - 1$ (où $T_x(\Gamma)$ est l'espace réel tangent à Γ au point x et J est la multiplication complexe).

DÉFINITION 2.2. — Soit U une variété complexe. Un sous-ensemble $K \subset U$ sera dit $(n - 1)$ -générique s'il n'est pas inclus dans une réunion dénombrable d'ensembles analytiques de dimension $n - 1$ immergés dans U .

• Soit X un espace complexe (muni d'une métrique). On appelle p -chaîne holomorphe de X toute somme localement finie

$$[T] = \sum n_j [V_j]$$

à coefficients n_j dans \mathbb{Z} de sous-ensembles analytiques V_j , deux à deux différents, de dimension p et fermés de X .

• On appelle volume de $[T]$, l'expression

$$\text{Vol}[T] = \sum |n_j| \text{Vol } V_j$$

où $\text{Vol } V_j$ est le volume $2p$ -dimensionnel de l'ensemble analytique V_j ; $\text{Vol}[T]$ est aussi la masse du courant $[T]$. On notera T le support de la p -chaîne holomorphe $[T]$ (i.e. $T = \bigcup_{\{j; n_j \neq 0\}} V_j$). Dans la suite, si $[T]$ est un courant, on notera $\text{Vol}[T]$ la masse de ce courant et T son support.

Soient M et N des variétés réelles lisses orientées et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Alors, d'après le théorème de Sard, pour presque tout $y \in N$, la tranche $f^{-1}(y)$ est soit vide soit une sous-variété lisse orientée de M de codimension $\dim N$. Nous noterons $[M, f, y]$ le courant d'intégration sur cette tranche qui est alors bien défini.

THÉORÈME 2.3. — Soient U une variété complexe connexe de dimension complexe n et ω une variété kählérienne disque convexe. Soit Γ une sous-variété lisse maximale complexe de $U \times \omega$ et de dimension réelle $2n + 1$. Notons $\pi : U \times \omega \rightarrow U$ la projection canonique sur le premier membre. Supposons de plus que Γ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) Pour tout compact $K \subset U$, $\Gamma \cap \pi^{-1}(K)$ est un compact de $U \times \omega$.
- (b) Pour tout $z \in U$, il existe au plus un nombre fini de points x de $\gamma_z = \Gamma \cap \{z\} \times \omega$ tels que Γ ne soit pas transverse à $\{z\} \times \omega$ au point x .
- (c) Pour tout $z \in U$, γ_z est une courbe lisse par morceaux dont la partie régulière admet un nombre fini de composantes connexes.

Pour tout $z \in U$, le courant d'intégration sur γ_z est alors bien défini et est noté $[\gamma_z]$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un sous-ensemble $(n - 1)$ -générique Z de U tel que pour tout $z \in Z$, il existe une 1-chaîne holomorphe $[S_z]$ de $(\{z\} \times \omega) \setminus \gamma_z$ de masse finie, dont l'adhérence \bar{S}_z est un compact de $\{z\} \times \omega$ et telle que $d[S_z] = [\gamma_z]$ (au sens des courants).

2) Il existe un ouvert non vide $O \subset U$ tel que $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord dans $O \times \omega$ (i.e. il existe une $(n + 1)$ -chaîne holomorphe $[T]$ de $(O \times \omega) \setminus \Gamma$, de masse localement finie dans $O \times \omega$, telle que pour tout compact $K \subset O$, $\bar{T} \cap \pi^{-1}(K)$ est un compact de $O \times \omega$ et telle que $d[T] = [\Gamma]$ au sens des courants).

3) Il existe un ensemble $F \subset U$ de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle nulle de sorte que pour tout point $z \in U \setminus F$, il existe un ouvert $O_z \subset U$ tel que $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord dans $O_z \times \omega$.

4) Il existe un fermé $Y \subset U$ de mesure de Hausdorff $2n$ -dimensionnelle nulle tel que $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord dans $(U \setminus Y) \times \omega$.

Par définition de courbes lisses par morceaux, les hypothèses du théorème impliquent que les courbes γ_z considérées sont de longueur finie.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des variétés de Stein, il n'existe pas généralement de solution globale au problème du bord dans $U \times \omega$ comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 1. — Soient

$$C(1, 3) = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 3\}, \quad C(2) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 2\}$$

et $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $\phi(z) = (z, e^{1/z})$. Soient

$$S = \phi(C(1, 3)), \quad \gamma = \phi(C(2)) \quad \text{et} \quad \Gamma = \gamma \times P_1(\mathbb{C}).$$

Soit $\tilde{\Gamma}$ une petite déformation de Γ dans $S \times P_1(\mathbb{C})$ obtenue grâce à la proposition 2.4. Puisque $\tilde{\Gamma}$ est une hypersurface de $S \times P_1(\mathbb{C})$, elle vérifie l'hypothèse du théorème 2.3. Alors $[\tilde{\Gamma}]$ n'admet pas de solution au problème du bord dans $S \times P_1(\mathbb{C})$. En effet, si c'était le cas γ en admettrait une aussi et donc la fonction $e^{1/z}$ admettrait une extension holomorphe au disque unité, ce qui est impossible.

Il est bien sûr nécessaire d'avoir une condition de transversalité de Γ par rapport aux fibres du produit. En effet, si Γ est entièrement incluse dans l'une des fibres du produit on ne peut rien conclure. Les conditions de transversalité b) et c) supposées dans le théorème sont en fait générique. D'après le théorème de Morse (voir par exemple [21]), toute fonction lisse $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ admet une déformation dont les singularités sont non dégénérées. Dans le cas d'une application à valeurs dans \mathbb{R}^ℓ , ceci est encore valide. En particulier, si $\ell = k - 1$ nous obtenons la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — Soit Γ une sous-variété réelle lisse de dimension $2n + 1$ incluse dans une variété produit $U \times \omega$ où U est une variété de dimension réelle $2n$ et ω une variété réelle. Notons $\pi : U \times \omega \rightarrow U$ la projection canonique sur le premier membre. Alors il existe une déformation $\tilde{\Gamma}$ de Γ telle que :

1) Il existe une sous-variété $N \subset \tilde{\Gamma}$ de dimension $2n - 1$ telle que pour tout $x \in \tilde{\Gamma} \setminus N$, la fibre $H_{\pi(x)} = \pi^{-1}(\pi(x))$ est transverse à $\tilde{\Gamma}$ au point x .

2) Pour tout $z \in U$, $\sigma_z = N \cap H_z$ est une union finie de points.

3) Pour tout $z \in U$, $\gamma_z = \tilde{\Gamma} \cap H_z$ est une courbe lisse par morceaux dont la partie régulière admet un nombre fini de composantes connexes.

Par conséquent, pour tout $z \in U$, la tranche $[\Gamma, \pi, z]$ est bien définie et coïncide avec $[\gamma_z]$, le courant d'intégration sur γ_z .

EXEMPLE 2. — La sphère $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ vérifie les propriétés 1), 2) et 3) de la proposition 2.4. En effet,

1) si $|z| > 1$, alors $\{z\} \times \mathbb{C}$ est transverse à S^3 et $\gamma_z = \emptyset$;

2) si $|z| = 1$, alors $\{z\} \times \mathbb{C}$ n'est pas transverse à S^3 et $\gamma_z = \{(z, 0)\}$. On a $N = \{(z, 0) \in S^3; |z| = 1\}$;

3) si $|z| < 1$, alors $\{z\} \times \mathbb{C}$ est transverse à S^3 et

$$\gamma_z = \{(z, w) \in \{z\} \times \mathbb{C}; |w|^2 = 1 - |z|^2\}.$$

2.2. Plan de la preuve. — Pour l'implication 1) \Rightarrow 2), nous montrerons qu'il existe un ouvert de Stein V_d et un sous-ensemble $(n - 1)$ -générique $\tilde{E}_{k,\ell}$ de Z tels que pour tout $z \in \tilde{E}_{k,\ell}$, il existe une solution $[S_z]$ au problème du bord pour $[\gamma_z]$ dont l'adhérence du support est inclus dans V_d . Ceci fait, les résultats connus sur le problème du bord dans \mathbb{C}^n permettent de conclure que le problème du bord pour $[\Gamma]$ dans V_d admet une solution.

L'implication 2) \Rightarrow 3) sera montrée en trois étapes. Notons W_{\max} l'ensemble des $z \in U$ admettant un voisinage W_z tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ ait une solution dans $W_z \times \omega$. Soit $z \in W_{\max}$; dans une première étape, nous montrons qu'il existe un ouvert maximal (mais non unique en général) U_z tel que $[\Gamma]$ admette une solution $[T_{\max}]$ au problème du bord dans $U_z \times \omega$.

Dans la deuxième étape, nous montrons que si $[x, y] \subset U_z$, alors la différence de volume des courants d'intersection $[T_{\max}, \pi, x]$ et $[T_{\max}, \pi, y]$ est uniformément bornée. En particulier, en faisant tendre y vers le bord de U_z , on montre qu'il existe un ensemble $(n - 1)$ -générique inclus dans le bord de U_z tel que presque tous les points du bord de U_z sont des points de W_{\max} .

Enfin, nous montrons par l'absurde que $U \setminus W_{\max}$ est de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle nulle. En effet, dans le cas contraire, en partant d'un point $z_1 \in W_{\max}$, puis d'un point $z_2 \in \partial U_{z_1} \cap W_{\max}$ et ainsi de suite, on construit une suite de points $\{z_i\}$ convergeant vers un point du bord de W_{\max} . Or, à chaque étape, le volume du support des courants d'intersection $[T_{\max}, \pi, z_i]$ décroît d'une constante fixe ce qui est impossible pour i assez grand.

L'implications 3) \Rightarrow 4) s'obtient en recouvrant $U \setminus F$ par une réunion localement finie de boules $\{B(z_i, \epsilon_i)\}_{i \in I}$ telles que pour tout point $z_i \in U \setminus F$, on ait $B(z_i, \epsilon_i) \subset O_{z_i}$ où O_{z_i} est l'ouvert défini dans la proposition 3. Posons $Y = F \cup \bigcup_{i \in I} \partial B(z_i, \epsilon_i)$. Par construction, Y est un fermé. Alors, pour chaque composante connexe U_j ($j \in J$) de $U \setminus Y$, il existe $i \in I$ tel que $U_j \subset B(z_i, \epsilon_i) \subset O_{z_i}$ et donc $[\Gamma]$ admet une solution $[T_j]$ au problème du bord dans $U_j \times \omega$. Il suffit alors de prendre pour solution au problème du bord pour $[\Gamma]$ dans $(U \setminus Y) \times \omega$ la $(n + 1)$ -chaîne holomorphe égale à $[T_j]$ dans $U_j \times \omega$.

L'implication 4) \Rightarrow 1) est immédiate.

2.3. Implication 1) \Rightarrow 2) : réduction au cas de \mathbb{C}^n . — L'ensemble Z étant $(n - 1)$ -générique, il existe un point $z \in Z$ tel que l'intersection de Z avec tout voisinage de z est encore $(n - 1)$ -générique. Notons $\Pi : U \times \omega \rightarrow \omega$ la projection canonique sur le second membre. Nous rappelons que pour tout $z \in U$, nous notons $\gamma_z = \Gamma \cap (\{z\} \times \omega)$ et $[\gamma_z]$ le courant d'intégration associé. Soit V un voisinage de Stein de $\Pi(\gamma_z)$ obtenu grâce à la proposition 5.8. Soit $V_\epsilon \subset\subset V$ un ϵ -voisinage de $\Pi(\gamma_z)$ et $V_{\frac{1}{2}\epsilon} \subset\subset V_\epsilon$ un $\frac{1}{2}\epsilon$ -voisinage de $\Pi(\gamma_z)$. On choisit une constante $C > 0$ de sorte que tout sous-ensemble analytique irréductible de dimension 1 de $\omega \setminus \Pi(\overline{V_{\frac{1}{2}\epsilon}})$ dont l'adhérence rencontre $\Pi(\overline{V_{\frac{1}{2}\epsilon}})$ et $\omega \setminus \Pi(V_\epsilon)$, ait un volume supérieur à C (voir la proposition 5.7. avec $C = C_{\epsilon/2}^{\Pi(\overline{V_{\epsilon/2}})}$). Soit $U_{\frac{1}{2}\epsilon}$ un voisinage de Stein de z dans U tel que pour tout $x \in U_{\frac{1}{2}\epsilon}$, $\Pi(\gamma_x) \subset V_{\frac{1}{2}\epsilon}$. Comme ω est disque convexe, notons $\widehat{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$ le compact défini de manière analogue à la définition 2.1. De plus, on peut supposer que C est assez petit pour que toute courbe compact incluse dans $\widehat{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$ ait un volume strictement supérieur à C . Pour tout $x \in Z$ choisissons $[S_x]$, une 1-chaîne holomorphe solution au problème du bord pour $[\gamma_x]$ minimisant le volume du support des solutions (voir proposition 5.16). Posons

$$E_{k,\ell} = \left\{ x \in Z \cap U_{\frac{1}{2}\epsilon} ; \text{Vol}[S_x] \leq k, \frac{1}{2}\ell C < \text{Vol } S_x \leq \frac{1}{2}(\ell + 1)C \right\}$$

où S_x est le support de la 1-chaîne $[S_x]$. L'ensemble $Z \cap U_{\frac{1}{2}\epsilon}$ étant $(n - 1)$ -générique, il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $E_{k,\ell}$ soit encore $(n - 1)$ -générique.

LEMME 2.5. — *Soit $x \in E_{k,\ell}$ et notons A l'enveloppe d'holomorphie de γ_x dans $\{x\} \times V$ (qui, d'après [39], [37], [1], [28], [8] est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et de volume fini de $(\{x\} \times V) \setminus \gamma_x$). Alors pour toute suite $\{x_i\}$ de points de $E_{k,\ell}$ convergeant vers x , les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) *Il existe une suite extraite de la suite $\{x_i\}$ (que l'on notera encore $\{x_i\}$) telle que la suite $\{[S_{x_i}]\}$ converge au sens des courants vers une 1-chaîne holomorphe $[S]$ solution au problème du bord pour $[\gamma_x]$.*

2) Quitte à extraire à nouveau une sous-suite, la suite de supports S_{x_i} converge au sens de Bishop vers une surface de Riemann S_∞ dont l'adhérence ne contient aucune courbe compacte.

3) $S_\infty \subset A \cup S$ (où S est le support de $[S]$).

4) $S_\infty \subset A \cup S_x \cup \bigcup_{i=1}^{i=m} L_i$ où les L_i sont courbes compactes contenant une composante analytique de S_x ou de A .

Démonstration. — La masse des 1-chaînes holomorphes $[S_{x_i}]$ étant uniformément bornée, il existe une suite-extraite (que l'on notera encore $[S_{x_i}]$) qui converge vers une 1-chaîne holomorphe limite $[S]$ (voir proposition 5.6). Du fait des hypothèses de transversalité *b*) et *c*) du théorème 2.3, la suite de bords $[\gamma_{x_i}] = d[S_{x_i}]$ converge vers le courant limite $[\gamma_x] = d[S_x]$. On a donc

$$[\gamma_x] = d[S_x] = d[S].$$

Du fait que S_{x_i} est par définition, pour tout $i \in \mathbb{N}$, relativement compact dans $\{x_i\} \times \omega$ et que ω est disque-convexe, on a $\Pi(S_{x_i}) \subset \widehat{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et donc $\Pi(S) \subset \widehat{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$. Quitte à extraire une sous-suite de $\{[S_{x_i}]\}$, on peut aussi supposer que la suite des supports $\{S_{x_i}\}$ converge au sens de Bishop vers une surface de Riemann limite S_∞ . On a alors :

$$\frac{1}{2}\ell C \leq \text{Vol } S_x \leq \text{Vol } S \leq \text{Vol } S_\infty \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \text{Vol } S_{x_j} \leq \frac{1}{2}(\ell + 1)C.$$

La première et deuxième inégalité vient de la définition de $E_{k,\ell}$, la troisième du fait que $S \subset S_\infty$, la quatrième de l'inégalité de la proposition 5.5 et enfin la dernière provient elle aussi de la définition de $E_{k,\ell}$. Par construction, $\Pi(S_\infty) \subset \widehat{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$ et toutes ses composantes irréductibles non incluses dans V sont donc de volume supérieur ou égale à C . Par conséquent, l'inégalité précédente montre que S_∞ ne peut contenir de composante non incluse dans $\{x\} \times V$ qui ne soit pas incluse dans S et donc $S_\infty \subset S \cup A$. Cela montre aussi que l'adhérence de S_∞ ne contient pas de courbe compacte. En effet, supposons le contraire. Notons L une courbe compacte irréductible de $\overline{S_\infty}$. La courbe L étant compacte, elle ne peut être incluse dans $\{x\} \times V$ et donc $L \setminus \gamma_x$ admet une composante irréductible $\tilde{L} \subset S$ et dont le volume est supérieur à C . Mais alors $[\tilde{S}] = [S] - n_i[L]$ (où n_i est la multiplicité de \tilde{L} dans $[S]$) est encore une solution au problème du bord pour γ_x dont le support \tilde{S} est inclus dans $S_\infty \setminus \tilde{L}$ et vérifie donc :

$$\frac{1}{2}\ell C < \text{Vol } \tilde{S} \leq \text{Vol } S_\infty - \text{Vol } \tilde{L} \leq \text{Vol } S_\infty - C \leq \frac{1}{2}(\ell + 1)C - C$$

ce qui donne la contradiction recherchée.

La partie régulière de la courbe γ_x ayant un nombre fini de composantes, les ensembles analytiques A et S admettent un nombre fini de composantes irréductibles. Pour la dernière propriété, il suffit de prendre pour $\{L_i\}$ l'ensemble

des courbes irréductibles compactes contenant l'une de ces composantes. En effet, comme $S_\infty \subset A \cup S$, il suffit de montrer que

$$A \cup S \subset A \cup S_x \cup \bigcup_{i=1}^{i=m} L_i.$$

Les 1-chaînes holomorphes $[S]$ et $[S_x]$ sont toutes deux solution au problème du bord pour $[\gamma_x]$. Par conséquent, le courant $[R] = [S] - [S_x]$ est une 1-chaîne holomorphe fermée de $\{x\} \times \omega$ dont le support est compact. On a donc

$$[R] = \sum_{j \in J} n_j [R_j]$$

où les $[R_j]$ sont des courants d'intégration sur des courbes compactes irréductibles R_j de $\{x\} \times \omega$. Par conséquent, pour conclure il reste à montrer que pour tout $j \in J$, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $R_j \subset L_i$. Or, par construction $S \subset S_\infty$ et \bar{S} ne contient aucune courbe compacte. Par conséquent, pour tout $j \in J$, la courbe R_j , contient au moins une composante irréductible de S_x et est donc incluse dans l'une des courbes L_i . \square

On choisit un point x de $E_{k,\ell}$ tel que $E_{k,\ell}$ soit $(n - 1)$ -générique dans tout voisinage de x et notons A l'enveloppe d'holomorphie de γ_x dans $\{x\} \times V$. Soit L_1, \dots, L_m , l'ensemble des courbes compactes irréductibles contenant une composante analytique de $S_x \cup A$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ notons L_i^j , $j \in \{1, \dots, p_i\}$ les composantes irréductibles de $L_i \setminus \gamma_x$. Posons

$$D = \{1, \dots, p_1\} \times \dots \times \{1, \dots, p_m\}$$

et pour tout $d = (d_1, \dots, d_m) \in D$, définissons

$$S_d = \left(S_x \cup A \cup \bigcup_{i=1}^{i=m} L_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{i=m} L_i^{d_i} \right).$$

Par construction, S_d est une surface de Riemann ne contenant pas de courbes compactes et pour toute suite de points $x_i \in E_{k,\ell}$, il existe un $d \in D$ tel que la surface S_∞ soit incluse dans S_d où S_∞ est construite dans le lemme 2.5.

Pour tout $d \in D$, fixons V_d un voisinage de Stein de $S_d \cup \gamma_x$ (voir prop. 5.8).

LEMME 2.6. — *Il existe $d \in D$ et un sous-ensemble $(n - 1)$ -générique $\tilde{E}_{k,\ell} \subset E_{k,\ell}$ tels que $S_w \cup \gamma_x \subset V_d$ pour tout $w \in \tilde{E}_{k,\ell}$.*

Démonstration. — Pour tout $d \in D$, définissons

$$E_{k,\ell}^d = \{w \in E_{k,\ell}; S_w \subset V_d\}$$

et montrons qu'au moins l'un de ces ensembles est $(n - 1)$ -générique. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $d \in D$, l'ensemble $E_{k,\ell}^d$ est non $(n - 1)$ -générique. Mais alors l'ensemble $\bigcup_{d \in D} E_{k,\ell}^d$ serait lui aussi non $(n - 1)$ -générique

en tant que réunion finie de tels ensembles. L'ensemble $E = E_{k,\ell} \setminus \bigcup_{d \in D} E_{k,\ell}^d$ est alors $(n-1)$ -générique dans tout voisinage de x . Appliquons le lemme 2.5 à une suite de points $x_i \in E$ convergeant vers x . Il existe donc $d \in D$ telle que la suite converge vers une limite $S_\infty \subset S_d$. Mais alors par définition de la notion de convergence au sens de Bishop, pour i assez grand $S_{x_i} \subset V_d$ et donc pour i assez grand $x_i \in E_{k,\ell}^d$. Ce qui donne la contradiction recherchée. \square

Nous avons donc construit un voisinage de Stein V_d de γ_x et un ensemble $(n-1)$ -générique $\widetilde{E}_{k,\ell} \subset U$ tels que pour tout $w \in \widetilde{E}_{k,\ell}$, la tranche $[\gamma_w] = [\Gamma, \Pi, w]$ admette une solution au problème du bord dont le support est inclus dans V_d . Soit $O \subset U_{\frac{1}{2}\epsilon}$ un voisinage de Stein de x . Alors $O \times V_d$ est le produit de deux variétés de Stein et la résolution du problème du bord dans \mathbb{C}^n (voir proposition 5.2) montre que $[\Gamma]$ admet une solution au problème du bord dans $O \times V_d$ et donc dans $O \times \omega$ ce qui termine la preuve de l'implication.

2.4. Implication 2) \Rightarrow 3) : contrôle du volume jusqu'au bord

Supposons que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admet une solution $[T]$ dans $W \times \omega$ où W est un ouvert relativement compact assez petit de U . Soit $\widetilde{W} \subset U$ un voisinage de Stein de \overline{W} . Alors $\widetilde{W} \times \omega$ est encore une variété kählérienne. On montre qu'il existe une majoration du volume des 1-chaînes holomorphes $[S_z] = [T, \pi, z]$ quand z approche du bord de W ne dépendant que de la géométrie de Γ :

LEMME 2.7. — Soit (x_1, \dots, x_{2n}) un système de coordonnées réelles de \widetilde{W} . Soit $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ la projection $\Psi(x_1, \dots, x_{2n}) = (x_2, \dots, x_{2n})$. D'après le théorème de Sard appliqué à l'application $\Psi \circ \pi$, il existe un ensemble $K \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ de mesure nulle tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n-1} \setminus K$, Γ est transverse à la variété $\pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n-1} \setminus K$ et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\text{Vol}([S_{(a,X)}]) - \text{Vol}([S_{(b,X)}])| &\leq M_W \cdot \mathcal{H}_2(\Gamma \cap \pi^{-1}([(a, X), (b, X)])) \\ &\leq M_W \cdot \mathcal{H}_2(\Gamma \cap \pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))), \end{aligned}$$

$$|\text{Vol}(S_{(a,X)}) - \text{Vol}(S_{(b,X)})| \leq M_W \cdot \mathcal{H}_2(\Gamma \cap \pi^{-1}([(a, X), (b, X)]))$$

où $M_W = \sup_{(W \times \omega) \cap \Gamma} |\Omega|$ pour la forme kählérienne Ω associée à la variété $\widetilde{W} \times \omega$ et où \mathcal{H}_p est le volume (ou mesure de Hausdorff) p -dimensionnelle sur $U \times \omega$.

Démonstration. — Comme l'ouvert W est relativement compact dans \widetilde{W} , d'après la propriété a) du théorème 2.3, $\pi^{-1}(\overline{W}) \cap \Gamma$ est un compact de $\widetilde{W} \times \omega$ et donc M_W est fini. Par définition, on a

$$[T] = \sum n_i [T_i]$$

où $n_i \in \mathbb{Z}$ et $[T_i]$ sont les courants d'intégration sur des sous-ensemble analytiques de dimension $(n + 1)$ de $W \times \omega \setminus \Gamma$. On a alors par hypothèse

$$[\Gamma] = \sum n_i d[T_i].$$

Soient

$$[T^+] = \sum |n_i| [T_i], \quad [\Gamma^+] = \sum |n_i| d[T_i],$$

Γ_i le bord orienté de T_i (c'est-à-dire $[\Gamma_i] = d[T_i]$) et M_i les composantes connexes de $\Gamma \cap W \times \omega$. On a alors d'après le théorème de Stokes

$$\begin{aligned} 0 &= \sum |n_i| \int_{T_i \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)])} d\Omega \\ &= \sum |n_i| \left(\int_{(\Gamma_i \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)]))} \Omega + \int_{T_i \cap \pi^{-1}((b,X))} \Omega - \int_{T_i \cap \pi^{-1}((a,X))} \Omega \right) \\ &= \left(\sum |n_i| \int_{(\Gamma_i \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)]))} \Omega \right) + \text{Vol}([S_{(b,X)}]) - \text{Vol}([S_{(a,X)}]). \end{aligned}$$

En regroupant les composantes M_j des Γ_i , et en tenant compte de l'orientation, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum |n_i| \int_{(\Gamma_i \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)]))} \Omega \right| &= \left| \sum \pm \int_{M_j \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)]))} \Omega \right| \\ &\leq \left| \int_{\Gamma \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)]))} |\Omega| \right| \\ &\leq M_W \mathcal{H}_2(\Gamma \cap \pi^{-1}([(a,X),(b,X)])) \\ &\leq M_W \mathcal{H}_2(\Gamma \cap \pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la première inégalité.

La deuxième inégalité s'obtient alors en appliquant à la chaîne $[\tilde{T}] = \sum [T_i]$ ce qui précède. \square

On note W_{\max} l'ensemble des points $z \in U$ possédant un voisinage $W_z \subset U$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ soit résoluble dans $W_z \times \omega$. Bien sûr W_{\max} est un ouvert de U .

LEMME 2.8. — Soient $z \in W_{\max}$ et W_z un voisinage connexe de z dans U tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admette une solution $[T]$ dans $W_z \times \omega$. Alors il existe un ouvert connexe maximal $U_z \subset W_{\max}$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ ait une solution $[T_{\max}]$ dans $U_z \times \omega$ coïncidant avec $[T]$ dans $W_z \times \omega$. De plus, $\partial U_z \setminus W_{\max}$ est un fermé de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle nulle.

Démonstration. — D'après le lemme de Zorn, pour montrer l'existence de U_z , il suffit de montrer que si U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes de U contenant W_z , tels que $U_1 \subset U_2$ et tels que la solution $[T_{U_1}]$ (resp. $[T_{U_2}]$) au problème du bord pour $[\Gamma]$ dans $U_1 \times \omega$ (resp. $U_2 \times \omega$) coïncide avec $[T]$ dans $W_z \times \omega$, alors $[T_{U_2}]$ coïncide avec $[T_{U_1}]$ dans $U_1 \times \Omega$. La n -chaîne holomorphe $[L] = [T_{U_2}] - [T_{U_1}]$ est bien définie dans $(U_1 \times \omega) \setminus \Gamma$. Par hypothèse, $[L]$ est fermée et $[L] = 0$ dans $W_z \times \omega$. Le support L de $[L]$ est donc un sous-ensemble analytique de $U_1 \times \omega$ dont l'intersection avec $W_z \times \omega$ est vide. Soit $\pi : U \times \omega \rightarrow U$ la projection canonique sur U . Par construction, si L n'est pas vide, il contient une composante connexe Γ_i de $\Gamma \cap U_1 \times \omega$ et donc $\pi(L) \supset \pi[\Gamma_i]$ qui contient un ouvert de U_1 d'après les hypothèses de transversalité faites sur Γ . D'après le théorème de l'application propre, la projection $\pi(L)$ de L sur U_1 est donc soit vide (si L l'est) soit tout U_1 car U_1 est connexe. Or, comme $L \cap W_z \times \omega = \emptyset$, L est nécessairement vide dans $U_1 \times \omega$ et donc $[T_{U_2}] = [T_{U_1}]$ dans $U_1 \times \omega$, d'où l'existence de U_z .

Supposons que l'ensemble $G_z = \partial U_z \setminus W_{\max}$ est un fermé de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle. On choisit un point $x_0 \in G_z$ tel que G_z soit de mesure non nulle dans tout voisinage x_0 . Choisissons alors un voisinage W_{x_0} de x_0 et un système de coordonnées (x_1, \dots, x_{2n}) de W_{x_0} tels que :

- 1) l'ensemble $H = \Psi(G_z \cap W_{x_0})$ soit de mesure non nulle dans \mathbb{R}^{2n-1} où $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ est la projection $\Psi(x_1, \dots, x_{2n}) = (x_2, \dots, x_{2n})$;
- 2) l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}^{2n-1}$ est contenu dans W_{x_0} .

D'après le théorème de Sard, pour presque tout $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$, le courant d'intersection $[\Gamma, \Pi, X]$ est bien défini. Quitte à restreindre H , on peut supposer que ceci est vérifié pour tous les points de H . Soit

$$\tilde{H} = \{(\lambda_X, X) \in \overline{\mathbb{R}_+} \times H; \lambda_X = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; [0, t[\times\{X\} \subset W_{x_0}]\}.$$

Soit $(\lambda_X, X) \in \tilde{H}$. Par définition de H , $\lambda_X < \infty$; d'après le lemme 2.7, le volume des 1-chaînes holomorphes $[S_{(t, X)}] = [T, \pi, (t, X)]$ (où $\pi : U \times \omega \rightarrow U$, $\pi(x, w) = x$) pour $t < \lambda_X$ est uniformément borné. D'après la proposition 5.6, il existe alors une suite de réels $\{t_i\}$ convergeant vers λ_X telle que la suite de 1-chaînes holomorphes $[S_{(t_i, X)}]$ converge au sens des courants vers une 1-chaîne holomorphe $[S_{(\lambda_X, X)}]$ solution au problème du bord pour $[\gamma_{(\lambda_X, X)}]$. On a donc $\tilde{H} \subset G_z$ et est $(n - 1)$ -générique (car de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle). L'implication 1) \Rightarrow 2) avec $Z = \tilde{H}$ permet alors d'obtenir la contradiction recherchée. \square

Soit $G = \partial W_{\max}$. Il reste à montrer que G est de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle nulle. En effet, si c'est le cas on aura $G = U \setminus W_{\max}$ car U est connexe et un ensemble de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle nulle ne peut déconnecter un ouvert de dimension $2n$. Procédons par l'absurde et supposons que G est de mesure $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle. Il existe alors

un point $z \in G$ tel que pour tout voisinage W_z de z dans U , l'ensemble $W_z \cap G$ soit de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle.

Soit $\Pi : U \times \omega \rightarrow \omega$ la projection sur le second membre. Soit V un voisinage de Stein de $\Pi(\gamma_z) = \Pi(\Gamma \cap \{z\} \times \omega)$. Posons

$$C = C \frac{\bar{V}_1}{\frac{1}{2}\epsilon} > 0$$

la constante définie dans la proposition 5.7 avec ϵ choisi de manière à ce que le voisinage V_ϵ soit inclus dans V . Par conséquent, tout sous-ensemble analytique irréductible de dimension 1 de $V \setminus \bar{V}_{\frac{1}{2}\epsilon}$ dont l'adhérence rencontre $\bar{V}_{\frac{1}{2}\epsilon} \setminus V \setminus \bar{V}_\epsilon$, a un volume strictement supérieur à C . Soit $x_0 \in W_{\max}$ tel que $\gamma_{x_0} \subset \{x_0\} \times V_\epsilon$. Soient \widetilde{W}_z et $W_z \subset \subset \widetilde{W}_z$ deux voisinages de Stein de z dans U et (x_1, \dots, x_{2n}) un système de coordonnées de W_z tels que :

- 1) pour tout $x \in W_z$, $\Pi(\gamma_x) \subset V_{\frac{1}{2}\epsilon}$;
- 2) l'ensemble $H = \Psi(G \cap V_z)$ soit de mesure non nulle dans \mathbb{R}^{2n-1} où $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ est la projection $\Psi(x_1, \dots, x_{2n}) = (x_2, \dots, x_{2n})$;
- 3) l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}^{2n-1} \subset U_{x_0} \cap W_z$ où U_{x_0} est un ouvert maximal contenant x_0 tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admet une solution $[T_{x_0}]$ dans $U_{x_0} \times \omega$;
- 4) W_z est assez petit pour que si $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$ on ait

$$M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap \pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))) < \frac{1}{2}C$$

où $M_{W_z} = \sup_{\Gamma \cap \pi^{-1}(W_z)} |\Omega|$ avec Ω la forme kählérienne sur $\widetilde{W} \times \omega$.

D'après le théorème de Sard, il existe un fermé $E \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ de mesure nulle tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n-1} \setminus E$, la variété $\pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))$ soit transverse à Γ . Le courant d'intersection est donc bien défini (on le notera $[\Gamma, \Psi \circ \pi, X]$). Quitte à remplacer l'ouvert W_z par un ouvert de $W_z \setminus E$, on peut toujours supposer que $W_z \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. L'ensemble H étant de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle (et est donc $(n - 1)$ -générique), il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble

$$H_\ell^0 = \{(0, X) \in W_z ; \text{Vol } S_{(0,X)} < k \text{ et } \text{Vol}[S_{(0,X)}] < \ell\}$$

(où $[S_{(0,X)}] = [T_{x_0}, \pi, (0, X)]$) soit encore de mesure de Hausdorff $(2n - 1)$ -dimensionnelle non nulle. Pour tout $X \in \Psi(H_\ell^0)$, notons λ_X la borne supérieure des réels t pour lesquels il existe un voisinage $V_{(t,X)}$ de $[0, t] \times \{X\}$ tels que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admette une solution $[T_{(t,X)}]$ dans $V_{(t,X)} \times \omega$ qui coïncide avec $[T_{x_0}]$ au voisinage de $(0, X) \times \omega$. Soient $X \in \Psi(H_\ell^0)$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < \lambda_X$ une suite de réels convergeant vers λ_X et

$$[S_n] = [T_{(t_n, X)}, \pi, (t_n, X)].$$

D'après le lemme 2.7, pour tout $X \in \Psi(H_\ell^0)$,

$$\begin{aligned} \text{Vol}[S_n] &\leq \text{Vol}[S_{(0,X)}] + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap [(0, X), (t_n, X)] \times \omega) \\ &< \ell + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap [(0, X), (\lambda_X, X)] \times \omega), \\ \text{Vol } S_n &\leq \text{Vol } S_{(0,X)} + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap [(0, X), (t_n, X)] \times \omega) \\ &< k + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap [(0, X), (\lambda_X, X)] \times \omega). \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une suite extraite (que l'on notera encore $\{[S_n]\}$) convergeant au sens des courants vers une 1-chaîne limite $[S^\infty]$ solution au problème du bord pour $[\gamma_{(\lambda_X, X)}]$ et telle que la suite des supports S_n converge au sens de Bishop vers une surface de Riemann limite S_∞ . L'ensemble $\gamma_{(\lambda_X, X)} \cup S_\infty$ contient alors nécessairement une surface de Riemann compacte L . En effet, sinon, en considérant un voisinage de Stein V_X de $\gamma_{(\lambda_X, X)} \cup S_\infty$, on montre grâce à la proposition 5.2 qu'il existe un voisinage Λ de (λ_X, X) tel que $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord dans $\Lambda \times \omega \cap V_X$ qui coïncide avec $[T_{(t_n, X)}]$ (pour un n assez grand) là où les deux solutions sont définies simultanément. Par conséquent cela montre que $[\Gamma]$ admet une solution au problème du bord au voisinage de $[(0, X), (\lambda_X, X)] \times \omega$ ce qui contredit la définition de λ_X . Mais alors, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que la 1-chaîne holomorphe $[S^\infty] - m[L]$ soit une solution au problème du bord pour $[\gamma_{(\lambda_X, X)}]$ à support dans $S_\infty \setminus \tilde{L}$ où \tilde{L} est une composante irréductible de $L \setminus \gamma_{(\lambda_X, X)}$ dont le volume est strictement supérieur à C . Soit $[A_{(\lambda_X, X)}]$ une solution au problème du bord pour $[\gamma_{(\lambda_X, X)}]$ ayant un support de volume minimal (voir proposition 5.16). On a donc, pour tout $X \in \Psi(H_\ell^0)$,

$$\text{Vol } A_{(\lambda_X, X)} < k + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap [(0, X), (\lambda_X, X)] \times \omega) - C < k - \frac{1}{2}C.$$

L'ensemble H_ℓ^0 étant $(n-1)$ -générique, d'après l'implication 1) \Rightarrow 2), il existe un point $x_1 = (\lambda_X, X)$ où $(0, X) \in H_\ell^0$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admette une solution au dessus d'un voisinage W_{x_1} de x_1 et tel que l'ensemble des points de la forme (λ_Y, Y) avec $Y \in \Psi(H_\ell^0)$ est encore $(n-1)$ -générique dans tout voisinage de x_1 . On a bien sûr $W_{x_1} \subset W_{\max}$. En appliquant le même raisonnement que précédemment à W_{x_1} , on construit un ensemble de mesure de Hausdorff $(2n-1)$ -dimensionnelle non nulle $H_{\ell_1}^1$ tel que pour tout $(\lambda_X, X) \in H_{\ell_1}^1$ on ait

$$\text{Vol } A_{(\lambda_X, X)} \leq k - \frac{1}{2}C + M_{W_z} \cdot \text{Vol}(\Gamma \cap \pi^{-1}(\Psi^{-1}(X))) - C < k - 2\frac{1}{2}C$$

et par récurrence, on construit une suite d'ensembles $H_{\ell_n}^n$ tels que pour tout $(\lambda_X, X) \in H_{\ell_n}^n$, on ait

$$\text{Vol } A_{(\lambda_X, X)} \leq k - \frac{1}{2}(n+1)C.$$

Pour n assez grand, $k - \frac{1}{2}(n + 1)C < 0$ et nous obtenons la contradiction recherchée. Ce qui termine la preuve du théorème 2.3.

3. Problème du bord dans les variétés produit : cas rectifiable

La régularité de Γ dans le théorème principal ne joue pas un rôle important. En effet, le théorème est encore valide dans le cadre des courants rectifiables (voir [14], [8]) dont le support est *est géométriquement m -rectifiable* ou encore *est de classe A_m* . Rappelons que A est géométriquement m -rectifiable si A est (\mathcal{H}_m, m) -rectifiable et si le cône tangentiel de A en \mathcal{H}_m -presque tout point est un espace vectoriel réel de dimension m avec \mathcal{H}_m la mesure de Hausdorff de dimension m .

Soient X, Y deux variétés réelles lisses, Y de dimension $p \leq m$ et $f : X \rightarrow Y$ une application C^∞ et Γ un courant rectifiable de dimension m . Alors pour \mathcal{H}_p -presque tout $y \in Y$, la tranche $[\Gamma, f, y]$ est un courant rectifiable de dimension $m - p$ de support inclus dans $\Gamma \cap f^{-1}(y)$ vérifiant :

$$\int_Y \Phi(y)([\Gamma, f, y], \Psi) \cdot \Omega = [\Gamma, f^*(\Phi \cdot \Omega) \wedge \Psi]$$

où Ψ est une $(m - p)$ -forme à support compact, Φ une fonction à support compact et Ω est la forme volume de Y (voir [14]).

Un $(2p - 1)$ -courant $[\Gamma]$ de \mathbb{C}^n est dit *maximalement complexe* s'il admet une décomposition

$$[\Gamma] = [\Gamma]_{p,p-1} + [\Gamma]_{p-1,p}$$

où $[\Gamma]_{p,p-1}$ et $[\Gamma]_{p-1,p}$ sont respectivement des courants de bidimension $(p, p - 1)$ et $(p - 1, p)$. Bien sûr, une variété lisse Γ est maximalement complexe si et seulement si le courant d'intégration $[\Gamma]$ associé est maximalement complexe.

Dans toute la suite, nous supposons que $[\Gamma]$ est un courant rectifiable, fermé et maximalement complexe de $U \times \omega$ dont le support Γ est de classe A_{2n+1} . Pour tout $z \in U$, nous noterons $[\gamma_z]$ la tranche $[\Gamma, \pi, z]$ quand elle est bien définie. Nous noterons aussi $\gamma_z = \Gamma \cap \{z\} \times \omega$. Le support de $[\gamma_z]$ est bien sûr inclus dans γ_z mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

THÉORÈME 3.1. — *Soient U une variété complexe connexe de dimension n , ω une variété kählérienne disque convexe et $\pi : U \times \omega \rightarrow U$ la projection $(z, w) \mapsto z$. Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable, fermé et maximalement complexe de $U \times \omega$ dont le support Γ est de classe A_{2n+1} et vérifie que pour tout compact $K \subset U$, $\Gamma \cap \pi^{-1}(K)$ est un compact de $U \times \omega$. Supposons que pour toute 2-forme lisse Θ définie sur ω , on ait $[\Gamma] \wedge \Theta = 0$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe un sous-ensemble $(n - 1)$ -générique Z de U tel que pour tout $z \in Z$, la tranche $[\gamma_z] = [\Gamma, \pi, z]$ est bien définie et il existe une 1-chaîne*

holomorphe $[S_z]$ de masse finie de $(\{z\} \times \omega) \setminus \gamma_z$, dont l'adhérence du support S_z est un compact de $\{z\} \times \omega$ et telle que $d[S_z] = [\gamma_z]$.

2) Il existe un ouvert non vide $O \subset U$ tel que $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord dans $O \times \omega$ (i.e. il existe une $(n+1)$ -chaîne holomorphe $[T]$ de $(O \times \omega) \setminus \Gamma$, de masse localement finie dans $O \times \omega$ et telle que pour tout compact $K \subset O$, $T \cap \pi^{-1}(K)$ est relativement compact dans $O \times \omega$ et $d[T] = [\Gamma]$ dans $O \times \omega$).

De plus si l'on suppose que pour tout $z \in U$ la tranche $[\gamma_z] = [\Gamma, \pi, z]$ est bien définie et est un 1-courant rectifiable fermé dont le support est de classe A_1 . Alors les deux propositions précédentes sont aussi équivalentes aux propositions suivantes :

3) Il existe un fermé $G \subset U$ de mesure de Hausdorff $(2n-1)$ -dimensionnelle nulle tel que $\forall z \notin G$, il existe un voisinage W_z de z dans U tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ soit résoluble dans $W_z \times \omega$.

4) Il existe un fermé F de mesure nulle dans U et une $(n+1)$ -chaîne holomorphe T de $((U \setminus F) \times \omega) \setminus \Gamma$ telle que le problème du bord pour $[\Gamma]$ soit résoluble dans $(U \setminus F) \times \omega$.

La preuve étant en presque tous points identique à celle du cas lisse, nous signalons juste les points qui diffèrent (une démonstration complète se trouve dans [34]).

Dans la démonstration du cas lisse, un point important est l'utilisation du théorème de Sard. Dans le cas d'ensembles géométriquement rectifiables, ce dernier peut être remplacé par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2 (voir [8], lemme 1.4). — Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable de \mathbb{C}^{m+n} dont le support Γ est de classe A_{2n+1} . Alors, pour presque tous les m -plans $\mathbb{C}_\nu^n \subset \mathbb{C}^{n+m}$ et pour presque tous les points $z \in \mathbb{C}_\nu^n$, la tranche $[\Gamma, \pi_\nu, z]$ (où π_ν est la projection orthogonale sur \mathbb{C}_ν^n) est un courant rectifiable dont le support est de classe A_1 .

Soient $\gamma \subset \mathbb{C}^n$ un compact de classe A_1 et $\hat{\gamma}$ son enveloppe d'holomorphie. D'après [39], [37], [1], [28], [8], l'ensemble $A = \hat{\gamma} \setminus \gamma$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et de volume fini de $\mathbb{C}^n \setminus \gamma$. Dans le cas où γ est une courbe lisse par morceaux dont la partie régulière admet un nombre fini de composantes connexes, A admet un nombre fini de composantes irréductibles. Cette dernière propriété a été utilisée à de nombreuses reprises dans la preuve du théorème 2.3 afin de montrer qu'il existe qu'un ensemble fini de courbes compactes irréductibles L_1, \dots, L_k contenant l'une des composantes irréductibles de A (voir par exemple le lemme 2.5).

Comme le montre l'exemple suivant, ceci n'est plus vrai dans le cas où γ est un compact de classe A_1 :

EXEMPLE 3. — Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, définissons $z_i = 1/i$,

$$D_i = \left\{ (z_i, z) \in \mathbb{C}^2; |z| < \frac{1}{2^n} \right\},$$

$$C_i = \partial D_i^+ = \left\{ (z_i, z) \in \mathbb{C}^2; |z| = \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Notons $[D_i^+]$ et $[C_i]$ les courants d'intégration sur D_i^+ et C_i orientés de manière à ce que $[C_i] = d[D_i^+]$ et $\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup \{(0,0)\}$. Alors,

$$[S] = \sum_{i=1}^{\infty} [D_i^+]$$

est une 1-chaîne holomorphe de masse finie de $\mathbb{C}^2 \setminus \gamma$. Son bord $[\gamma] = \sum_{i=1}^{\infty} [C_i]$ est un 1-courant rectifiable dont le support γ est de classe A_1 .

Dans ce cas, le support de $[S]$ contient une infinité de composantes analytiques irréductibles. L'espace affine \mathbb{C}^2 étant de Stein, la solution est unique. Mais dans le cas de $P_2(\mathbb{C})$ il peut exister une infinité de solutions au problème du bord pour une courbe de classe A_1 :

EXEMPLE 4. — Du fait que $\mathbb{C}^2 \subset P_2(\mathbb{C})$, nous pouvons considérer l'exemple précédent dans $P_2(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $P_1^i(\mathbb{C})$ l'unique sphère de Riemann contenant D_i^+ et $D_i^- = P_1^i \setminus D_i^+$. Alors, pour tout i , $[C_i] = d[D_i^+]$ mais on a aussi $[C_i] = d(-[D_i^-])$. Dans $P_2(\mathbb{C})$, $[\gamma]$ admet donc une infinité de solutions au problème du bord. En effet, toute chaîne de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} \pm [D_i^{\pm}]$ où ' \pm ' vaut '+' sauf pour un nombre fini d'entiers $i \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels ' \pm ' vaut '-' est une solution au problème du bord pour $[\gamma]$. De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, P_1^i est une courbe compacte contenant une composante irréductible du support de toute solution au problème du bord pour $[\gamma]$.

Cependant, si l'on se restreint à l'ensemble des solutions au problème du bord à une courbe donnée dont le volume du support est « minimal » (ou « proche de l'être »), alors il existe un ensemble fini de courbes L_1, \dots, L_k compactes tel que deux solutions quelconques parmi elles diffèrent d'une chaîne holomorphe combinaison des L_1, \dots, L_k (voir la preuve de la proposition 5.15 pour une illustration de ce fait).

4. Applications et corollaires

4.1. Problème du bord dans l'espace projectif complexe. — Dans cette section, nous montrons (de manière abrégée) comment appliquer notre théorème principal (ou sa démonstration) pour obtenir de nouvelles preuves des principaux résultats sur le problème du bord dans l'espace projectif.

COROLLAIRE 4.1 (voir [18], [12], [8]). — Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable, fermé, maximale-ment complexe de $P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{(n-p+1)}(\mathbb{C})$ ($p \geq 2$) dont le support est un compact de classe A_{2p-1} . Alors il existe une p -chaîne holomorphe $[T]$ de $P_n(\mathbb{C}) \setminus (P_{(n-p+1)}(\mathbb{C}) \cup \Gamma)$, de masse finie dans $P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{(n-p+1)}(\mathbb{C})$ telle que $[\Gamma] = d[T]$.

Démonstration. — Pour $p = 2$, $\Gamma \subset P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$. Le problème du bord pour $[\Gamma]$ admet donc une solution (voir [8]). Pour $p > 2$, soit H un $n - p + 1$ espace affine tel que $\Gamma \subset P_n(\mathbb{C}) \setminus H$. D'après la propriété de tranchage des courants rectifiables de support de classe A_{2p-1} (prop. 3.2), quitte à perturber légèrement H , on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe une variété $V \subset G(n - p + 2, n)$ formée de $(n - p + 2)$ -plans contenant H telle que pour presque tout $(n - p + 2)$ -plan G_ν avec $\nu \in V$, $[\Gamma \cap G_\nu]$ est un 3-courant rectifiable, fermé et maximale-ment complexe dans $G_\nu \setminus H \simeq \mathbb{C}^{n-p+2}$ et dont le support est de classe A_3 . Le problème du bord pour le courant d'intersection $[\Gamma \cap G_\nu]$ admet donc une solution dans $G_\nu \setminus H$. Soit $\Psi : V \times \mathbb{C}^{n-p+2} \rightarrow P_n(\mathbb{C}) \setminus H$ une application holomorphe injective identifiant $\{\nu\} \times \mathbb{C}^{n-p+2}$ avec $G_\nu \setminus H$ (on a supposé ici que V est assez petit pour avoir l'existence de Ψ). Soit $[\tilde{\Gamma}] = \Psi^*([\Gamma])$ l'image inverse de $[\Gamma]$ par Ψ . D'après le théorème 3.1, le problème du bord est résoluble pour $[\tilde{\Gamma}]$ dans $V \times \mathbb{C}^{n-p+2}$ (quitte à avoir ici aussi choisi H convenablement pour que les hypothèses du théorème soient vérifiées). Donc, il existe un $(n - p + 2)$ -plan P tel que le problème du bord pour $[\tilde{\Gamma}]$ admette une solution $[T]$ au voisinage de P . Soit P_ϵ un ϵ -voisinage de P dans $P_n(\mathbb{C})$. Pour ϵ assez petit la restriction de $[T]$ à P_ϵ est une p -chaîne holomorphe $[T_\epsilon]$ dont le bord est un courant rectifiable maximale-ment complexe dont le support est de classe A_{2p-1} et qui coïncide avec $[\Gamma]$ au voisinage de P . La résolution du problème du bord pour $[\Gamma]$ et alors équivalente à la résolution du problème du bord pour $[\Gamma] - d[T_\epsilon]$ dont le support est dans $P_n(\mathbb{C}) \setminus P$. On est donc ramené au cas où $\Gamma \subset P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{n-p+2}(\mathbb{C})$. Si $p = 3$, le résultat est prouvé. Sinon, en faisant à nouveau la même manipulation, on est ramené au cas $\Gamma \subset P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{n-p+3}(\mathbb{C})$. Puis par récurrence, on se ramène au cas $\Gamma \subset P_n(\mathbb{C}) \setminus P_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$ ce qui montre le résultat. \square

DÉFINITION 4.2 (voir [10]). — Soit U un ouvert de la variété grassmannienne $G(n - p + 1, n)$. Un sous-ensemble $K \subset U$ est dit *projectivement k -générique* si pour tout ensemble non k -générique $S \subset P_n(\mathbb{C})$, l'ensemble $K \setminus G_S$ est k -générique où

$$G_S = \{ \nu \in G(n - p + 1, n); P_{n-p+1}^\nu(\mathbb{C}) \cap S \neq \emptyset \}.$$

Une propriété principale des ensembles projectivement k -génériques est que si $V \subset U$ est une sous-variété complexe de dimension $p - 1$ qui est $(p - 2)$ -générique, alors il existe $\nu \in V$ tel que $P_{n-p+1}^\nu \cap S = \emptyset$, où

$$S = \{ z \in P_n(\mathbb{C}); \dim\{ \nu \in V; z \in P_{n-p+1}^\nu \} \geq 1 \}.$$

COROLLAIRE 4.3 (voir [12], [10]). — Soit X un ouvert $(n - p + 1)$ -concave de $P_n(\mathbb{C})$ avec

$$X^* = \{ \nu \in G(n - p + 1, n); P_{n-p+1}^\nu \subset X \}$$

connexe. Soit $[\Gamma]$ une combinaison linéaire, localement finie, à coefficients entiers de courants d'intégration sur des sous-variétés réelles Γ_i , orientées, de classe C^1 , de dimension $(2p - 1)$ et maximale dans X . Soit K un sous-ensemble projectivement $(p - 2)$ -générique de X^* . Supposons que pour tout $\nu \in K$:

- 1) P_{n-p+1}^ν intersecte Γ_i transversalement en tout point ;
- 2) il existe une 1-chaîne holomorphe $[S_\nu]$ de masse finie de $P_{n-p+1}^\nu \setminus \Gamma$ telle que $d[S_\nu] = [\gamma_\nu]$ au sens des courants dans P_{n-p+1}^ν (où $[\gamma_\nu] = [\Gamma \cap P_{n-p+1}^\nu]$ est le courant d'intersection de P_{n-p+1}^ν avec $[\Gamma]$).

Alors il existe une p -chaîne holomorphe $[T]$ de $X \setminus \Gamma$, de masse localement finie, vérifiant $d[T] = [\Gamma]$ dans X .

Démonstration. — De la même manière que dans la démonstration de l'implication 1) \Rightarrow 2), on montre qu'il existe $\nu_0 \in K$, un voisinage de Stein V_0 de $S_{\nu_0} \cup \gamma_{\nu_0}$ (où $\gamma_{\nu_0} = \Gamma \cap P_{n-p+1}^{\nu_0}$) et un sous-ensemble dénombrablement $(n - 1)$ -générique K_0 de K tel que pour tout $\nu \in K_0$, $S_\nu \subset V_0$. De la proposition 5.1, on déduit alors qu'il existe une sous-variété analytique $\tilde{K} \subset X^*$ de dimension $p - 1$ et projectivement $(p - 2)$ -générique tel que pour tout $\nu \in \tilde{K}$, le problème du bord pour $[\gamma_\nu]$ soit résoluble dans V_0 . Soit $\Psi : \tilde{K} \times P_{n-p+1}(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ la projection canonique qui identifie $\{\nu\} \times P_{n-p+1}(\mathbb{C})$ avec P_{n-p+1}^ν . Alors il existe $\nu \in \tilde{K}$ tel que $\Psi^{-1}(\{z\})$ soit fini pour tout $z \in P_{n-p+1}^\nu$. Il existe donc un voisinage V de $\nu \in \tilde{K}$ tel que la restriction de Ψ à $V \times P_{n-p+1}(\mathbb{C})$ soit propre et d'ordre fini. L'image inverse $[\tilde{\Gamma}] = \Psi^*([\Gamma])$ est donc bien définie et est encore un courant rectifiable, fermé, maximale dans X . De plus, cette p -chaîne a un support de classe A_{2p-1} . D'après le théorème 3.1, il existe un ouvert U de V tel que le problème du bord pour $[\tilde{\Gamma}]$ admette une solution $[\tilde{T}]$ dans $U \times P_{n-p+1}(\mathbb{C})$. Mais alors, l'image directe de $[\tilde{T}]$ donne une solution $[T] = \Psi_*([\tilde{T}])$ au problème du bord pour $[\Gamma]$ dans un voisinage d'un $(n - p + 1)$ -plan P de $P_n(\mathbb{C})$. Soit P_ϵ un ϵ -voisinage de P dans $P_n(\mathbb{C})$. Pour ϵ assez petit, la restriction $[T_\epsilon]$ de $[T]$ à P_ϵ est une p -chaîne holomorphe dont le bord est un courant rectifiable maximale dans X dont le support est de classe A_{2p-1} et qui coïncide avec $[\Gamma]$ au voisinage de P . Le courant $[\Gamma] - d[T_\epsilon]$ a donc un support dans $P_n(\mathbb{C}) \setminus P$ et admet une solution $[R]$ au problème du bord d'après le corollaire précédent. La p -chaîne holomorphe $[R] + [T_\epsilon]$ nous donne alors une solution au problème du bord pour $[\Gamma]$. □

4.2. Théorème de Hartogs-Levi généralisé. — On note Δ le disque unité de \mathbb{C} ,

$$C(r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\} \quad \text{et} \quad C(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z| < r_2\}.$$

COROLLAIRE 4.4 (théorème de Hartogs-Levi généralisé)

Soit X une variété kählérienne disque convexe. Soit f une application méromorphe, à valeurs dans X et définie sur $C(1 - \epsilon, 1) \times \Delta$. Soit $\{\ell_\nu\}_{\nu \in V}$ une famille non dénombrable de droites complexes. On suppose de plus que pour tout $\nu \in V$, $\ell_\nu \cap C(1 - \epsilon, 1) \times \Delta \neq \emptyset$, $\ell_\nu \cap C(1 - \epsilon, 1) \times b\Delta = \emptyset$ et pour tous $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in V$ deux à deux différents, $\ell_{\nu_1} \cap \ell_{\nu_2} \cap \ell_{\nu_3} \cap \Delta^2 = \emptyset$. Supposons que f se prolonge méromorphiquement à $\ell_\nu \cap \Delta^2$ pour tout $\nu \in V$. Alors f se prolonge méromorphiquement à Δ^2 .

Démonstration. — L'application f étant méromorphe, l'ensemble des points d'indétermination de f est discret dans $C(1 - \epsilon, 1) \times \Delta$. Soit $r \in]1 - \epsilon, 1[$, tel que $M_r = C(r) \times \Delta$ ne rencontre aucun point d'indétermination de f . La restriction de f à M_r est donc lisse et pour tout $\nu \in V \subset G(2, 3)$, la droite ℓ_ν est transverse à M_r . Soit

$$\Gamma_f = \{(w, c) \in \Delta^2 \times X; w \in M_r, c = f(w)\}$$

le graphe de f . De la même manière que dans la preuve du théorème 2.3, il existe une surface de Riemann $\tilde{V} \subset G(2, 3)$, un point $\nu_0 \in \tilde{V}$, un voisinage de Stein W de $S_{\nu_0} \cup \gamma_{\nu_0}$ (où S_{ν_0} est le graphe de l'extension méromorphe de f à ℓ_{ν_0} et $\gamma_{\nu_0} = \Gamma_f \cap (\ell_{\nu_0} \times X)$), tels que l'ensemble des points $\nu \in \tilde{V}$ vérifiant $S_\nu \subset W$ soit 0-générique. Soit $\phi : W \rightarrow \mathbb{C}^m$ un plongement de W dans l'espace affine. D'après l'hypothèse faite sur les droites ℓ_ν et le théorème de Levi, $\phi \circ f$ admet une extension holomorphe au voisinage de $\Delta^2 \cap \ell_{\nu_0}$. Et donc $f = \phi^{-1} \circ \phi \circ f$ admet une extension holomorphe au voisinage de $\Delta^2 \cap \ell_{\nu_0}$. L'extension méromorphe à tout Δ^2 se fait alors soit en appliquant à nouveau le théorème 2.3, soit grâce au résultat de [22]. \square

4.3. Généralisations du théorème de Hartogs-Bochner. — Soit f une fonction de classe C^1 définie sur une variété maximale complexe Γ . Alors f est une fonction CR si et seulement si son graphe est maximale complexe. Dans ce paragraphe, en appliquant le problème du bord pour le graphe de fonctions CR dans différentes situations, nous obtenons une extension analytique de ce graphe et par conséquent une extension analytique de ces fonctions CR.

COROLLAIRE 4.5. — *Soient X une variété kählérienne disque convexe et Γ une sous-variété réelle, orientée, compacte, de classe C^2 , de dimension $2p - 1$ ($p \geq 2$), connexe et maximale complexe de \mathbb{C}^n . D'après [18], il existe un unique sous-ensemble analytique irréductible A de dimension p et de volume fini de $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ solution au problème du bord pour $[\Gamma]$ (i.e. $d[A] = \pm[\Gamma]$ selon*

l'orientation de Γ). Alors toute application CR continue $f : \Gamma \rightarrow X$ admet une extension méromorphe à A .

Démonstration. — D'après [24], Γ est une variété CR globalement minimale (i.e deux points de Γ peuvent toujours être joints par une réunion finie de courbes CR de Γ). Par conséquent, d'après le théorème de Trépreau [38], Γ admet une extension en variété complexe \mathcal{W} qui, en chaque point de Γ , est un voisinage ou un demi-voisinage de ce point. Nous noterons \mathcal{W} cet ensemble analytique. De plus, encore d'après le théorème de Trépreau, \mathcal{W} peut être choisis assez petit pour que f admette une extension holomorphe à \mathcal{W} . Soit $\Pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{p-1}$ la projection sur les $(p-1)$ premières coordonnées de \mathbb{C}^n . Quitte à changer de coordonnées, on peut toujours supposer que pour tout $z \in \mathbb{C}^{p-1}$, $\Pi^{-1}(\{z\}) \cap \mathcal{W}$ est une surface de Riemann (pouvant être vide). Quitte à déformer Γ dans \mathcal{W} , on peut supposer sans perte de généralité que f est lisse sur Γ et d'après la proposition 2.4 que

$$\Gamma_f = \{z \times (w, y) \in \mathbb{C}^{p-1} \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X); (z, w) \in \Gamma, y = f(z)\}$$

vérifie les hypothèses *a)*, *b)* et *c)* du théorème 2.3 avec $U = \mathbb{C}^{p-1}$ et $\omega = \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$. La variété Γ étant compacte, il existe $R > 0$ tel que si $|x| > R$, on ait $\pi^{-1}(x) \cap \Gamma = \emptyset$ (rappelons que $\pi : U \times \omega \rightarrow U$ est la projection sur le premier membre). Le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ est donc résoluble dans l'ouvert $\{|x| > R\} \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X)$ (avec le courant nul comme solution au problème du bord). La variété $\omega = \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$ est bien sûr disque convexe, le théorème 2.3 s'applique donc. Il reste à vérifier que l'extension ainsi obtenue donne une solution globale au problème du bord pour $[\Gamma_f]$. D'après le lemme 2.8, il existe un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{C}^{p-1}$ contenant l'ouvert $\{|x| > R\}$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ admette une solution $[T_U]$ dans $U \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X)$ qui est nulle pour $\{|x| > R\}$.

LEMME 4.6. — *On peut toujours supposer que $[T_U]$ vérifie la propriété suivante : il n'existe pas d'ouvert $W \subset U$ tel que $T_U \cap \pi^{-1}(W)$ contienne un sous-ensemble analytique de $\pi^{-1}(U)$ de dimension p , fermé et non vide.*

Démonstration. — Pour cela, il suffit de montrer si R est une composante analytique irréductible de T_U fermée dans $\pi^{-1}(W)$ (où W est un ouvert de U) alors R est fermée dans $\pi^{-1}(U)$. Notons $[R]$ la restriction de $[T_U]$ à R . Par définition de $[T_U]$, pour tout point $w \in W$, $R_w = R \cap \pi^{-1}(w)$ est une courbe compacte. En particulier, si on note $\Pi_2 : \mathbb{C}^n \times X \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection sur le premier membre, pour tout point $w \in W$, $\Pi_2(R_w)$ est fini (car c'est un sous-ensemble analytique compact de \mathbb{C}^n). Par conséquent $\Pi_{2*}([R])$ est une chaîne holomorphe de \mathbb{C}^n de dimension inférieure à $p-1$. Or, on a

$$d\Pi_{2*}([T_U]) = \Pi_{2*}(d[T_U]) = \Pi_{2*}([\Gamma_f]) = [\Gamma].$$

Par conséquent, le bord (au sens des courants) de $[R]$ ne peut être le courant d'intégration sur une composante de Γ_f et $[R]$ est donc une p -chaîne holomorphe fermée de $U \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$. Quitte à remplacer $[T_U]$ par $[T_U] - [R]$, on peut donc toujours supposer que $[T_U]$ vérifie la propriété du lemme. \square

LEMME 4.7. — *Le bord $G = \partial U$ est de mesure de Hausdorff $(2p - 3)$ -dimensionnelle nulle.*

Démonstration. — Notons W_{\max} l'ensemble des point $z \in \mathbb{C}^{p-1}$ ayant un voisinage W_z tel que le problème du bord pour Γ_f admette une solution dans $W_z \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X)$. Supposons que G est de mesure de Hausdorff $(2p - 3)$ -dimensionnelle non nulle. D'après le lemme 2.8, il existe alors un point z dans $W_{\max} \cap G$. Soit W_z un voisinage de z dans \mathbb{C}^{p-1} tel que le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ admette une solution $[T_z]$ dans $W_z \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$ (on peut toujours supposer que l'adhérence de T_z ne contient aucun sous-ensemble analytique fermé de dimension p de $W_z \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$). Comme W_z n'est pas inclus dans U , il existe au moins une composante connexe W de $U \cap W_z$ tel que les restrictions de $[T_z]$ et de $[T_U]$ à $W \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$ ne soient pas égales. Mais alors le courant $[R] = [T_z] - [T_U]$ défini dans $W \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X)$ est fermé et est donc une p -chaîne holomorphe de $W \times (\mathbb{C}^{n-p+1} \times X)$. Comme les chaînes $[T_U]$ et $[T_z]$ n'ont pas de composantes fermées dans $\pi^{-1}(W)$ (voir lemme précédent), toutes leurs composantes admettent des composantes de Γ_f dans leur adhérence. Par conséquent, il existe un point $z \in W$ tel que $R \cap \gamma_z$ (où $\gamma_z = \Gamma_f \cap \pi^{-1}(z)$) est une courbe lisse non vide (donc n'est pas un ensemble fini). Or, $R \cap \pi^{-1}(z)$ est une courbe compacte et donc sa projection sur \mathbb{C}^n est un nombre fini de points. Or cette projection doit contenir au moins la projection d'une composante de la courbe γ_z ce qui donne la contradiction recherchée. \square

Le bord $G = \partial U$ ne peut donc déconnecter \mathbb{C}^{p-1} et donc $G = \mathbb{C}^{p-1} \setminus U$. D'après la proposition 5.17, la solution $[T]$ au problème du bord pour $[\Gamma_f]$ est de volume borné au voisinage de G et admet une extension simple (que l'on notera aussi $[T]$) sur $(\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X) \setminus \Gamma_f$ qui est solution au problème du bord pour $[\Gamma_f]$ dans $\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X$. Soit

$$\Pi : \mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}^{n-p+1} \times X \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

la projection canonique sur les deux premiers membres. On a alors :

$$d\Pi_*([T]) = \Pi_*(d[T]) = \Pi_*([\Gamma_f]) = [\Gamma] = \pm d[A].$$

Par unicité du problème du bord dans \mathbb{C}^n , on a alors $\Pi_*([T]) = \pm[A]$. Les p -chaînes holomorphes $[T]$ et $[A]$ étant de multiplicité ± 1 , $\Pi|_T$ est une injection (en dehors d'un sous-ensemble analytique propre de T). L'application inverse de $\Pi|_T$ est donc une application méromorphe dont la valeur au bord (au sens des courants) est égale à $[\Gamma_f]$, c'est l'extension méromorphe de f . \square

De la même manière que dans [33], proposition 6, en remplaçant l'utilisation du théorème d'extension CR-méromorphe par le corollaire précédent, nous obtenons les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 4.8. — *Soient ω une variété kählérienne disque convexe et $\Gamma \subset \omega$ une sous-variété réelle de classe C^2 , de dimension $2p - 1$ ($p \geq 2$), orientée, connexe, compacte et maximale complexe. Supposons que Γ admette un plongement CR ϕ de classe C^2 dans \mathbb{C}^n . Alors il existe un sous-ensemble analytique irréductible A de $X \setminus \Gamma$, de dimension p , borné et de volume fini dans ω solution au problème du bord pour $[\Gamma]$ (i.e. $d[A] = \pm[\Gamma]$ selon l'orientation de Γ). De plus, si X est une variété kählérienne disque convexe, alors toute application CR continue sur Γ et à valeurs dans X admet une extension méromorphe à A .*

COROLLAIRE 4.9. — *Soit M une hypersurface de classe C^2 de $P_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$), le séparant en deux domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 . Supposons qu'il existe une fonction holomorphe non constante définie dans un voisinage connexe de M . Alors pour toute variété kählérienne disque convexe X , les applications CR continues sur M et à valeurs dans X admettent une extension méromorphe soit à Ω_1 soit à Ω_2 . Le choix de Ω_1 ou de Ω_2 ne dépend pas de l'application CR.*

Dans le théorème 2.3, l'obstacle à l'existence d'une solution globale au problème du bord est l'apparition de courbes compactes au voisinage desquelles il n'est plus possible d'appliquer la proposition 5.8. Cependant, si l'on suppose que la variété kählérienne ω , ne contient pas de courbe compacte, il n'y a alors plus d'obstacle à ce que la solution obtenue soit une solution globale et nous obtenons alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.10. — *Supposons que Ω est une surface kählérienne disque convexe ne contenant aucune surface de Riemann compacte. Soit M une hypersurface réelle lisse, connexe et compacte de Ω la séparant en deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2 . Alors toute fonction holomorphe f au voisinage de M admet une extension holomorphe sur Ω_1 ou sur Ω_2 . Supposons de plus qu'il existe une fonction holomorphe non constante sur un voisinage connexe de M et que X est une variété kählérienne disque convexe. Alors les applications méromorphes dans un voisinage connexe de M et à valeurs dans X admettent une extension méromorphe à Ω_1 ou à Ω_2 . Le choix de Ω_1 ou de Ω_2 ne dépend pas de l'application CR.*

Démonstration. — Soit f une fonction holomorphe non constante définie au voisinage de M (si les fonctions holomorphes au voisinage de M sont constantes, il n'y a rien à montrer). De même que précédemment, en considérant le graphe $[\Gamma_f]$ de la restriction de f sur M (ou une déformation de M), on montre qu'il existe un ouvert maximal U_{\max} tel que le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ admette une solution $[T]$ dans $U_{\max} \times \Omega$. Montrons que $U_{\max} = \mathbb{C}$. D'après le lemme 2.8,

si $G = \mathbb{C} \setminus U_{\max}$ est de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle non nulle, il existe un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $[\Gamma_f]$ admette deux solutions $[T_1]$ et $[T_2]$ distinctes au problème du bord dans un voisinage W de $\{z\} \times X$. Mais alors $[R] = [T_1] - [T_2]$ est une 2-chaîne holomorphe fermée et non nulle dans W . En particulier, il existe $x \in W$ tel que $R \cap \{x\} \times \Omega$ (où R est le support de R) est une courbe compacte non vide de $\{x\} \times \Omega$ ce qui contredit le fait que Ω ne contient pas de surfaces de Riemann compactes. Par conséquent G est de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle nulle et ne peut déconnecter \mathbb{C} . Par conséquent, $G = \mathbb{C} \setminus U_{\max}$. Mais d'après la proposition 5.17, $[T]$ est de masse finie au voisinage de $G \times \Omega$ et admet une extension simple fermée (que l'on notera encore $[T]$) qui est solution au problème du bord pour $[\Gamma_f]$ dans $\mathbb{C} \times \Omega$ et montre que $U_{\max} = \mathbb{C}$.

Il reste à montrer que cette solution au problème du bord est bien le graphe d'une extension analytique de f . Soit $\Pi : \mathbb{C} \times \Omega \rightarrow \Omega$ la projection canonique sur le second membre, alors $\Pi_*([T])$ définit une 2-chaîne holomorphe de $\Omega \setminus M$ et donc

$$\Pi_*([T]) = k_1[\Omega_1] + k_2[\Omega_2]$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (cela signifie que T définit un revêtement à k_1 feuillets au dessus de Ω_1 et un revêtement à k_2 feuillets au dessus de Ω_2). De plus on a :

$$\begin{aligned} d\Pi_*([T]) &= \Pi_*(d[T]) = \Pi_*([\Gamma_f]) = [M] \\ &= d(k_1[\Omega_1] - k_2[\Omega_2]) = k_1[M] - k_2[M] = (k_1 - k_2)[M] \end{aligned}$$

(on a supposé ici que M est le bord orienté de Ω_1) et donc on a

$$k_1 - k_2 = 1.$$

Pour conclure, il reste à montrer que k_1 ou k_2 est égal à zero. En effet, $[T]$ sera alors un revêtement à un seul feuillet au dessus de l'un des côtés de M . Ce sera alors le graphe de l'extension holomorphe recherchée de f . Soit z la coordonnée holomorphe de \mathbb{C} et soit

$$[F] = \Pi_*(z[T]).$$

Alors $[F]$ vérifie

$$\bar{\partial}[F] = \bar{\partial}\Pi_*(z[T]) = \Pi_*(z\bar{\partial}[T]) = \Pi_*([\Gamma_f]) = f[M].$$

Comme f est holomorphe au voisinage de M , on montre que

$$[F] = f_1[\Omega_1] + f_2[\Omega_2]$$

où les fonctions f_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}_i$ et vérifient $f|_M = f_1|_M - f_2|_M$. Comme f est supposée non constante, l'un de ces deux fonctions est non constante. Supposons, par exemple, que f_1 n'est pas constante et montrons alors que f admet une extension holomorphe à Ω_1 . Pour cela, considérons

$$\Gamma_{f_1, f} = \{(z, (y, w)) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \times X); w \in M, z = f_1(w), y = f(w)\}$$

le graphe de l'application (f_1, f) . De la même manière que précédemment, en remarquant que $\mathbb{C} \times X$ ne contient aucune courbe compacte, on montre que $[\Gamma_{f_1, f}]$ admet une solution $[T_{f_1, f}]$ au problème du bord dans $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \times X)$. Notons $\Pi_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times X \rightarrow \mathbb{C} \times X$ la projection définie par $\Pi_2(z, y, w) = (z, w)$. Définissons

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_1} &= \{(z, w) \in \mathbb{C} \times X; w \in M, z = f_1(w)\}, \\ T_{f_1} &= \{(z, w) \in \mathbb{C} \times X; w \in \Omega_1, z = f_1(w)\}. \end{aligned}$$

On a bien sûr $d[T_{f_1}] = [\Gamma_{f_1}]$ et $\Pi_{2*}([\Gamma_{f_1, f}]) = [\Gamma_{f_1}]$. Par conséquent,

$$d\Pi_{2*}([T_{f_1, f}]) = \Pi_{2*}(d[T_{f_1, f}]) = \Pi_{2*}([\Gamma_{f_1, f}]) = [\Gamma_{f_1}]$$

et donc $\Pi_{2*}([T_{f_1, f}])$ est une solution au problème du bord pour $[\Gamma_{f_1}]$.

LEMME 4.11. — *On a $\Pi_{2*}([T_{f_1, f}]) = [T_{f_1}]$. Par conséquent, Π_2 définit un bi-holomorphisme entre $T_{f_1, f}$ et T_{f_1} .*

Démonstration. — Soit $[R] = [T_{f_1, f}] - [T_{f_1}]$, alors $[R]$ est une 2-chaîne holomorphe fermée de $\mathbb{C} \times X$ dont le support est, par construction, relativement compact dans $\mathbb{C} \times X$. Mais alors son support R est un ensemble analytique compact de dimension pure 2 de $\mathbb{C} \times X$. Par conséquent, la projection de R sur \mathbb{C} est un sous-ensemble analytique compact de \mathbb{C} et est donc soit vide, soit fini. Or f_1 étant supposée non constante, on a nécessairement $R = \emptyset$ et donc $[T_{f_1, f}] = [T_{f_1}]$. Comme Γ_{f_1} et $\Gamma_{f_1, f}$ sont connexes, $[T_{f_1, f}]$ et $[T_{f_1}]$ sont des 2-chaînes holomorphes irréductibles de multiplicité ± 1 . Par conséquent $T_{f_1, f}$ est un revêtement à un seul feuillet au dessus de T_{f_1} ce qui termine la preuve du lemme. \square

Par définition de T_{f_1} , π définit un biholomorphisme entre T_{f_1} et Ω_1 . Par conséquent, $\pi \circ \Pi_2$ définit un biholomorphisme entre $T_{f_1, f}$ et Ω_1 , ce qui montre que $T_{f_1, f}$ est le graphe d'une extension holomorphe de l'application (f_1, f) . Par conséquent, f admet une extension holomorphe à Ω_1 , ce qui termine la preuve de la première assertion du corollaire 4.10.

Dans le cas d'une application CR g à valeurs dans X , la démonstration se fait de la même manière en considérant le graphe de l'application (f, g) ,

$$\Gamma_{g, f} = \{(z, y, w) \in \mathbb{C} \times X \times \Omega; w \in M, z = f(w), y = g(w)\}$$

et en appliquant le théorème 2.3 avec $U = \mathbb{C}$ et $\omega = X \times \Omega$. \square

4.4. Plongement des structures CR. — Le but de ce paragraphe est de donner une caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes admettant une solution au problème du bord dans une variété X donnée. Dans le cas où X est de dimension 2 et compacte (et donc M une hypersurface réelle de X), une caractérisation de nature topologique est donnée dans [25].

Dans le cas où X est kählérienne disque convexe de dimension quelconque, la caractérisation suivante est valide :

PROPOSITION 4.12. — *Soit M une sous-variété orientée, compacte, connexe, de classe C^2 et maximale complexe de X vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

- 1) M est plongeable dans l'espace affine et est de dimension supérieure ou égale à 3 ;
- 2) M est strictement pseudoconvexe et de dimension 5 ;
- 3) M est strictement pseudoconvexe, de dimension 3 et est le bord d'une variété complexe abstraite.

Alors M admet une solution au problème du bord. Réciproquement, si M est strictement pseudoconvexe et admet une solution au problème du bord alors M est plongeable dans l'espace affine.

En effet, d'après [27], [6], la deuxième propriété implique automatiquement la première. D'après [27], [21], la troisième propriété implique elle aussi la première. Enfin la première propriété implique que M admet une solution au problème du bord d'après le corollaire 4.7. Réciproquement, supposons que M admet une solution au problème du bord dans X , d'après les arguments de [21], M est plongeable dans l'espace affine.

Dans le cas où M est de dimension 3, la question se pose alors de savoir s'il est possible de s'affranchir de l'hypothèse de plongeabilité de M dans l'espace affine. En effet, on ne connaît pas d'exemple de structure CR plongeable dans X mais non plongeable dans \mathbb{C}^n (voir [12]). Le corollaire suivant permet alors de montrer que de telles variétés n'admettent aucune fonction CR non constante :

COROLLAIRE 4.13. — *Soit M une sous-variété compacte, connexe et strictement pseudoconvexe de dimension 3 de X . Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- 1) les fonctions CR continues (ou les distributions CR) sur M sont constantes ;
- 2) M admet une solution au problème du bord dans X et M est plongeable dans l'espace affine.

Démonstration. — Supposons qu'il existe une fonction CR $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ non constante. D'après le théorème d'extension de Lewy, f admet une extension holomorphe à une extension analytique locale du côté pseudoconvexe de M . Quitte à déformer M dans cette extension, on peut toujours supposer que f est lisse et que

$$\Gamma_f = \{(f(x), x) \in \mathbb{C} \times X ; x \in M\}$$

le graphe de f vérifie les hypothèses a), b) et c) du théorème 2.3 avec $U = \mathbb{C}$ et $\omega = X$.

La fonction f étant continue, son module admet un maximum R sur M . Le problème du bord est donc résoluble pour $[\Gamma_f]$ dans l'ouvert $\{|z| > R\} \times X$ (prendre comme solution $[T] = 0$). D'après le lemme 2.8, il existe un ouvert connexe maximal U_{\max} contenant $\{|z| > R\}$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ admette une solution dans $U_{\max} \times X$ nulle pour $|z| > R$. Soit

$$[T] = \sum_{i \in I} n_i [T_i]$$

la décomposition de $[T]$ en composantes irréductibles.

LEMME 4.14. — *La 2-chaîne holomorphe $[T]$ est positive (i.e. pour tout $i \in I$, $n_i \geq 0$).*

Démonstration. — Soit $\pi : \mathbb{C} \times X \rightarrow \mathbb{C}$ la projection canonique sur \mathbb{C} . Pour tout $i \in I$, $\pi(T_i)$ est un ouvert de \mathbb{C} . Notons

$$W = \bigcup_{i \in I, n_i < 0} \pi(T_i) \quad \text{et} \quad V = U_{\max} \setminus \overline{W}.$$

Supposons par l'absurde que l'ouvert W est non vide et donc que V est un ouvert strictement inclus dans U_{\max} . L'ensemble $G = \partial V \cap U_{\max}$ est alors de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle non nulle car W est borné. Il existe donc un point $z \in G$, tel que $\{z\} \times X$ soit transverse à T . En particulier, $[S_z] = [T, \pi, z]$ est une 1-chaîne holomorphe positive. Par définition de V , il existe $i \in I$ tel que $n_i < 0$ et $\{z\} \times X$ soit tangent à ∂T_i et vérifie $\{z\} \times X \cap T_i = \emptyset$. Il existe donc un point $x \in \gamma_z$ tel que $\{z\} \times X$ soit tangent en x à ∂T_i et tel qu'il existe un voisinage V_x de x tel que $d[T_i] = \pm[\Gamma_f]$ dans V_x . Comme $\{z\} \times X$ est tangent à Γ_f en x et que Γ_f est strictement pseudoconvexe, nécessairement $\{z\} \times X$ est tangent du côté concave de Γ_f et donc T_i est du côté convexe de Γ_f et par conséquent $d[T_i] = [\Gamma_f]$ dans V_x . Soit $n_j \geq 0$ la multiplicité de la composante irréductible T_j (si elle existe, sinon poser $n_j = 0$) de $[T]$ dans $U_{\max} \times X$ vérifiant $d[T_j] = \pm[\Gamma_f]$ dans V_x . Du fait que $\{z\} \times X$ est tangent à Γ_f en x , T_j est nécessairement du côté concave de Γ_f et par conséquent, on a $d[T_j] = -[\Gamma_f]$ dans V_x . Comme $[\Gamma_f]$ est le courant d'intégration sur la variété Γ_f , il est de multiplicité 1 en tout point. On a donc $n_i - n_j = 1$ et par conséquent $n_i = n_j + 1 > 0$ ce qui donne la contradiction recherchée. \square

LEMME 4.15. — *Soit $[\Gamma]$ un $(2p - 1)$ -courant rectifiable fermé, maximale-ment complexe et dont le support est de classe A_{2p-1} d'une variété complexe Y . Soient $[T_1]$ et $[T_2]$ deux p -chaînes holomorphes de $Y \setminus \Gamma$, positives et solutions au problème du bord pour $[\Gamma]$ dans Y . Supposons que $T_1 \cup \Gamma$ et $T_2 \cup \Gamma$ ne contiennent aucun sous-ensemble analytique de dimension p de Y . Alors $[T_1] = [T_2]$.*

Démonstration. — En effet, la n -chaîne holomorphe $[T_1] - [T_2]$ est fermée dans Y . On a donc

$$[T_1] - [T_2] = \sum_{i \in I} n_i [L_i]$$

où $n_i \in \mathbb{Z}^*$ et L_i sont des sous-ensemble analytiques de Y de dimension pure p . Supposons que I n'est pas vide. Soit donc $i \in I$ et notons $[L_i^1]$ et $[L_i^2]$ les restrictions de $[T_1]$ et $[T_2]$ à L_i ; on a donc

$$[L_i^1] - [L_i^2] = n_i [L_i].$$

Quitte à intervertir le rôle de $[L_1]$ et $[L_2]$, on peut toujours supposer que $n_i > 0$. On a alors $L_i \not\subset L_i^1 \cup \Gamma$ et $L_i \not\subset L_i^2 \cup \Gamma$ car $T_1 \cup \Gamma$ et $T_2 \cup \Gamma$ ne contiennent pas de sous-ensembles analytiques de dimension p de Y . Il existe un composante irréductible R de $L_i \setminus \Gamma$ telle que $[R]$ soit de multiplicité 0 dans $[L_1]$. Par hypothèse, on a

$$k \geq 0$$

où k est la multiplicité de $[R]$ dans $[L_2]$. On a alors

$$0 - k = n_i$$

et donc n_i est négatif ce qui donne la contradiction recherchée. \square

Soit $G = \partial(\mathbb{C} \setminus U_{\max})$. Si $G \neq \emptyset$, alors nécessairement G est de longueur non nulle. En effet, si G était de longueur nulle, d'après le contrôle du volume du lemme 2.7, $[T]$ serait une 2-chaîne holomorphe de $(\mathbb{C} \setminus G) \times X$ de masse finie dans $\mathbb{C} \times X$. Par conséquent, d'après [5], [26], [20], [35], [2], $[T]$ admettrait une extension simple à $((\mathbb{C} \setminus G) \times X) \setminus \Gamma_f$ qui serait encore une solution au problème du bord pour $[\Gamma_f]$. Ceci contredit la maximalité de U_{\max} . Par conséquent, de la même manière que dans le lemme 2.8, on montre qu'il existe un sous-ensemble $\tilde{G} \subset G$ de longueur non nulle tel que pour tout point $z \in \tilde{G}$, il existe une suite $\{w_i^z\}$ de points de U_{\max} pour lesquels les 1-chaînes holomorphes $[S_{w_i^z}] = [T, \pi, w_i^z]$ (resp. les supports $S_{w_i^z}$) convergent au sens des courants (resp. au sens de Bishop) vers une 1-chaîne holomorphe $[S_z]$ encore solution au problème du bord pour $[\gamma_z] = [\Gamma_f, \pi, z]$ (resp. vers un ensemble analytique S_z). La chaîne holomorphe $[T]$ étant positive, les 1 chaînes holomorphes $[S_{w_i^z}]$ le sont aussi. Par conséquent $[S_z]$ l'est aussi et donc $S_z = \text{supp}[S_z]$. Soit $[\tilde{S}_z]$ l'unique 1-chaîne holomorphe positive solution au problème du bord pour $[\gamma_z]$ dont l'adhérence du support ne contient pas de courbe compacte. Alors, de la même manière que dans le théorème principal, on montre qu'il existe un point $z_0 \in \tilde{G}$ et un voisinage ouvert et connexe W_{z_0} de z_0 tel que le problème du bord pour $[\Gamma_f]$ admette une solution positive $[\tilde{T}]$ au problème du bord dans $W_{z_0} \times X$. Mais alors, d'après le lemme 4.15, $[T]$ et $[\tilde{T}]$ sont égales dans $W_{z_0} \cap U_{\max}$, ce qui contredit la maximalité de U_{\max} . Finalement, $G = \emptyset$ et donc que $[\Gamma_f]$ admet une solution $[T]$ au problème du bord dans $\mathbb{C} \times X$. L'image directe de $[T]$ par

la projection sur X est une solution au problème du bord pour $[M]$ dans X , ce qui termine la preuve du corollaire. \square

5. Annexes.

5.1. Problème du bord non borné dans $\Delta_n \times \overline{\Delta}_m$. — Notons Δ_q le polydisque unité de \mathbb{C}^q . Nous nous intéressons ici au problème du bord pour les variétés maximale­ment complexes de dimension $2n + 1$ de $\Delta_n \times \mathbb{C}^m$ dont la projection sur \mathbb{C}^m est bornée. En général il n'existe pas de solution au problème du bord pour de telles variétés. En effet, il suffit de prendre un courbe fermée $\gamma \subset \Delta_m$ qui n'est pas le bord d'une surface de Riemann et de poser $\Gamma = \mathbb{C}^n \times \gamma$, pour obtenir un contre-exemple. Il est tout de même possible de donner une condition nécessaire et suffisante. En fait, cette condition est déjà implicitement utilisée dans [8] et nous nous bornons ici à reformuler les propositions de [8] dans ce cadre.

On dit qu'un compact $A \subset \mathbb{R}^n$ est géométriquement m -rectifiable ou encore est de classe A_m si A est (\mathcal{H}_m, m) -rectifiable et si le cône tangentiel de A en \mathcal{H}_m -presque tout point est un espace vectoriel réel de dimension m (où \mathcal{H}_m est la mesure de Hausdorff de dimension m).

Soit X un espace complexe, on appelle p -chaîne holomorphe de X toute somme localement finie $[T] = \sum n_j[V_j]$ à coefficients n_j dans \mathbb{Z} de sous-ensembles analytiques irréductibles et deux à deux différents V_j de dimension p de X . On appelle volume de $[T]$, l'expression

$$\text{Vol}[T] = \sum |n_j| \text{Vol } V_j$$

où $\text{Vol } V_j$ est le volume $2p$ -dimensionnel de l'ensemble analytique V_j ; $\text{Vol}[T]$ est aussi la masse du courant $[T]$. On notera T le support de la p -chaîne holomorphe $[T]$ (i.e. $T = \bigcup_{\{j;n_j \neq 0\}} V_j$). Dans la suite, si $[T]$ est un courant on notera aussi $\text{Vol}[T]$ la masse de ce courant.

Soient X, Y deux variétés réelles lisses, Y de dimension $p \leq m$ et $f : X \rightarrow Y$ une application C^∞ et Γ un courant plat de dimension m (en particulier les courants rectifiables sont plats). Alors pour \mathcal{H}_p -presque tout $y \in Y$, la tranche $[\Gamma, f, y]$ est un courant plat de dimension $m - p$ de support inclus dans $\Gamma \cap f^{-1}(y)$ vérifiant :

$$\int_Y \Phi(y)([\Gamma, f, y], \Psi) \cdot \Omega = [\Gamma, f^*(\Phi \cdot \Omega) \wedge \Psi]$$

où Ψ est une $(m - p)$ -forme à support compact, Φ une fonction à support compact et Ω est la forme volume de Y (voir [14]).

Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable dont le support Γ est de classe A_{2n+1} de \mathbb{C}^{n+m} . Alors, pour presque tous les n -plan $\mathbb{C}_\nu^n \subset \mathbb{C}^{n+m}$ et pour presque tous les points

$z \in \mathbb{C}_\nu^n$, la tranche $[\Gamma, \pi_\nu, z]$ (où π_ν est la projection orthogonale sur \mathbb{C}_ν^n) est un courant rectifiable dont le support est de classe A_1 (voir [8] Lemme 1.4).

Notons $\pi : \Delta_n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \Delta_n$ la projection $(z_1, \dots, z_n) \times (w_1, \dots, w_m) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$. Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable, fermé et maximale-ment complexe de $\Delta_n \times \mathbb{C}^m$ dont le support Γ est de classe A_{2n+1} et admet une projection bornée sur \mathbb{C}^m . Pour presque tout $z \in \Delta_n$, la tranche $[\Gamma, \pi, z]$ est un courant rectifiable fermé de dimension 1.

Soient χ_{ϵ_j} des fonctions de classe C^∞ , définies sur \mathbb{C} , $\chi_{\epsilon_j}(x) = 0$ pour $|x| \ll \epsilon_j$ et $\chi_{\epsilon_j} = (1/2\pi)i$ pour $|x| > \epsilon$.

PROPOSITION 5.1 (voir [8]). — *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $z \in \Delta_n$, pour toute $(1, 0)$ -forme holomorphe ϕ de \mathbb{C}^n , la fonction*

$$\mathcal{M}(z, \phi) = \left([\Gamma], \phi \wedge \bigwedge_{j=1}^n d\chi_{\epsilon_j}(\zeta_j - z_j) \wedge \frac{d\zeta_j}{\zeta_j - z_j} \right)$$

est indépendante des χ_{ϵ_j} et égale à $([\Gamma, \pi, z], \phi)$ quand cette dernière est bien définie. En particulier la fonction $\mathcal{M}(z, \phi)$ est holomorphe dans Δ_n .

Cette proposition montre que la condition des moments (cas où ϕ est une $(1, 0)$ -forme holomorphe) sur les tranches d'une variété maximale-ment complexe varie de manière holomorphe. Le principe du prolongement analytique nous dit alors que si la condition des moments est vérifiée pour un sous-ensemble assez grand $K \subset \Delta_n$, elle est vérifiée sur tout Δ_n . Il est alors possible de recoller ces tranches pour trouver une solution au problème du bord pour $[\Gamma]$.

PROPOSITION 5.2 (voir [8]). — *Soit K un sous-ensemble de Δ_n , non inclus dans une hypersurface analytique de Δ_n . Supposons que pour tout $\nu \in K$, $[\Gamma, \pi, \nu]$ est bien définie et est un 1-courant rectifiable fermé dont le support est de classe A_1 et que pour toute 2-forme lisse Θ sur \mathbb{C}^m on ait $[\Gamma] \wedge \Theta = 0$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\mathcal{M}(\nu, \phi)$ est nulle pour tout $\nu \in K$ et toute $(1, 0)$ -forme holomorphe ϕ de \mathbb{C}^n (i.e. pour tout $\nu \in K$, $[\gamma_\nu]$ vérifie la condition des moments).
- 2) Pour tout $\nu \in K$, il existe une 1-chaîne holomorphe $[S_\nu]$ de masse finie de $\Delta_n \times \mathbb{C}^m \setminus \Gamma$ telle que $d[S_\nu] = [\Gamma, \pi, \nu]$.
- 3) Il existe une p -chaîne holomorphe $[T]$ de $\Delta_n \times \mathbb{C}^m \setminus \Gamma$ dont la projection sur \mathbb{C}^m est bornée et telle que $d[T] = [\Gamma]$.

Démonstration. — L'équivalence entre 1) et 2) provient directement de [8]. Pour toute ϕ fixé, $\mathcal{M}(z, \phi)$ est holomorphe en z . L'ensemble des zéros de $\mathcal{M}(z, \phi)$ est donc une hypersurface analytique H_ϕ de Δ_n contenant K . L'intersection H de tous les H_ϕ est donc un ensemble analytique contenant K . Comme H contient K il ne peut être de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. On a donc $H = \Delta_n$. De manière identique à [8], on montre que Γ admet une solution T au problème du bord dans U . \square

REMARQUE 5.3. — L'hypothèse $[\Gamma] \wedge \Theta = 0$ pour toute 2-forme verticale Θ implique que pour \mathcal{H}_{2n+1} -presque tout $z \in \Gamma$ tel que la multiplicité de $[\Gamma]$ en z soit non nulle, l'espace tangent à Γ en z ne contient pas de droite verticale. En particulier, $[\Gamma]$ ne contient pas de « composantes verticales ».

5.2. Propriétés de convergence des suites de chaînes holomorphes

Nous nous intéressons ici à la convergence au sens de Bishop (ou de Hausdorff) des suites de surfaces de Riemann de volumes uniformément bornés :

DÉFINITION 5.4. — Soit $\{E_j\}$ une suite de sous-ensembles d'un espace métrique X . On dit que la suite $\{E_j\}$ converge au sens de Hausdorff (ou au sens de Bishop si les E_j sont des surfaces de Riemann) vers un ensemble $E \subset X$ (on note $E_j \rightarrow E$) si :

- 1) l'ensemble E coïncide avec l'ensemble limite de la suite $\{E_j\}$, i.e. est formé de l'ensemble des points de la forme $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j\nu}$, $x_{j\nu} \in E_{j\nu}$ (en particulier, E est fermé dans X) ;
- 2) pour tout compact $K \subset E$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un indice $j(\epsilon, K)$ tel que K appartient au ϵ -voisinage de E_j dans X pour tout $j > j(\epsilon, K)$.

PROPOSITION 5.5 (voir [5] et aussi [7]). — Soit $\{A_j\}$ une suite de sous-ensembles analytiques de dimension pure 1 d'une variété complexe X dont le volume est uniformément borné sur tout compact :

$$\mathcal{H}_2(A_j \cap K) \leq M_K < \infty \text{ pour tout } K \subset\subset X$$

et admettant un point d'accumulation dans X . Alors il existe une suite extraite $\{A_{\phi(j)}\}$ de la suite $\{A_j\}$ qui converge dans X vers un sous-ensemble analytique A de dimension pure 1. De plus, on a l'inégalité

$$\varliminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}_2(A_{\phi(j)} \cap U) \geq \mathcal{H}_2(A \cap U)$$

pour tout ouvert $U \subset\subset X$.

Dans le cas des chaînes holomorphes, ce théorème se généralise aussi :

PROPOSITION 5.6 (voir [17]). — Soit $\{[A_j]\}$ une suite de 1-chaînes holomorphes d'une variété complexe X dont le volume est uniformément borné sur tout compact. Alors il existe une suite extraite $\{[A_{\phi(j)}]\}$ de la suite $\{[A_j]\}$ convergeant vers une 1-chaîne holomorphe $[A]$ de X au sens des courants.

PROPOSITION 5.7. — Soient ω une variété complexe munie d'une distance d et $K \subset \omega$ un compact. Soit $V_\epsilon = \{z \in \omega, d(z, K) \leq \epsilon\}$ un ϵ -voisinage de K . Alors il existe une constante C_ϵ^K telle que tout ensemble analytique A de $\omega \setminus K$ irréductible, de dimension 1 dont l'adhérence \bar{A} rencontre K et $\omega \setminus V_\epsilon$ vérifie $\text{Vol } A \geq C_\epsilon^K$.

Démonstration. — Soit $M = \{z \in \omega, d(z, K) = \frac{\epsilon}{2}\}$. Le compact M déconnecte ω . Il existe donc un point $w \in M \cap A$. Notons $B(w, \frac{1}{2}\epsilon)$ la boule de rayon $\frac{1}{2}\epsilon$ et de centre w . L'intersection $A \cap B(w, \frac{1}{2}\epsilon)$ est donc un sous-ensemble analytique fermé et non vide de $B(w, \frac{1}{2}\epsilon)$. Or pour tout compact K d'une variété complexe et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C_ϵ^K minorant le volume des sous-ensembles analytiques passant par le centre d'une boule de rayon $\frac{1}{2}\epsilon$ qui rencontre K (voir [7] ou la proposition 5.5). D'où le résultat. \square

5.3. Voisinage de Stein des surfaces de Riemann à bord. — D'après un résultat de Siu [36], toute surface de Riemann n'ayant pas de composante compacte dans un espace complexe X admet un voisinage de Stein. Dans [29], il est montré que si S est une surface de Riemann à bord γ connexe et lisse de l'espace projectif et telle que $S \cup \gamma$ ne contient aucune surface de Riemann compacte, alors $S \cup \gamma$ admet lui aussi un voisinage de Stein connexe. Dans [11], ce résultat est étendu au cas où γ est une réunion finie, disjointe de courbes de Jordan, de longueur finie et S un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et borné de $X \setminus \gamma$. En fait, la preuve donnée dans [29], [11] est encore valide dans le cas de courbes de classe A_1 :

PROPOSITION 5.8. — *Soit X une variété complexe. Soient $\gamma \subset X$ un compact de classe A_1 et S un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $X \setminus \gamma$, relativement compact dans X . Supposons que $S \cup \gamma$ ne contient aucune surface de Riemann compacte de X . Alors il existe un ouvert de Stein $V \subset X$ voisinage de $S \cup \gamma$.*

En effet, dans [29], [11], le bord de S est supposé lisse uniquement afin de s'assurer que S admet un nombre fini de composantes irréductibles et que l'on peut rendre γ connexe en lui ajoutant un nombre fini de courbes lisses. Dans le cas où γ est de classe A_1 , comme nous l'avons vu, S peut avoir un nombre infini de composantes irréductibles et il n'est pas toujours possible de rendre γ connexe en lui ajoutant une courbe de longueur finie. Cependant, dans notre cas, on n'a pas besoin que le voisinage de Stein obtenu soit connexe (ce qui dispense dans la preuve de rendre γ connexe). De plus, si V est un voisinage de γ , seul un nombre fini des composantes de S ne seront pas incluses dans V et il suffit alors d'appliquer la démonstration de [29], [11] aux composantes non incluses dans V (pour un V bien choisi).

Dans la suite de ce paragraphe, nous adaptons la preuve de [29], [11] au cas où le bord γ est de classe A_1 . La preuve repose principalement sur la construction suivante due à Mihalache :

LEMME 5.9. — *Soit C un compact d'une variété complexe X . Soient $U_1 \subset \subset U_2$ deux ouverts de X . Notons $A = C \cap \bar{U}_2$, $B = C \setminus U_1$, $\tilde{A} = A \cap \partial U_2$. Supposons de plus que ces ensembles vérifient les deux propriétés suivantes :*

- 1) B admet une base de voisinages par des ouverts strictement pseudoconvexes à bord lisse et relativement compacts dans X ;
- 2) il existe une base \mathcal{A} de voisinages de \tilde{A} (relativement compact dans X), telle que si $V_{\tilde{A}} \in \mathcal{A}$, alors $\overline{V_{\tilde{A}}} \cup A$ admet une base de voisinages par des ouverts strictement pseudoconvexes à bord lisse.

Alors C admet un voisinage lisse par morceaux et strictement pseudoconvexe. En particulier, d'après Grauert [15], si C ne contient pas d'ensemble analytique compact de dimension ≥ 1 , il admet un voisinage de Stein.

Démonstration. — Tous les voisinages considérés sont des voisinages d'ensembles compacts. Par conséquent, on peut toujours supposer que tous les voisinages que l'on considérera par la suite admettent un nombre fini de composantes connexes. Soit V_B un voisinage strictement pseudoconvexe à bord lisse de B tel que $V_B \cap \partial U_2 \subset V_{\tilde{A}}$. Soit V_A un voisinage strictement pseudoconvexe à bord lisse de $\overline{V_{\tilde{A}}} \cup A$ tel que $V_A \cap \partial U_1 \subset V_B$ et dont le bord est transverse au bord de V_B . Soit W l'ouvert défini comme suit :

- 1) $W \cap U_1 = V_A \cap U_1$;
- 2) $W \cap (U_2 \setminus U_1) = V_A \cap V_B$;
- 3) $W \setminus U_2 = V_B \setminus U_2$.

Alors W est bien défini et est lisse par morceaux et strictement pseudoconvexe car il est localement intersection finie de domaines strictement pseudoconvexes à bords lisses. □

LEMME 5.10 (voir [11]). — Soient K un compact méromorphiquement convexe dans une variété de Stein Z et H un compact de mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle nulle. Alors $K \cup H$ est méromorphiquement convexe dans Z .

LEMME 5.11. — Soient $U, V \subset X$ deux ouverts de Stein et C un compact de $Z = U \cup V$ de mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle nulle. Alors C admet un voisinage de Stein dans Z .

Démonstration. — Soient $U_1 \subset\subset U_2 \subset\subset U$ deux ouverts strictement pseudoconvexes, à bord lisse et vérifiant $C \setminus U_1 \subset V$. Soit $A = C \cap \overline{U_2}$, $B = C \setminus U_1$ et $\tilde{A} = A \cap \partial U_2$. D'après le lemme 5.10, comme $\mathcal{H}_2(B) = 0$, B admet une base de voisinages méromorphiquement convexes dans V . De même, comme $\mathcal{H}_2(\tilde{A}) = 0$, \tilde{A} admet un voisinage $V_{\tilde{A}}$ dont l'adhérence est méromorphiquement convexe dans U . Encore d'après le lemme 5.10, $\overline{V_{\tilde{A}}} \cup A$ est méromorphiquement convexe dans U . Par conséquent, d'après le lemme 5.9, C admet une base de voisinages strictement pseudoconvexes dans $Z = U \cup V$. D'après Grauert, un tel voisinage contient au plus un ensemble analytique compacts maximal de dimension supérieure ou égale à 1. Par conséquent, en prenant le voisinage strictement pseudoconvexe assez petit, il ne peut contenir de tels ensembles analytiques compacts et sera, par conséquent, de Stein. □

Soit H un compact de mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle nulle. En recouvrant H par des ouverts de Stein et en appliquant successivement le lemme précédent, nous obtenons :

LEMME 5.12. — *Soit $H \subset X$ un compact de mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle nulle. Alors H admet un voisinage de Stein. En particulier, tout compact de classe A_1 admet une base de voisinages de Stein.*

Enfin, nous rappelons que, d'après [28], [8], si ℓ est une courbe de classe A_1 d'une variété de Stein V , alors l'enveloppe d'holomorphie $\widehat{\ell}$ de ℓ vérifie que $\widehat{\ell} \setminus \ell$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et de volume fini de $V \setminus \ell$.

Preuve de la proposition 5.8. — Soit W un voisinage de Stein de γ . Notons S_1, \dots, S_k les composantes irréductibles de S qui ne sont pas incluses dans W . Notons L_1, \dots, L_ℓ les courbes compactes irréductibles de X contenant l'une des S_1, \dots, S_k . Comme $S \cup \gamma$ ne contient pas de courbe complexe compacte, choisissons $V \subset W$ un voisinage de Stein de γ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $L_i \not\subset V \cup S$. Soit $\widehat{\gamma}$ l'enveloppe d'holomorphie de γ dans V . D'après le choix de V , $S \cup \widehat{\gamma}$ ne contient pas de courbe complexe compacte. Soient $[F]$ le courant d'intégration sur $S \cup (\widehat{\gamma} \setminus \gamma)$ et a le support de $d[F]$ (on a alors $a \subset \gamma$). Alors, d'après [26], [20], [35], [2], $F = \text{supp}[F]$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $X \setminus a$. Quitte à remplacer S par $S \cup F$ et γ par a , on peut supposer sans perte de généralité que $\gamma = \text{supp} d[S]$ et que $\widehat{\gamma} \setminus \gamma \subset S$ (où $\widehat{\gamma}$ est l'enveloppe d'holomorphie de γ dans V). Soient \widetilde{S} la réunion des composantes de S non incluses dans V et $\widetilde{\gamma} = \text{supp} d[\widetilde{S}]$. Alors $\widetilde{\gamma}$ est une courbe incluse dans γ et holomorphiquement convexe dans V . L'ensemble $\alpha = \overline{\widetilde{\gamma} \setminus \widetilde{\gamma}}$ vérifie alors $\widehat{\alpha} \setminus \alpha = \widehat{\gamma} \setminus \gamma = S \setminus \widetilde{S}$. Soit $V_2 \subset V$ un ouvert de Stein à bord lisse de V tel que $\widehat{\gamma} \subset \subset V_2$ et tel que ∂V_2 , le bord de V_2 , soit lisse et transverse à S . L'intersection $\ell = S \cap \partial V_2$ est alors une courbe lisse incluse dans V et donc $L = \widehat{\ell}$ est une réunion finie de sous-ensembles analytiques de dimension pure 1 de $V \setminus \ell$. Soit $V_3 \subset \subset V_2$ un ouvert de Stein à bord ∂V_3 lisse et transverse à S tel que $\widehat{\gamma} \subset \subset V_3$.

• *Cas $L = \emptyset$.* Notons $U_1 = V_3$, $U_2 = V_2$, $C = S \cup \gamma = S \cup \widehat{\gamma}$, $A = C \cap \overline{U_2}$, $B = C \setminus U_1$ et $\widetilde{A} = A \cap \partial U_2 = \ell$. De plus, comme $B \subset S$, en appliquant le théorème de Siu [36] à S dans des voisinages de B , on obtient que B admet une base de voisinages de Stein. De plus, comme $L = \emptyset$, ℓ est holomorphiquement convexe dans V et donc il admet une base de voisinages (W_i) dont l'adhérence est holomorphiquement convexe dans V . D'après [8], [9], $(\overline{W_i \cup \gamma}) \setminus (\overline{W_i} \cup \gamma)$ est un sous-ensemble analytique R_i de dimension pure 1 et de masse finie de $V \setminus (\overline{V_{\widetilde{A}}} \cup \gamma)$ contenant $\widehat{\gamma} \setminus \gamma$.

LEMME 5.13. — *Il existe un ouvert W_{i_0} tel que $(\overline{W_{i_0} \cup \gamma}) \setminus (\overline{W_{i_0}} \cup \gamma) \subset S$.*

Démonstration. — Soit W_i un voisinage de ℓ dont l'adhérence est holomorphiquement convexe dans V et notons

$$R_i = (\widehat{\overline{W}_i \cup \gamma}) \setminus (\overline{W}_i \cup \gamma) \subset S.$$

Alors R_i est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et de masse finie de $V \setminus (\overline{W}_i \cup \gamma)$. Comme \overline{W}_i est holomorphiquement convexe dans V , d'après le principe du maximum, il n'existe pas de sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $V \setminus \overline{W}_i$ borné dans V . Par conséquent, R_i ne contient qu'un nombre fini de composantes analytiques irréductibles R_1, \dots, R_{k_i} dont le bord intersecte \overline{W}_i . Comme $\widehat{\gamma} \setminus \gamma \subset S$ par construction, toute composante irréductible de R_i non incluse dans S est égale à l'une des R_1, \dots, R_{k_i} . De plus, par définition de l'enveloppe holomorphiquement convexe, si $W_j \subset W_i$ alors

$$(\widehat{\overline{W}_j \cup \gamma}) \setminus (\overline{W}_j \cup \gamma) \subset (\widehat{\overline{W}_i \cup \gamma}).$$

Par conséquent, $R_j \setminus (\overline{W}_i \cup \gamma)$ est inclus dans R_i . Si pour tout $j \in J$ tel que $W_j \subset \subset W_i$, il existe une composante irréductible D de R_j non incluse dans S , alors $D \setminus \overline{W}_i$ est l'une des composantes R_1, \dots, R_{k_i} . Mais alors, il existerait une suite croissante d'ensembles analytiques irréductibles dont la limite serait un sous-ensemble analytique D_∞ de $V \setminus (\gamma \cup \ell)$ borné dans V . On a $D_\infty \subset (\widehat{\ell \cup \gamma}) \setminus (\ell \cup \gamma) \subset S$, ce qui donne la contradiction recherchée. \square

Et donc en posant $V_{\widehat{A}} = W_{i_0}$, l'ensemble $\overline{V}_{\widehat{A}} \cup A$ est holomorphiquement convexe dans V et admet donc une base de voisinages de Stein. D'après le lemme 5.8, C admet une base de voisinages de Stein ce qui termine la preuve de la proposition 5.8 dans le premier cas.

Cas général. — Notons $K = L \cap \gamma$ alors par construction de S et γ et d'après le théorème d'unicité [8], K est un compact de longueur nulle de V . De plus, quitte à ajouter un nombre fini de points à K , on peut toujours supposer que K intersecte toutes les composantes irréductibles de L .

LEMME 5.14. — *Il existe une base de voisinages de $K \cup \widehat{\alpha}$ par des ouverts W_i vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) leur adhérence est holomorphiquement convexe dans V ;
- 2) leur bord est transverse à S , γ et L ;
- 3) $r_i := L \cap \partial W_i$ est une courbe lisse tel qu'il n'existe pas de composante irréductible de $S \setminus W_i$ dont le bord est inclus dans r_i .

Démonstration. — Comme K est de longueur nulle, $K \cup \widehat{\alpha}$ est holomorphiquement convexe dans V . Par conséquent, il admet une base de voisinage par des ouverts dont l'adhérence est holomorphiquement convexe dans V . Bien sûr, on peut toujours supposer que ces ouverts ont un bord lisse transverse à S et γ . Enfin si pour chaque ouvert W_i , il existe une composante de $S \setminus W_i$ dont le

bord est inclus dans r_i , nous obtenons une suite croissante d'ensembles analytiques R_i inclus dans $S \setminus W_i$ dont le bord est entièrement inclus dans \overline{W}_i . Mais alors la réunion R_∞ des R_i est un sous-ensemble analytique de $S \setminus K$ dont le bord est entièrement inclus dans K . Puisque K est de longueur nulle et S est de masse finie, d'après [5], [26], [20], [35], [2], \overline{R} est une courbe compacte de X incluse dans $S \cup \gamma$, ce qui donne la contradiction recherchée. \square

Soient $W_{j+1} \subset \subset W_j$ deux ouverts obtenus grâce au lemme précédent. Posons

$$S_2 = S \setminus \overline{W_{j+1}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = (\gamma \setminus W_{j+1}) \cup \partial S_2.$$

LEMME 5.15. — *Le sous-ensemble analytique $\widehat{\gamma}_2 \setminus \gamma_2$ admet un nombre fini de composantes irréductibles.*

Démonstration. — On a $\gamma \setminus W_{j+1} \subset \widetilde{\gamma} \subset \overline{S}_2$. Donc γ_2 est contenu dans \overline{S}_2 et on a en fait $\gamma_2 \subset \partial(S \setminus \overline{W_{j+1}})$. Par construction $W_{j+1} \supset K \cup \widehat{\alpha} \supset (S \setminus \widetilde{S})$. Par conséquent $\gamma_2 \subset \widetilde{S} \setminus \overline{W_{j+1}} \subset L$. L'hypothèse de transversalité du bord de W_{j+1} permet alors de conclure. \square

Soit H une hypersurface complexe de V évitant $\gamma_2 \cup S_2$ et intersectant dans W_{j+1} toutes les composantes de L et de $\widehat{\gamma}_2 \setminus \gamma_2$. Alors $V \setminus H$ est un ouvert de Stein et $\ell = S_2 \cap \partial V_2$ est holomorphiquement convexe dans $V \setminus H$. Par conséquent, d'après le premier cas, $\gamma_2 \cup S_2$ admet une base de voisinage de Stein. Notons alors $C = S \cup \gamma$, $U_1 = X \setminus W_{j+1}$, $U_2 = X \setminus W_j$, $A = C \cap \overline{U}_2$, $B = C \setminus U_1$ et $\widetilde{A} = A \cap \partial U_2$. Alors B admet une base de voisinage de Stein car $S \cup \gamma \cap \overline{W}_j$ est holomorphiquement convexe dans V . Soit Z un voisinage de Stein de A , alors d'après le lemme 5.14, \widetilde{A} est holomorphiquement convexe dans Z et admet donc un voisinage $V_{\widetilde{A}}$ dont l'adhérence est holomorphiquement convexe dans Z . Par conséquent $\overline{V_{\widetilde{A}}} \cup A$ admet une base de voisinage de Stein. Le lemme 5.9 montre alors que C admet un voisinage de Stein, ce qui termine la preuve de la proposition.

5.4. Existence d'une solution au problème du bord de support minimal

PROPOSITION 5.16. — *Soient X une variété complexe disque-convexe (munie d'une métrique complète) et $[\gamma]$ un 1-courant rectifiable fermé dont le support γ est un compact de classe A_1 . Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions au problème du bord pour $[\gamma]$ (i.e. l'ensemble des 1-chaînes holomorphes $[S]$ de masse finie de $X \setminus \gamma$ dont le support est relativement compact dans X et telle que $d[S] = [\gamma]$). Supposons que \mathcal{S} n'est pas vide, alors il existe une 1-chaîne holomorphe $[S_{\min}]$ solution au problème du bord pour $[\gamma]$ dont le volume du support est égal à*

$$I = \inf_{[S] \in \mathcal{S}} \text{Vol } S$$

où S est le support de la 1-chaîne holomorphe $[S]$.

Démonstration. — Soit $[S] = \sum_{i \in J} m_i [S_i]$ une solution au problème du bord pour $[\gamma]$ où les S_i sont les composantes irréductibles de $S \setminus \gamma$. Soit V un voisinage de Stein de γ et pour tout ν , soit $W_\nu \subset V$ un ν -voisinage de γ , posons

$$[S^\nu] = \sum_{\substack{i \in J \\ S_i \subset W_\nu}} m_i [S_i].$$

Soit ν tel que

$$\text{Vol } S^\nu < \frac{1}{4}C$$

où C est une constante (obtenue grâce à la proposition 5.7) telle que tout sous-ensemble analytique irréductible de $X \setminus \gamma$ dont l'adhérence intersecte γ et $X \setminus V$ ait un volume strictement supérieur à C . S étant de volume fini, il existe alors un nombre fini de composantes irréductibles $\{S_i^\nu\}_{i=1..N}$ de S non incluses dans W_ν . Pour toute composante irréductible S_i^ν notons, si elle existe, \tilde{S}_i^ν une surface de Riemann compacte irréductible de X contenant S_i^ν et $\tilde{S}_i^\nu = \emptyset$ sinon. Posons

$$A = S \cup \left(\bigcup_{i=1, \dots, N} \tilde{S}_i^\nu \right)$$

et montrons que le support de toute solution au problème du bord $[R]$ pour $[\gamma]$ vérifiant $\text{Vol } R \leq I + \frac{1}{2}C$ est inclus dans A . On a

$$[R] - [S] = \sum_{i=1}^M n_i [V_i]$$

où les $[V_i]$ sont les courants d'intégration sur des surfaces de Riemann compactes irréductibles V_i . Si V_i contient une composante irréductible S_j^ν de $S \setminus \gamma$ non incluse dans W_ν , on a $V_i \subset \tilde{S}_j^\nu \subset A$ par définition de \tilde{S}_j^ν . Donc, si pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, V_i contient une composante irréductible S_j^ν de $S \setminus \gamma_x$ non incluse dans W_ν , on a $\text{supp}([R] - [S]) \subset A$ et donc $R \subset A$. Dans le cas contraire, il existe un $i_0 \in \{1, \dots, M\}$ tel que V_{i_0} ne contient que des composantes irréductibles de $S \setminus \gamma_x$ incluse dans W_ν . Soit $[\tilde{R}]$ (resp. $[\tilde{S}]$) la restriction de $[R]$ (resp. de $[S]$) à V_{i_0} . On a alors par construction

$$\text{Vol } \tilde{S} \leq \text{Vol } S^\nu < \frac{1}{4}C.$$

Or $[\tilde{R}] = [\tilde{S}] + n_{i_0}[V_{i_0}]$ (avec $n_{i_0} \neq 0$), et donc, comme $\tilde{S} \subset V_{i_0}$ et que V_{i_0} est de volume strictement supérieur à C car, étant compact, il ne peut être inclus dans V , on a :

$$\text{Vol } \tilde{R} \geq \text{Vol } V_{i_0} - \text{Vol } \tilde{S} > \frac{3}{4}C.$$

Le courant $[R] - [\tilde{R}] + [\tilde{S}]$ est encore solution au problème du bord pour $[\gamma]$. De plus, $\text{supp}([R] - [\tilde{R}])$ et \tilde{S} n'ont pas de composantes analytiques communes.

En effet, par construction, $\text{supp}([R] - [\tilde{R}])$ n'a pas de composante analytique incluse dans V_{i_0} et $\tilde{S} \subset V_{i_0}$. Par conséquent on a

$$\text{Vol}(\text{supp}([R] - [\tilde{R}] + [\tilde{S}])) = \text{Vol}(\text{supp}([R] - [\tilde{R}])) + \text{Vol}(\tilde{S}).$$

De même, $[R] = ([R] - [\tilde{R}]) + [\tilde{R}]$ et $\text{supp}([R] - [\tilde{R}])$ et \tilde{R} sont par construction sans composantes analytiques communes et donc

$$\text{Vol}(R) = \text{Vol}(\text{supp}([R] - [\tilde{R}])) + \text{Vol}(\tilde{R}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{supp}([R] - [\tilde{R}] + [\tilde{S}])) &= \text{Vol}(\text{supp}([R] - [\tilde{R}])) + \text{Vol}(\tilde{S}) \\ &= \text{Vol}(R) - \text{Vol}(\tilde{R}) + \text{Vol}(\tilde{S}) \\ &< \left(I + \frac{C}{2}\right) - \frac{3C}{4} + \frac{C}{4} \leq I \end{aligned}$$

ce qui donne la contradiction recherchée et prouve que $R \subset A$. L'ensemble A ne contenant qu'un ensemble fini de surfaces de Riemann compactes, on est réduit au cas où γ est inclus dans une surface de Riemann irréductible L . Si $[R_1]$ et $[R_2]$ sont deux solutions distinctes au problème du bord pour $[\gamma]$ dans L , on a $[R_1] - [R_2] = m[L]$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. En particulier, si deux solutions sont nulles sur une composante irréductible de $L \setminus \gamma$, elles sont égales. Il existe donc une solution au problème du bord pour $[\gamma]$ dont le complémentaire du support est de volume maximal et donc tel que le support est de volume minimal. \square

5.5. Existence d'une solution globale

PROPOSITION 5.17. — *Sous les hypothèses du théorème 2.3, supposons que la proposition 3 de ce théorème est vérifiée, que Γ est connexe et de dimension 3 et qu'il existe une solution au problème du bord $[T]$ pour $[\Gamma]$ dans $(U \setminus F) \times \omega$. Alors il existe une 2-chaîne holomorphe $[\tilde{T}]$ de $U \times \omega \setminus \Gamma$, solution au problème du bord pour $[\Gamma]$ dans $U \times \Omega$ et qui coïncide avec $[T]$ dans $(U \setminus F) \times \omega$.*

Démonstration. — Nous dirons que Γ admet une extension analytique au point $x \in \Gamma$, s'il existe un voisinage V_x de x et un sous-ensemble analytique T_x de $V_x \setminus \Gamma$, de volume fini et tel que $[\Gamma] = \pm d[T_x]$ dans V_x . D'après le théorème de Trépreau [38], si Γ est minimale au point x , elle admet une extension analytique au point x . De plus, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ est une courbe CR et si Γ admet une extension analytique au voisinage de $\gamma(0)$ alors elle admet une extension analytique au voisinage de $\gamma(1)$.

LEMME 5.18. — *Γ admet une extension analytique en chacun de ses points.*

Démonstration. — Par hypothèse, Γ admet une extension analytique en tout point de $\Gamma \cap \pi^{-1}(U \setminus F)$. Soit $x \in \Gamma \cap \pi^{-1}(F)$, il faut montrer que Γ admet une extension analytique en x . Soit $\mathcal{O}_{CR}(x)$ l'orbite CR de x dans Γ . Si cette orbite est un ouvert de Γ alors Γ est minimal au point x et admet donc une extension

analytique. Sinon, $\mathcal{O}_{\text{CR}}(x)$ contient une surface de Riemann lisse $H_x \ni x$ (M est supposé de dimension 3). Or d'après les propriétés b et c , $H_x \not\subset \pi^{-1}(F)$ et il existe donc un point $y \in H_x$ tel que Γ admette une extension analytique au point y . Du fait de la propriété d'extension analytique le long des courbes CR, on a montré que Γ admet une extension analytique au point y . \square

Quitte à déformer légèrement M dans l'extension analytique à un côté obtenu dans le lemme précédent, on peut donc supposer qu'il existe un voisinage ouvert W de Γ et un sous-ensemble analytique irréductible \tilde{T} de $W \setminus \Gamma$ extension analytique de T (i.e. tel que $d[\tilde{T}] = \pm[\Gamma]$ et $\tilde{T} \cap \pi^{-1}(U \setminus F) \cap W = T \cap W$). Par conséquent, quitte à encore déformer Γ , on peut supposer que l'ensemble K défini dans le lemme 2.7 est vide. Par conséquent, la preuve du théorème principal donne alors que l'ensemble F n'est pas 1-générique. C'est-à-dire que F est inclus dans un ensemble dénombrable de points. Or F est fermé par construction. Le théorème du type Thullen de Siu permet alors de montrer que F n'admet pas de points isolés et donc que F est vide. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXANDER (H.) – *Polynomial approximation and hulls in sets of finite linear measure in \mathbb{C}^n* , Amer. J. Math., t. **93** (1971), pp. 65–74.
- [2] ———, *Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture*, J. Amer. Math. Soc., t. **10** (1997), pp. 123–138.
- [3] ANDREOTTI (A.) & SIU (Y.) – *Projective embedding of pseudoconcave space*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, t. **24** (1970), no. 3, pp. 231–278.
- [4] BARRETT (D.E.) – *A remark on the global embedding problem for three-dimensional CR manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **102** (1988), no. 4, pp. 888–892.
- [5] BISHOP (E.) – *Condition for the analyticity of certain sets*, Michigan Math. J., t. **482** (1964), pp. 289–304.
- [6] BOUTET DE MONVEL (L.) – *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles, exposé IX*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, 1974-1975.
- [7] CHIRKA (E.M.) – *Complex Analytic Sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
- [8] DINH (T.C.) – *Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable*, Acta Math., t. **180** (1998), no. 1, pp. 31–67.
- [9] ———, *Orthogonal measures on the boundary of a Riemann surface and polynomial hull of compacts of finite length*, J. Funct. Anal., t. **157** (1998), pp. 624–649.

- [10] ———, *Problème du bord dans l'espace projectif complexe*, Ann. Inst. Fourier, t. **45** (1998), no. 5, pp. 1483–1512.
- [11] ———, *Sur la caractérisation du bord d'une variété complexe dans l'espace projectif*, Bull. Soc. Math. France, t. **127** (1999), pp. 519–539.
- [12] DOLBEAULT (P.) & HENKIN (G.) – *Chaînes holomorphes de bord donné dans un ouvert q -concave de $\mathbb{C}P^n$* , Bull. Soc. Math. France, t. **125** (1997), pp. 383–445.
- [13] FALBEL (E.) – *Non-embeddable CR-manifolds and surface singularities*, Invent. Math., t. **108** (1992), pp. 49–65.
- [14] FEDERER (H.) – *Geometric Measure Theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 153, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [15] GRAUERT (H.) – *On the Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math., t. **68** (1958), pp. 460–472.
- [16] ———, *Sheaf-theoretical methods in complex analysis*, Several complex variables VII, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [17] HARVEY (R.) – *Holomorphic chains and their boundaries*, in *Several complex variables (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXX, Part 1, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975)*, Amer. Math. Soc., 1977, pp. 309–382.
- [18] HARVEY (R.) & LAWSON (B.) – *On boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math., t. **102** (1975), pp. 233–290.
- [19] ———, *On boundaries of complex analytic varieties, II*, Ann. of Math., t. **106** (1977), pp. 213–238.
- [20] HARVEY (R.) & SHIFFMAN (B.) – *A characterization of holomorphic chains*, Ann. of Math., t. **99** (1974), no. 2, pp. 553–587.
- [21] HENKIN (G.) – *H. Lewy's equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Uspehi. Mat. Nauk., t. **32** (1977), no. 3 (195), pp. 57–118, 247.
- [22] IVASHKOVICH (S.M.) – *The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds*, Invent. Math., t. **109** (1992), pp. 47–54.
- [23] ———, *Complex Plateau problem in non Kähler manifolds*, Ann. Polon. Math., t. **70** (1998), pp. 131–143.
- [24] JÖRICKE (B.) – *Some remarks concerning holomorphically convex hulls and envelopes of holomorphy*, Math. Z., t. **218** (1995), pp. 143–157.
- [25] KATO (M.) – *Compact complex surfaces containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces*, Tôhoku Math. J., t. **31** (1979), pp. 537–547.
- [26] KING (J.) – *The currents defined by analytic varieties*, Acta Math., t. **127** (1971), pp. 185–220.
- [27] KOHN (J.J.) – *Several complex variables from the point of view of linear partial differential equations*, Proc. Sympos. Pure Math., t. **XXX**, Part 1 (1975), pp. 215–237.
- [28] LAWRENCE (M.G.) – *Polynomial hulls of sets of finite length in strictly convex boundaries*, manuscript.

- [29] MIHALACHE (N.) – *Voisinages de Stein pour les surfaces de Riemann avec bord immergées dans l'espace projectif*, Bull. Sci. Math., t. **120** (1996), no. 4, pp. 397–404.
- [30] PORTEN (E.) – *A Hartogs-Bochner type theorem for continuous CR-mappings*, manuscript, 1996.
- [31] ROSSI (H.) – *Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary*, in *Proc. Conf. Complex Analysis*, Springer, Berlin, 1965, pp. 242–256.
- [32] ———, *Homogeneous strongly pseudoconvex hypersurfaces*, Rice Univ. Studies, t. **59** (1973), no. 1, pp. 131–145.
- [33] SARKIS (F.) – *CR-meromorphic extension and the non-embedding of the Andreotti-Rossi CR-structure in the projective space*, Int. J. Math., t. **10** (1999), pp. 897–915.
- [34] ———, *Problème du bord dans es variétés kählériennes et extension des fonctions CR-méromorphes*, Thèse, Université Paris VI, 1999.
- [35] SHIFFMAN (B.) – *Complete characterization of holomorphic chains of codimension one*, Math. Ann., t. **274** (1986), pp. 233–256.
- [36] SIU (Y.) – *Every Stein Subvariety Admits a Stein Neighborhood*, Invent. Math., t. **38** (1976), pp. 89–100.
- [37] STOLZENBERG (G.) – *Uniform approximation on smooth curves*, Acta Math., t. **115** (1966), pp. 185–198.
- [38] TRÉPREAU (J.M.) – *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. France, t. **118** (1990), pp. 403–450.
- [39] WERMER (J.) – *The hull of a curve in \mathbb{C}^n* , Ann. of Math., t. **68** (1958), pp. 550–561.